

極大な双曲型不変集合について

北大 理学部 倉田雅弘

M を多様体、 $f: U \rightarrow M$ を M の開集合から開集合の上への微分同型、 $A \subset U$ を双曲型不変集合とする。ここでは、 A が十分小さな近傍で極大な不変集合であるとき、その構造を調べる。このような双曲型不変集合の例としては、 $A = M$ 、即ち f が Anosov 微分同型 ($\text{cl Per}(f) = M$ を仮定しない) などがある。

始めに 必要な定義を述べる。

定義 $U \subset M$ を多様体 M の開集合、 $f: U \rightarrow M$ を M の開集合の上への微分同型とする。 f -不変な compact 集合 A が以下を満たすとき、双曲型不変集合 という。

$T_1 M$ が Tf -不変な subbundle の Whitney 和

$$T_1 M = E^s \oplus E^u$$

と表わされ、 $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ が存在して、 $n \geq 0$ に対して、

$$v \in E^s \text{ のとき, } \|Tf^n v\| < C\lambda^n \|v\|$$

$$v \in E^u \text{ のとき, } \|Tf^{-n} v\| < C\lambda^n \|v\|$$

となる。

定義 $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ を有限集合とする。 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ を、 $\mathbb{Z}$ から $\mathcal{A}$ への function 全体の空間に compact-open topology が入っているものとする。ただし、 $\mathcal{A}$, $\mathbb{Z}$ の位相は離散トポロジーとする。写像

$$p: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$$

を、 $p((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, ただし、 $b_i = a_{i+1}$ で定義する。 $T = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ を $n \times n$ 0-1 行列とする。 p -不変な $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ の閉集合 Σ

$$\Sigma = \{ (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid t_{n_i n_{i+1}} = 1, \text{ ただし } a_i = A_{n_i} \}$$

を (symbol $\mathcal{A}$ 上の 行列 T によって決まる) 有限型の subshift という。 p を shift transformation という。 p は位相同型である。

定義 以下を満たすとき、双曲型不変集合 Λ は local

product structure をもつ という。

正数 δ があって、任意の $x \in \Lambda$ に対して、

$$\phi: W_\delta^s(x; \Lambda) \times W_\delta^u(x; \Lambda) \longrightarrow \Lambda$$

は、 x の Λ での近傍の上 Λ の位相同型である。ただし、ここ

で $\phi(y, z) = W_\delta^u(y; \Lambda) \cap W_\delta^s(z; \Lambda)$ とする。

定義 次のみたす閉集合 $D \subset W_\delta^s(\Lambda)$ を ($W_\delta^s(\Lambda)$ に対する) proper fundamental domain という。

$$\bigcup_{n \geq 0} f^n(D) \supset W_\delta^s(\Lambda) - \Lambda,$$

$$D \cap \Lambda = \emptyset.$$

$\delta > 0$, $x \in \Lambda$ に対して

$$W_\delta^s(x; \Lambda) = W_\delta^s(x) \cap \Lambda,$$

$$W_\delta^u(x; \Lambda) = W_\delta^u(x) \cap \Lambda$$

等と置く。

我々は [3] で得た次の結果を用いる。

定理 0 Λ を双曲型不変集合、 U をその近傍とする。このとき、双曲型不変集合 Λ' で $\Lambda \subset \Lambda' \subset U$ とはるもので、以

下をみたすものがある。

有限型の subshift Σ と、 Σ への写像 $\pi: \Sigma \longrightarrow \Lambda'$ があって、 $f\pi = \pi p$ となる。ただし、ここで p は shift transformation である。(π を Σ から Λ' への semi-conjugacy という。)

上の定理から、次を得る。

系 Λ を双曲型不変集合で、ある近傍では、極大な不変集合となっているものとする。このとき、有限型の subshift Σ と、semi-conjugacy $\pi: \Sigma \longrightarrow \Lambda$ が存在する。

次に、極大な双曲型不変集合の性質を求める。

補題 1 次の (1), (2), (3) は同値である。

(1) Λ の近傍 U があって、 Λ は U での極大な双曲型不変集合である。

(2) Λ は local product structure をもつ。

(3) Λ は proper fundamental domain をもつ。

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) を示す。 $\delta > 0$ を十分小さく選んで、 $2\delta < d(\Lambda, M-U)$, かつ任意の $x, y \in \Lambda$ に対して、 $W_\delta^s(x) \cap W_\delta^u(y) = \text{一点}$ となるようにする。 $W_\delta^s(x) \cap W_\delta^u(y) = \{z\} \subset \Lambda$ を示すとよい。 $d(f^n(x), f^n(z)) < \delta$

(ただし、 $n \geq 0$)、 $n < 0$ に対しては、 $d(f^n(y), f^n(z)) < \delta$ だから、 $d \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(z) \subset U$ 。 Λ は U で極大な不変集合だから $d \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(z) \subset \Lambda$ 。 故に $z \in \Lambda$ 。

