

確率過程の漸近展開理論による 振動子モデルの解析*

北海道大学・医学研究院[†] 山野辺 貴信

Takanobu Yamanobe

School of Medicine, Hokkaido University

1 はじめに

神経系でスパイク列により情報が運ばれるが、そのどの統計量が情報キャリアか不明である。神経回路網理論よれば素子の出力関数に神経回路モデルの情報キャリアが依存する。神経細胞はノイズを持つ非線形の素子であり [10]、スパイク生成は過去の神経活動に依存する場合があることが報告されている [8, 9]。従って、スパイク生成が過去の神経活動へ依存する構造を調べる必要がある。

周期的に自発発火する神経細胞は、神経系においてしばしば観察される。このような発火をする神経細胞をモデル化するために、非線形振動子が用いられている [2]。一般に、振動が supercritical Hopf 分岐点の近くで起こる場合、その挙動は Stuart-Landau 振動子で記述され [4, 5]、この振動子は supercritical Hopf 分岐点付近の安定なリミットサイクルを持つ振動のダイナミクスをとらえている。本研究では Stuart-Landau 振動子のあるパラメータセットをとったときのモデルである Poincaré 振動子を用い、その統計的大域挙動を表すマルコフ作用素を導入する。さらに確率的回転数を導入し、これが過去の振動子の状態にどのように依存するか [11, 12] に基づき紹介する。

2 確率的 Poincaré 振動子

Poincaré 振動子は極座標系で以下のように記述される [1, 11]。

$$\begin{aligned}\frac{dR_t^{(0)}}{dt} &= KR_t^{(0)}(1 - R_t^{(0)}), \\ \frac{d\Phi_t^{(0)}}{dt} &= 1\end{aligned}\tag{1}$$

ここで、 t は時間、 $R_t^{(0)} \geq 0$ は動経方向、 $\Phi_t^{(0)} \in [0, 1)$ 、 $K > 0$ はリミットサイクルへの緩和率、リミットサイクルの周期は 1 で、上付き文字 (0) は決定論的な解であることを意味する。この振動子で原点を除く任意の点からはじまる軌道は反時計回りにリミットサイクルへ収束する。この振動子は $X_t^{(0)} = R_t^{(0)} \cos(2\pi\Phi_t^{(0)})$ 、 $Y_t^{(0)} = R_t^{(0)} \sin(2\pi\Phi_t^{(0)})$ を用い、デカルト座標系へ変換できる。

n 番目の入力 $X_t^{(0)}$ を A_n だけ遷移させ、次の入力までの間隔が I_n だとする。 n 番目の入力直前の状態点 (r_n, ϕ_n) と n 番目の入力直後の状態点 (r'_n, ϕ'_n) の関係は、[1] より次のようになる。

$$\begin{aligned}r'_n &= F_R(r_n, \phi_n) = [r_n^2 + A_n^2 + 2A_nr_n \cos(2\pi\phi_n)]^{1/2}, \\ \phi'_n &= F_\Phi(r_n, \phi_n) = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{r_n \cos(2\pi\phi_n) + A_n}{F_R(r_n, \phi_n)}\end{aligned}\tag{2}$$

さらに、入力間隔 I_n 後の $n+1$ 番目の入力直前の状態点 (r_{n+1}, ϕ_{n+1}) は次のようになる。

$$\begin{aligned}r_{n+1} &= R_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n) = r'_n / \{(1 - r'_n)e^{-KI_n} + r'_n\}, \\ \phi_{n+1} &= \Phi_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n) = \phi'_n + I_n \pmod{1}\end{aligned}\tag{3}$$

$R_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n)$ 、 $\Phi_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n)$ の (r_n, ϕ_n) は n 番目の入力直前の状態点を表す。

