

1 次増大度を持つエネルギーに基づく 2 次元相転移モデルにおける安定性解析

神戸大学大学院工学研究科応用数学教室 白川 健 (Shirakawa, Ken)
Department of Applied Mathematics,
Graduate School of Engineering, Kobe University, Japan

1 導入

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つ 2 次元有界領域とする. また, f を $\mathbb{R}^2$ 上のノルムとし, f の相対ノルムを f° と表す.

本論文では, 以下の連立発展方程式の初期値問題 $(P)_f$ を考える.

$$(P)_f: \begin{cases} (\theta + w)_t - \Delta(\theta + \mu\theta_t) = 0 & \text{in } Q := (0, +\infty) \times \Omega, \\ \theta = \theta_* & \text{on } \Sigma := (0, +\infty) \times \Gamma, \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0 & \text{in } \Omega; \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} w_t(t) + \kappa \partial \Phi_f(w(t)) \ni w(t) + \theta(t) & \text{in } L^2(\Omega), \quad t > 0, \\ w(0) = w_0 & \text{in } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (1.2)$$

システム $(P)_f$ は固体・液体相転移現象の力学系を記述するひとつの数学モデルであり, このとき 2 つの未知変数 $\theta = \theta(t, x)$, $w = w(t, x)$ はそれぞれ相対温度と物質の物理的状態の時間的空間的変化を表す分布関数とされる.

よく知られるように, 固体・液体相転移はある特定の温度を境に物質の状態がドラマチックに変化する現象である. このような温度は「相転移温度」と呼ばれるが, 上記の数学モデル $(P)_f$ では, 温度 θ は相転移が起こる温度 (相転移温度) がちょうど 0 となる様スケール調整されている. また, 未知変数 w の方は相関数と呼ばれ, w の値によって各 $(x, t) \in \Omega \times (0, +\infty)$ における物質の状態は以下の規則に従って判断される:

$$(w1) \quad -1 \leq w(x, t) \leq 1;$$

$$(w2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet w(x, t) = 1 \text{ ならば物質の状態は液体,} \\ \bullet w(x, t) = -1 \text{ ならば物質の状態は固体,} \\ \bullet -1 < w(x, t) < 1 \text{ ならば固体と液体の境目 (界面) もしくはみぞれのような混合状態.} \end{array} \right.$$

式 (1.1) 中の発展方程式は、熱交換のプロセスを近似する運動方程式であり、ここに $0 < \mu < 1$ は与えられた正の定数、 $\theta_* \in \mathbb{R}$ は定数による境界熱源である。式 (1.1) の導出では、熱流はいわゆる Fourier の法則に時間平滑化の効果 μu_t を付加する事によって与えられる。しかしながら、実のところこの平滑化の項は数学的な要請から追加された人工的な項であるため、ここでは近似の指数 μ の値は十分に小さいと仮定する。

式 (1.2) 中の発展方程式は相変化に関する支配方程式であり、こちらは「自由エネルギー」と呼ばれるエネルギー汎関数の勾配流として導かれる。このような方程式は総称して「Allen-Cahn 方程式」と呼ばれるが、今回扱う数学モデルの場合、対応する自由エネルギーは以下の様に与えられる:

$$w \in L^2(\Omega) \mapsto \kappa V_f(w) + \int_{\Omega} \left\{ I_{[-1,1]}(w) - \frac{1}{2}|w + \theta|^2 \right\} dx; \quad (1.3)$$

ここに $0 < \kappa < 1$ は (十分小さな正定数)、 $I_{[-1,1]}$ は閉区間 $[-1, 1]$ 上の指示関数、 V_f は「異方的全変動 (anisotropic total variation)」として知られる $L^1(\Omega)$ 上の凸関数 Var_f :

$$z \in L^1(\Omega) \mapsto \text{Var}_f(z) := \inf \left\{ \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f^\circ(\nabla \varphi_i) dx \left| \begin{array}{l} \{\varphi_i\} \subset C^1(\Omega), \\ \varphi_i \rightarrow z \text{ in } L^1(\Omega) \\ \text{as } i \rightarrow +\infty \end{array} \right. \right\}; \quad (1.4)$$