(2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (1) は [5], [4] を見よ。

補題 2 双曲型不変集合 Λ に対して、有限型の subshift Σ と semi-conjugacy $\pi: \Sigma \rightarrow \Lambda$ が存在するとする。このとき、有限個の周期点 $x_1, \dots, x_\ell \in \Lambda$ があって、

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\ell} d W^s(x_i; \Lambda)$$

$$\text{int}_{\Lambda} d W^s(x_i; \Lambda) \neq \emptyset \quad (i=1, \dots, \ell)$$

となる。ただし、 int_{Λ} は Λ における interior を示す。

証明 $x \in \Lambda$ に対して、 $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$ を $\pi((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = x$ となるものとする。 Σ の symbol の個数を N とすると、任意の整数 m に対して、 $n, n+k \in \mathbb{Z}$ があって、

$$a_n = a_{n+k}$$

$$m \leq n < n+k \leq m+N+1$$

となる。

$$(b_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma \text{ を}$$

$$i \leq n+k \text{ のとき } b_i = a_i$$

$$i \geq 1, \quad 0 \leq j \leq k-1 \text{ のとき } b_{n+i+k+j} = a_{n+j}$$

とおき、 $(c_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$ を、 $i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j \leq k-1$ に対して、
 $C_{in+j} = a_{n+j}$ となる周期点とすると、 $\pi((b_i)_{i \in \mathbb{Z}}) \in W^s(\pi(0), \Lambda)$
 となる。従って、 Λ は周期 $N+1$ 以下の周期点の closure の
 和にかける。このとき $\text{int}_\Lambda \text{cl } W^s(p; \Lambda) = \emptyset$ (p は周期
 $N+1$ 以下の周期点) は除いてもよい。Q.E.D.

以上の準備のもとに、次を得る。

定理 1 Λ は双曲型不変集合で、十分小さな近傍での極大
 な不変集合となっているものとする。

(1) Λ の f -不変な閉集合 $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ があって、以下
 をみ直す。

$$(a) \quad \Lambda = \bigcup_{i=1}^m \text{cl } W^s(\Omega_i; \Lambda).$$

(b) $W^s(\Omega_i; \Lambda)$ は Λ での開集合。

$$(c) \quad \Omega_i = W^u(\Omega_i; \Lambda) = \text{cl } \text{Per}(f|_{\Omega_i})$$

$$(d) \quad i \neq j \text{ のとき } W^s(\Omega_i; \Lambda) \cap W^s(\Omega_j; \Lambda) = \emptyset.$$

(2) Λ の f -不変な閉集合 $\Omega'_1, \dots, \Omega'_m$ があって、以下
 をみ直す。

$$(a) \quad \Lambda = \bigcup_{i=1}^m \text{cl } W^u(\Omega'_i; \Lambda)$$

(b) $W^u(\Omega'_i; \Lambda)$ は Λ での開集合。

$$(c) \quad \Omega'_i = W^s(\Omega'_i; \Lambda) = \text{cl } \text{Per}(f|_{\Omega'_i})$$

$$(d) \quad i \neq j \text{ のとき } W^u(\Omega'_i; \Lambda) \cap W^u(\Omega'_j; \Lambda) = \emptyset.$$

証明 $x_1, \dots, x_n \in \Lambda$ を補題2で与えられた周期点とする。 $x \in W^s(x_i; \Lambda) \cap \text{int}_\Lambda \text{cl } W^s(x_i; \Lambda)$ とすると、十分小さな $\delta > 0$ に対して、正の整数 n があって、

$$d(f^n(x), x_i) < \delta,$$

$$\phi: W_\delta^u(f^n(x); \Lambda) \longrightarrow W_{3\delta}^u(x_i; \Lambda)$$

は、 x_i の $W_{3\delta}^u(x_i; \Lambda)$ における近傍の上への位相同型となる。

そこで、 $\phi(y) = W_{3\delta}^s(y; \Lambda) \cap W_{3\delta}^u(x_i; \Lambda)$ とする。補題1から、 ϕ は well defined である。従って、 $W_\delta^u(x_i; \Lambda) \subset$

$\text{int}_\Lambda \text{cl } W^s(x_i; \Lambda)$ となるから、 $W^u(x_i; \Lambda) = \bigcup_{n \geq 0} f^n W_\delta^u(x_i; \Lambda) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^n(\text{int}_\Lambda \text{cl } W^s(x_i; \Lambda)) = \text{int}_\Lambda \text{cl } W^s(x_i; \Lambda)$ 。