次に (1) をデカルト座標系に変換し、 $X_t^{(0)}$ を決める式へ、標準 Wiener 過程にノイズ強度 $\epsilon \in (0, 1]$ が掛けた項を加える。その式は極座標系で次のように表される [11]。

$$\begin{aligned}dR_t^{(\epsilon)} &= KR_t^{(\epsilon)}(1 - R_t^{(\epsilon)})dt + \frac{\epsilon^2 \sin^2(2\pi\Phi_t^{(\epsilon)})}{2R_t^{(\epsilon)}}dt + \epsilon \cos(2\pi\Phi_t^{(\epsilon)})dW_t, \\ d\Phi_t^{(\epsilon)} &= dt + \frac{\epsilon^2 \sin(4\pi\Phi_t^{(\epsilon)})}{4\pi R_t^{(\epsilon)^2}}dt - \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{\sin(2\pi\Phi_t^{(\epsilon)})}{R_t^{(\epsilon)}}dW_t\end{aligned}\tag{4}$$

ここで、 W_t は標準 Wiener 過程を表す。我々は (4) を確率的 Poincaré 振動子と呼ぶことにする。

3 確率的位相遷移作用素

確率的 Poincaré 振動子で、 n 番目の入力直前の状態が、 $n+1$ 番目の入力直前の状態にどのように遷移するかを表すマルコフ作用素（確率的位相遷移作用素）を導入する。 n 番目の入力直後の状態点を (r'_n, ϕ'_n) とすると、その後のダイナミクスを支配する方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} R_{I_n}^{(\epsilon)} &= r'_n + k \int_0^{I_n} R_s^{(\epsilon)} (1 - R_s^{(\epsilon)}) ds + \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^{I_n} \frac{\sin^2(2\pi\Phi_s^{(\epsilon)})}{R_s^{(\epsilon)}} ds + \epsilon \int_0^{I_n} \cos(2\pi\Phi_s^{(\epsilon)}) dW_s, \\ \Phi_{I_n}^{(\epsilon)} &= \phi'_n + I_n + \frac{\epsilon^2}{4\pi} \int_0^{I_n} \frac{\sin(4\pi\Phi_s^{(\epsilon)})}{R_s^{(\epsilon)^2}} ds - \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{I_n} \frac{\sin(2\pi\Phi_s^{(\epsilon)})}{R_s^{(\epsilon)}} dW_s \end{aligned} \quad (5)$$

確率的位相遷移作用素を導入するためには、確率的 Poincaré 振動子の推移確率が必要である。しかし、推移確率を与える Fokker-Planck 方程式が解析的に解ける場合は限られている [7]。そこで我々は (r'_n, ϕ'_n) からじまる推移確率を計算するため小分散理論を用いる [3]。 $\mathbf{X}_{I_n}^{(\epsilon)} \equiv (R_{I_n}^{(\epsilon)}, \Phi_{I_n}^{(\epsilon)})$ と置き、 $\mathbf{X}_{I_n}^{(\epsilon)}$ を ϵ に関して次のように展開する。

$$\mathbf{X}_{I_n}^{(\epsilon)} = \mathbf{X}_{I_n}^{(0)} + \epsilon \mathbf{A}_{1I_n} + o(\epsilon),$$

ここで、 $\mathbf{X}_{I_n}^{(0)} = (R_{I_n}^{(0)}, \Phi_{I_n}^{(0)})$ 、 $\mathbf{A}_{1I_n} = (A_{1rI_n}, A_{1\phi I_n}) = \frac{\partial \mathbf{X}_{I_n}^{(\epsilon)}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$ である。次に、決定論的な解の周りの確率的挙動を表す新しい確率変数 $\mathbf{S}_{I_n}^{(\epsilon)} = (\mathbf{X}_{I_n}^{(\epsilon)} - \mathbf{X}_{I_n}^{(0)})/\epsilon$ を導入する。 $\mathbf{S}_{I_n}^{(\epsilon)}$ を ϵ に関し展開すると

$$\mathbf{S}_{I_n}^{(\epsilon)} = \mathbf{A}_{1I_n} + o(1) \quad (6)$$

となる。さらに、 $\mathbf{S}_{I_n}^{(\epsilon)}$ の特性関数の ϵ に関する漸近展開は

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{E}[\exp\{i\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{A}_{1I_n} + o(1))\}] \\ &= \mathbf{E}[\exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}_{1I_n})] + o(1) \end{aligned}$$