の $L^2(\Omega)$ 上への制限 ($V_f := \text{Var}_f|_{L^2(\Omega)}$) である。またこのとき、式 (1.2) 中の $\partial \Phi_f$ は、以下の $L^2(\Omega)$ 上の凸関数 Φ_f :

$$w \in L^2(\Omega) \mapsto \Phi_f(w) := V_f(w) + \int_{\Omega} I_{[-1,1]}(w) dx; \quad (1.5)$$

の $L^2(\Omega)$ の位相での劣微分作用素を表す。上記の凸関数 Φ_f は、本質的には式 (1.3) で与えられる自由エネルギーの凸部分に対応する。

式 (1.3) において、指示関数 $I_{[-1,1]}$ は自由エネルギーの定義域を (w1)-(w2) の設定と符合させるために組み入れられたものであるが、他でもこの項は相転移における物質の状態の双安定性を以下の 2 重井戸型関数:

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto I_{[-1,1]}(\omega) - \frac{1}{2}\omega^2 - \theta\omega;$$

によって再現する役割も担っている。

対して、凸関数 V_f の方は「界面エネルギー (interfacial energy)」と呼ばれ、その名が示すとおり、こちらは固体・液体間の界面形成を特徴づける働きを持つ。界面エネルギー V_f は、Visintin [27, Chapter VI] によって提案された全変動汎関数によるエネルギーの一般的な数式表現となっている。特に、 f° は固体または液体の塊 (mass) の構造単位が持つ異方性の双対形式と対応しており、数学モデル $(P)_f$ ではこのような構造単位の幾何学的特性はノルム f の単位開球:

$$\mathcal{W}_f := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 \mid f(\xi) < 1 \right\}; \quad (1.6)$$

によって特徴付けされる. 上記の単位開球 (またはその閉包) は一般的に Wulff 図形 (Wulff shape) と呼ばれる.

ノルム f の設定として最も単純なのは, f を通常の Euclid ノルム, 即ち:

$$f(\xi) := |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \text{ for all } \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2; \quad (1.7)$$

とする設定である.

この場合の Wulff 図形 $\mathcal{W}_f$ は通常の単位開円板となり, 凸関数 V_f はいわゆる全変動汎関数 (cf. [1, Section 5.5]) となるため, 式 (1.2) 中の Allen-Cahn 方程式は一つの全変動流を成す.

式 (1.7) の設定でのシステム $(P)_f$ に対する安定性解析に関しては既に先行の報告例があり, 考察中の力学系において安定性を持つ形状として, 例えば円を基本単位とするある種の滑らかな Jordan 曲線が報告されている (cf. [20, 22, 26]). しかしこの事実は, 不安定な界面の形状にはどこか滑らかさが欠如している事を意味するため, 式 (1.7) の設定では結晶構造によく見られる角ばった形状などは再現されにくい事が予想される.

これを受け, ここではノルム f の表現として, クリスタラインタイプとして知られる以下の設定を採用する:

$$f(\xi) := \max_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k \cdot \xi = \max_{0 \leq k < 2m} \nu_k \cdot \xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (1.8)$$

ここに, $m \geq 2$ は与えられた自然数,

$$\nu_k := \left(\cos \frac{k\pi}{m}, \sin \frac{k\pi}{m} \right) \in \mathbb{S}^1, \quad \forall k \in \mathbb{Z};$$

である. 式 (1.8) のタイプの設定は, 物質の異方性の数式表現として, Bellettini-Caselles-Chambolle-Novaga [7], Caselles-Chambolle-Moll-Novaga [9], Giga-Rybka [11], Ishiwata [13], Moll [17], Novaga-Paolini [18] などに取り入れられ, 研究されて来た設定である. この設定での Wulff 図形は 原点中心の正 $2m$ 角形となるため, 特に $m = 3$ のケース (正 6 角形) などは, 氷の結晶などの再現への有用性を期待する事が出来る.

以下に, 本論文の概要を記す. 本論文の内容は大きく前半部と後半部の 2 つのパートに分けられる.