もし、 $\text{int}_\Lambda \text{cl } W^s(x_i; \Lambda) \cap \text{int}_\Lambda \text{cl } W^s(x_j; \Lambda) \neq \emptyset$ ならば、 $\text{cl } W^s(x_i; \Lambda) = \text{cl } W^s(x_j; \Lambda)$ となるから、 $x_1, \dots, x_n \in \Lambda$ を適当に選びなおすことにより、

$$i \neq j \text{ ならば、 } \text{cl } W^s(x_i; \Lambda) \cap \text{cl } W^s(x_j; \Lambda) = \emptyset$$

とできる。

$\Omega_i = \text{cl } W^u(x_i; \Lambda)$ とおく。 Ω_i には homoclinic point が稠密にあるから、 $\text{cl } \text{Per}(f|_{\Omega_i}) = \Omega_i$ である。

$W^s(\Omega_i; \Lambda)$ は Λ での開集合である。何故なら、任意の $x \in W^s(\Omega_i; \Lambda)$ に対して、 $x \in W^s(p; \Lambda)$ とすると、十分小さな正数 δ 、 $d(f^n(x), f^n(p)) < \frac{\delta}{2}$ となる $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\phi(y, z) = W_{2\delta}^u(y; \Lambda) \cap W_{2\delta}^s(z; \Lambda)$ で定義された写像

$$\phi: W_S^s(f^n(p); \Lambda) \times W_S^u(f^n(p); \Lambda) \longrightarrow \Lambda$$

は、 Λ における $f^n(p)$ の近傍で、 $f^n(x)$ を内部に含むもの Λ の、位相同型となる。

$\text{cl } W^s(x_i; \Lambda) \supset \Omega_i$ だから、 $\text{cl } W^s(x_i; \Lambda) \supset W^s(\Omega_i; \Lambda) \supset W^s(x_i; \Lambda)$ となるので、 $W^s(\Omega_i; \Lambda) = \text{int}_\Lambda \text{cl } W^s(x_i; \Lambda)$ 。従って

$$\begin{aligned} \Lambda &= \bigcup_{i=1}^n \text{cl } W^s(x_i; \Lambda) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \text{cl } W^s(\Omega_i; \Lambda). \end{aligned}$$

故に、(1)を得る。(2)の証明も同様である。

定理2 Λ は双曲型不変集合で、十分小さな近傍での極大な不変集合とする。 $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_\ell$ を互いに交わらない f -不変な閉集合 Λ の極小な分解とする。このとき、各 i ($i=1, \dots, \ell$) に対して、 Λ_i は次のいずれかを満たす。

(1) $\text{Per}(f|_{\Lambda_i})$ は、 Λ_i で稠密である。

(2) $\text{Per}(f|_{\Lambda_i})$ は、 Λ_i で nowhere dense である。

証明 $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ と $\Omega'_1, \dots, \Omega'_m$ を定理1で得られたものとする。 $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell$ を互いに交わらない閉集合で、 $\Lambda_k \cap \text{cl } W^s(\Omega_j; \Lambda) \neq \emptyset$ ならば、 $\Lambda_k \supset \text{cl } W^s(\Omega_j; \Lambda)$ 、 $\Lambda_k \cap \text{cl } W^u(\Omega'_j; \Lambda) \neq \emptyset$ ならば、 $\Lambda_k \supset \text{cl } W^u(\Omega'_j; \Lambda)$

となる極小な分解とする。

$\Omega_i \cap W^u(\Omega'_j; \Lambda) \neq \emptyset$ ならば, $\mathcal{C}W^s(\Omega_i; \Lambda) = \mathcal{C}W^u(\Omega'_j; \Lambda)$ となって, $\mathcal{C}W^s(\Omega_i; \Lambda)$ には, 周期点
が稠密にある。 $\mathcal{C}W^s(\Omega_i; \Lambda)$ に周期点、が稠密にある。 $\mathcal{C}W^s(\Omega_i; \Lambda) \cap \mathcal{C}W^s(\Omega'_j; \Lambda) \neq \emptyset$ ならば, $\mathcal{C}W^s(\Omega_i; \Lambda)$
にも周期点、が稠密にある。従って, $\mathcal{C}W^s(\Omega_i; \Lambda)$ を含む Λ
には 周期点、が稠密にある。

$\Omega_i \cap W^u(\Omega'_j; \Lambda) = \emptyset$ ($j=1, \dots, m$) ならば, $\Omega_j \subset \Lambda - (\text{稠密な部分集合})$ となる。 Q.E.D.

References

- [1] R. Bowen: Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer. J. Math. 92 (1970), 725-747.
- [2] M. W. Hirsch and C. C. Pugh: Stable manifolds and hyperbolic sets, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., 14, A.M.S. (1970) 133-165.
- [3] M. Kurata: Hartman's theorem for hyperbolic sets, (to appear).
- [4] Z. Nitecki: Differentiable dynamics, M. I. T. Press.

[5] R. C. Robinson: Structural Stability of C^1 Diffeomorphisms, (to appear).