である。特性関数のフーリエ逆変換を用いると

$$f_{\mathbf{S}_{I_n}^{(\epsilon)}}(\mathbf{u}) = n[\mathbf{u}; 0, \boldsymbol{\Sigma}_{I_n}] + o(1)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$ であり、 $n[\mathbf{u}; 0, \boldsymbol{\Sigma}_{I_n}]$ は平均ゼロ、分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{I_n}$ を持つ 2 次元ガウス密度関数を表す。 A_{1rI_n} と $A_{1\phi I_n}$ を用い行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{I_n}$ は次のように与えられる。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{I_n} = \begin{pmatrix} \Sigma_{rrI_n} & \Sigma_{r\phi I_n} \\ \Sigma_{r\phi I_n} & \Sigma_{\phi\phi I_n} \end{pmatrix}$$

ここで、 $\Sigma_{rrI_n} = \mathbf{E}[A_{1rI_n}^2]$ 、 $\Sigma_{\phi\phi I_n} = \mathbf{E}[A_{1\phi I_n}^2]$ 、 $\Sigma_{r\phi I_n} = \mathbf{E}[A_{1rI_n}A_{1\phi I_n}]$ である。これら行列 Σ_{I_n} の要素は解析的に得られる。最終的に $\mathbf{X}_{I_n}^{(\epsilon)}$ の密度関数は

$$f_{\mathbf{X}_{I_n}^{(\epsilon)}}(\mathbf{u}) = n[\mathbf{u}; \mathbf{X}_{I_n}^{(0)}, \epsilon^2 \Sigma_{I_n}] + o(1) \quad (7)$$

となる。以後、 n 番目の入力直後の動経方向成分が $r'_n \neq 0$ のとき、(7) の第一項までを用い推移確率を近似する ($r'_n = 0$ のときは、デカルト座標系を用いた式で、同様に推移確率の近似を導く)。 u_1 と u_2 はそれぞれ動経方向と偏角方向の座標のため、座標 (u_1, u_2) は $(-u_1, u_2 + 0.5)$ と同じである [11]。 (r_n, ϕ_n) からはじまる推移確率には (u_1, u_2) と $(-u_1, u_2 + 0.5)$ の確率密度の値が含まれている。したがって、極座標系における (r_n, ϕ_n) からはじまる推移確率は次のようになる。

$$\begin{aligned} & g_{K, \epsilon, A_n, I_n}(\nu, \psi; r_n, \phi_n) \\ &= \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \{n[(\nu, \psi + p); \mathbf{X}_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n), \epsilon^2 \Sigma_{I_n}] + n[(-\nu, \psi + 0.5 + p); \mathbf{X}_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n), \epsilon^2 \Sigma_{I_n}]\} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\nu > 0$ 、 $\psi \in [0, 1)$ であり、 $\mathbf{X}_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n)$ は $\mathbf{X}_{I_n}^{(0)}$ の初期値を明示的に示し、(2) で決まる n 番目の入力による影響も $\mathbf{X}_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n)$ に含まれる。総和は原点周りの複数回の回転の可能性を含めるためであり、 $g_{K, \epsilon, A_n, I_n}$ の下付き文字は各パラメータへの依存性を表す。

最終的に、 n 番目の入力直前と $n+1$ 番目の入力直前の関係を表すマルコフ作用素は次のようになる。

$$h_{n+1}(\nu, \psi) = \mathbf{P}_{K, \epsilon, A_n, I_n} h_n(\nu, \psi) = \int_0^1 \int_0^\infty g_{K, \epsilon, A_n, I_n}(\nu, \psi; r, \phi) h_n(r, \phi) dr d\phi \quad (9)$$