前半部は 2 つの節 (第 2 節と第 3 節) から成り, ここではシステム $(P)_f$ の基本性質を調べる事によって, 以下 (a)-(b) について確認する:

- (a) (温度の漸近挙動) $\theta(t) \rightarrow \theta_*$ ($\bar{\Omega}$ 上一様) as $t \rightarrow +\infty$;
- (b) (相変化の漸近挙動) $t \rightarrow +\infty$ としたときの, 軌道 $\{w(t) | t \geq 0\} \subset L^2(\Omega)$ の集積点 w_* (ω -limit point) のすべては, 以下の劣微分作用素方程式:

$$\kappa \partial \Phi_f(w_*) \ni w_* + \theta_* \text{ in } L^2(\Omega); \quad (1.9)$$

またはこれと同値な変分不等式:

$$\kappa \Phi_f(w_*) - \int_{\Omega} (w_* + \theta_*) w_* dx \leq \kappa \Phi_f(z) - \int_{\Omega} (w_* + \theta_*) z dx, \quad \forall z \in L^2(\Omega); \quad (1.10)$$

の解となる.

上記 (a)-(b) は, システム $(P)_f$ が生成する力学系における停留点 (stationary point) のすべてが, 方程式 (1.9) を満足する $\theta_* \in \mathbb{R}$ と $w_* \in L^2(\Omega)$ の組 $[\theta_*, w_*]$ によって表わされる事を意味する. この点を踏まえ, 本論文では劣微分作用素方程式 (1.9), またはそれと同値な変分不等式 (1.10) を, システム $(P)_f$ の定常問題と呼ぶ.

それに対し, 後半部は2つの節 (第4節と第5節) から成り, このパートでは主定理の提示とその証明を行う. 主定理のテーマは停留点 $[\theta_*, w_*]$ に対する安定性解析であるが, 上記の (a)-(b) から, そのためには定常問題 (1.9) が再現する界面の幾何学的パターン (定常パターン) を詳しく知る必要がある. これを受け, 第4節では, 本研究と関連の深い研究報告 [24] を紹介する. 実際, 論文 [24] では, 温度が既知という設定での単独の Allen-Cahn 方程式 (1.2) が扱われており, その結論部では Wulff 図形 (正 $2m$ 角形) を基本単位とした区分的滑らかな Jordan 曲線が, 安定性を持つ界面の幾何学的特徴として報告されている.

上記の先行の研究成果 [20, 22, 24, 26] を基に, 本論文の主定理はこれらの結果をより一般的な枠組みへ拡張したものとして提示される. 結論として, 論文 [24] で報告された温度が既知という設定で安定性を持つ界面形状は, 温度と相変化が相互作用するような力学系においても同様の安定性を持つ事が示される.

記法 1.1 以下に, 本論文を通して用いる基本的な記法を記す.

一般の Banach 空間 X において, X のノルムを $|\cdot|_X$ と表す. 特に, X が Hilbert 空間である場合, X の内積を $(\cdot, \cdot)_X$ と表す.

Hilbert 空間 H 上の適正下半連続凸関数 Φ に対し, Φ の有効領域を $D(\Phi)$, 劣微分作用素を $\partial\Phi$ と表す. よく知られるように, 適正下半連続凸関数 Φ の劣微分 $\partial\Phi$ は, Φ の弱い意味での微分 (勾配) に対応し, こちらは $H \times H$ 内で極大単調なグラフを持つ. 劣微分 $\partial\Phi$ は, 一般に多価作用素として定義され, 各 $v_0 \in H$ に対する劣微分の値 $\partial\Phi(v_0)$ は以下の変分不等式を満たすような劣勾配 $v_0^* \in H$ 全体の集合として定められる:

$$(v_0^*, v - v_0)_H \leq \Phi(v) - \Phi(v_0), \quad \forall v \in D(\Phi).$$

このとき, 集合 $D(\partial\Phi) := \{z \in H \mid \partial\Phi(z) \neq \emptyset\}$ は劣微分 $\partial\Phi$ の定義域と呼ばれる. 更に, 劣微分作用素 $\partial\Phi$ はしばしばそのグラフと同一視され, それゆえ以下2つの記述:

$$“v_0^* \in \partial\Phi(v_0) \text{ in } H \text{ for } v_0 \in D(\partial\Phi)” \text{ および } “[v_0^*, v_0] \in \partial\Phi \text{ in } H \times H”;$$

は, どちらも同じ意味で用いられる.