ここで、 h_n は n 番目の入力直前の確率的 Poincaré 振動子の状態密度を表す。我々はこのマルコフ作用素を確率的位相遷移作用素と呼ぶことにする。

確率的位相遷移作用素は線形作用素なので、その特徴は固有値と固有関数で決まる。 $\{\alpha_i\}$ と $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) をそれぞれ $\mathbf{P}_{K, \epsilon, A_n, I_n}$ の固有値 (絶対値の大きい順に並べてある)、それに対応する固有関数とする。上で求めた積分核の近似が $g_{K, \epsilon, A_n, I_n} > 0$ を満たすので、 α_1 は重複度 1、 $\alpha_1 = 1$ 、対応する固有関数是不変密度 $h_{K, \epsilon, A_n, I_n}^*$ (K, ϵ が一定で、同じ入力パラメータ A_n, I_n で無限回入力が加わったときの状態密度) となる。これは (7) の第一項までの近似で構築した確率的位相遷移作用素がエルゴード性を満たすことを意味し [6]、不変密度 $h_{K, \epsilon, A_n, I_n}^*$ は定常状態のダイナミクスに対応する。さらに、1

以外の固有値は $|\alpha_i| < 1$ となるので、これらの固有値とそれに対応する固有関数は作用素 P_{K,ϵ,A_n,I_n} の過渡的挙動を表す。この特性から、確率的位相遷移作用素を二つの部分に分解することができる。

$$P_{K,\epsilon,A_n,I_n} h(r, \phi) = V_{K,\epsilon,A_n,I_n} h(r, \phi) + Q_{K,\epsilon,A_n,I_n} h(r, \phi), \quad (10)$$

ここで、 V_{K,ϵ,A_n,I_n} 定常状態の挙動、すなわち、 $V_{K,\epsilon,A_n,I_n} h(r, \phi) = h_{K,\epsilon,A_n,I_n}^*(r, \phi)$ を表し、 Q_{K,ϵ,A_n,I_n} は過渡的挙動に対応する [6]。確率的位相遷移作用素によって得られた不変密度とオイラー法によって得られた不変密度の比較し、 $\epsilon = 0.6$ 程度まで、確率的位相遷移作用素が相平面全体の挙動をとらえていることを確認した [11]。

一般に、確率的 Poincaré 振動子に $n + 1$ 個の時間変化する入力加わるのであれば、 $n + 1$ 番目の入力直前の状態密度は (10) を繰り返し用い、次のように表される [12]。

$$\begin{aligned} h_{n+1}(r, \phi) = & h_{K,\epsilon,A_n,I_n}^*(r, \phi) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=0}^{n-i-1} Q_{K,\epsilon,A_{n-j},I_{n-j}} \right) h_{K,\epsilon,A_1,I_1}^*(r, \phi) \\ & + \prod_{l=1}^{n-1} Q_{K,\epsilon,A_{n-l},I_{n-l}} h_1(r, \phi) \end{aligned} \quad (11)$$

(11) の右辺第一項は n 番目の入力に対する作用素の不変密度となる。過渡的挙動は第二項と第三項により決まる。第二項は隣接する入力に対応する二つの不変密度の違いから生じる項である。すなわち、隣り合う入力に対する不変密度が大きく異なれば、過渡成分が大きくなることを意味する。第三項は初期状態密度への依存性を示す。

3.1 確率的回転数

確率的 Poincaré 振動子に対し、確率的回転数を定義する。[11] の (8) によれば、 $n + 1$ 番目の入力直前の状態密度は

$$n[(r, \theta); \mathbf{U}_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n), \epsilon^2 \Sigma_{I_n}(r_n, \phi_n)] + n[(-r, \theta + 0.5); \mathbf{U}_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n), \epsilon^2 \Sigma_{I_n}(r_n, \phi_n)] \quad (12)$$

となる。ここで、 $\Sigma_{I_n}(r_n, \phi_n)$ 、 $\mathbf{U}_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n) = (R_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n), \Theta_{I_n}^{(0)}(r_n, \phi_n))$ は n 番目の入力直前の状態点 (r_n, ϕ_n) に対する依存を陽に表し、(2) により決まる n 番目の入力による影響も含む。 $r > 0$ 、 θ は $\mathbf{R}$ へ持ち上げられた偏角である。持ち上げられた偏角の n 番

目の入力と $n+1$ 番目の入力による差は

$$\begin{aligned} w_{K,\epsilon,A_n,I_n}(r_n,\phi_n) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\theta - \phi_n) n[(r,\theta); \mathbf{U}_{I_n}^{(0)}(r_n,\phi_n), \epsilon^2 \Sigma_{I_n}(r_n,\phi_n)] d\theta dr \\ &\quad + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\theta - \phi_n) n[(-r,\theta+0.5); \mathbf{U}_{I_n}^{(0)}(r_n,\phi_n), \epsilon^2 \Sigma_{I_n}(r_n,\phi_n)] d\theta dr \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで、 w の下付き文字はパラメータ K, ϵ, n 番目の入力振幅 A_n, n 番目の入力間隔 I_n に依存することを示す。これを用いれば n 番目と $n+1$ 番目の入力間の確率的回転数は

$$\Omega_{K,\epsilon,A_n,I_n} = \frac{1}{I_n} \int_0^1 \int_0^\infty w_{K,\epsilon,A_n,I_n}(r_n,\phi_n) h_n(r_n,\phi_n) dr_n d\phi_n \quad (14)$$

となる。これが瞬時確率的回転数であり、 $\Omega_{K,\epsilon,A_n,I_n}$ は n 番目と $n+1$ 番目の入力間の確率的回転数なので、入力振幅 A_n 、入力間隔 I_n に対応するといえる。

さらに、(11) を用い $h_n(r_n,\phi_n)$ を分解すると、(14) は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \Omega_{K,\epsilon,A_n,I_n} &= \int_0^1 \int_0^\infty w_{K,\epsilon,A_n,I_n}(r_n,\phi_n) h_{K,\epsilon,A_{n-1},I_{n-1}}^*(r_n,\phi_n) dr_n d\phi_n \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^\infty w_{K,\epsilon,A_n,I_n}(r_n,\phi_n) \sum_{i=1}^{n-2} \left(\prod_{j=0}^{n-i-2} Q_{K,\epsilon,A_{n-1-j},I_{n-1-j}} \right) h_{K,\epsilon,A_i,I_i}^*(r_n,\phi_n) dr_n d\phi_n \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^\infty w_{K,\epsilon,A_n,I_n}(r_n,\phi_n) \prod_{l=0}^{n-2} Q_{K,\epsilon,A_{n-1-l},I_{n-1-l}} h_1(r_n,\phi_n) dr_n d\phi_n \end{aligned} \quad (15)$$

第一項は $n-1$ 番目の入力における不変密度の貢献を表す。第二項は入力パラメータ $\{A_1, I_1\}, \dots, \{A_{n-2}, I_{n-2}\}$ に対する不変密度が、対応する過渡的挙動で重みづけられた項。第三項は初期状態密度からの影響を表す項である。

各入力に対する不変密度をもとに考えれば、 $n-1$ 番目の入力で決まる成分は (15) の第一項で決まり、 $n-2$ 番目の入力で決まる成分は、第二項から対応する成分を取り出し求められる。これを順に過去に遡るように繰り返すと、現在から過去に遡るとき、何番目の入力からの成分が、現在の瞬時確率的回転数 $\Omega_{K,\epsilon,A_n,I_n}$ に影響を与えるのか計算できる。

4 過去のモデルの状態へ確率的回転数の依存性

ある時間間隔でスパイクがいくつ発生するかを表す発火頻度はスパイク列解析で非常に重要な統計量である。確率的 Poincaré 振動子で発火頻度に対応するのは、確率的回転数

である。図 1 は前節で説明した瞬時確率的回転数の過去の成分を入力番号に対しプロットしたものである。この図の場合、入力パラメータは、1つの入力と1つの出力が確率的に対応する 1 : 1 確率的同期応答領域の中に入っている（確率的同期応答の定義に関しては [11, 12] を参照）。この場合、現在から過去に遡るに従い、瞬時確率的回転数の成分が指数関数的に減少しているのが観察される。他の入力パラメータの範囲では、過去の成分が過去に遡るごとに指数関数的に減少しない場合、過去の成分の値が負になる場合などが観察された [12]。

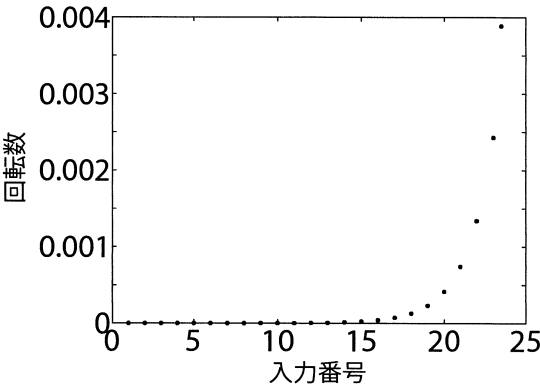


図 1 時間変化する入力に対する確率的回転数の成分。横軸は何番目の入力かを表し、縦軸は過去の瞬時確率的回転数の成分を表す。この計算ではノイズ強度を $\epsilon = 0.3$ 、入力振幅を $A = 0.95$ とし、次式を用い、瞬時入力頻度 f_n を変化させた。 $f_n = 1/I_n = f_{start} + \frac{f_{end}-f_{start}}{N}(n-1)$ 、 $f_{step} = (f_{end} - f_{start})/N$ 。入力範囲は $f_{start} = 1.05$ 、 $f_{end} = 0.95$ 、入力のは数は $N = 24$ 、1つの入力と1つの出力が確率的に対応する 1 : 1 確率的同期応答領域の中に入力パラメータが入っている。最後の入力に対する成分は他の成分と比べ非常に大きいため、図に示されていない。

5 まとめ

我々はモデルの統計的大域挙動を表すマルコフ作用素（確率的位相遷移作用素）を導入した。瞬時確率的回転数が過去の確率的 Poincaré 振動子の挙動に依存することを示した。ここで紹介した確率的同期応答領域において過去の確率的 Poincaré 振動子の挙動による瞬時確率的回転数の成分は、過去に遡るに従い指数関数的な減少を示した。また、ここでは紹介しなかったが、現在の状態から遠く離れた過去の状態が現在の瞬時確率的回転数に

影響を与える可能性、過去の瞬時確率的回転数の成分が負である可能性が解析から得られている [12]。ここで紹介した解析手法を拡張し、コンダクタンスに基づく神経細胞モデルに適用し、過去の神経活動の構造がスパイク生成にどのように関わっているか明らかにすることは重要な意義を持つと思われる。

参考文献

- [1] L. Glass and J. Sun. Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, arnold tongues, and the global organization of bifurcations. *Phys. Rev. E*, Vol. 50, pp. 5077–5084, Dec 1994.
- [2] E. M. Izhikevich. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, 2010.
- [3] N. Kunitomo and A. Takahashi. On validity of the asymptotic expansion approach in contingent claim analysis. *Ann. Appl. Probab.*, Vol. 13, pp. 914–952, 2003.
- [4] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillation, Waves, and Turbulence*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2003.
- [5] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory, 3rd ed.* Springer, 2004.
- [6] A. Lasota and M. C. Mackey. *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspect of Dynamics, 2nd ed.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1998.
- [7] H. Risken. *The Fokker-Planck equation, 2nd ed.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [8] J.P. Segundo, J.-F. Vibert, M. Stiber, and Hanneton S. Periodically modulated inhibition and its postsynaptic consequences – i. general features. influence of modulation frequency. *Neuroscience*, Vol. 68, pp. 657–692, 1995.
- [9] J.P. Segundo, J.-F. Vibert, M. Stiber, and Hanneton S. Periodically modulated inhibition and its postsynaptic consequences–ii. influence of modulation slope, depth, range, noise and of postsynaptic natural discharges. *Neuroscience*, Vol. 68, pp. 693–719, 1995.
- [10] J. A. White, J. T. Rubinstein, and A. R. Kay. Channel noise in neurons. *Trends Neurosci.*, Vol. 23, pp. 131–137, 2000.
- [11] T. Yamanobe. Stochastic phase transition operator. *Phys. Rev. E (3)*, Vol. 84,

p. 011924, Jul 2011.

- [12] T. Yamanobe. Global dynamics of a stochastic neuronal oscillator. *Phys. Rev. E* (3), Vol. 88, p. 052709, 2013.