2 基本的事項の準備

本論文を通し, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな境界 $\partial\Omega := \Gamma$ を持つ2次元有界領域とする. また簡単のため, $Q := (0, +\infty) \times \Omega$ とおく.

$\mathcal{B}(\Omega)$ を Ω 内の Borel 集合全体のクラスとし, 任意の $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対し, B 上の特性関数を χ_B と表す.

各次元 $d \in \mathbb{N}$ において, d 次元 Lebesgue 測度および d 次元 Hausdorff 測度をそれぞれ $\mathcal{L}^d$ および $\mathcal{H}^d$ と表す. また, 以後特に断りのないときは, 測度といえば考察中の次元における Lebesgue 測度を指す事にする.

任意の開集合 $D \subset \Omega$ に対し, $D^{\text{ex}} := \Omega \setminus \overline{D}$ と定める. また特に, D の境界 ∂D が Lipschitz 連続であるとき, 境界 ∂D 上の外向き単位法線ベクトルを $n_{\partial D}$ と表す.

本節では, はじめに Ω 上の有界変動関数全体の空間 $BV(\Omega)$ を取り上げ, この空間に関する基本的事項を述べる. 空間 $BV(\Omega)$ は界面エネルギー V_f の有効領域と直接的に関係する.

関数 $z \in L^1(\Omega)$ の超関数の意味での勾配 (gradient) Dz がひとつのベクトル値の Radon 測度を成すとき, z は有界変動関数 (または BV-関数) と呼ばれる. このとき, Dz の全変動測度 (total variation measure) $|Dz|$ はひとつのスカラー値の Radon 測度を成し, その値に関しては以下の等式が成立する:

$$|Dz|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} z \operatorname{div} \varphi \, dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ and } |\varphi| \leq 1 \text{ on } \Omega \right\} < +\infty.$$

通常, BV-関数全体の空間は $BV(\Omega)$ と表されるが, この関数空間は以下のノルムを導入する事によって Banach 空間となる事が知られる:

$$\|z\|_{BV(\Omega)} := \|z\|_{L^1(\Omega)} + |Dz|(\Omega), \quad \forall z \in BV(\Omega).$$

また, 本研究では定義域 Ω は 2 次元有界領域と設定されているので, 空間 $BV(\Omega)$ は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ に連続的に埋め込まれ, また Banach 空間 $L^1(\Omega)$ にコンパクトに埋め込まれる (cf. [1, Chapter 3], [10, Chapter 5] or [12, Chapter 1]). 更に, 任意の $z \in BV(\Omega)$ に対し, Radon 測度 Dz は Lebesgue 測度 $\mathcal{L}^2$ と絶対連続な部分 Dz^a (absolutely continuous part) と, そうでない部分 Dz^s (singular part) によって, 以下のように分解する事が出来る (cf. [1, Chapter 3]):

$$Dz = Dz^a + Dz^s, \quad Dz = \frac{Dz}{|Dz|} |Dz|, \quad Dz^a = \nabla z \mathcal{L}^2 \text{ and } Dz^s = \frac{Dz^s}{|Dz^s|} |Dz^s|.$$

ここに, $|Dz^s|$ は測度 Dz^s の全変動測度を表し, $\frac{Dz}{|Dz|}$, ∇z , および $\frac{Dz^s}{|Dz^s|}$ は, それぞれ Dz の $|Dz|$ に対する密度関数, Dz^a の $\mathcal{L}^2$ に対する密度関数, および Dz^s の $|Dz^s|$ に対する密度関数を表す. 特に, 密度関数 ∇z は, [1, Definition 3.70 and Theorem 3.83] において導入されている z の近似微分 (approximate differential) と Ω 内の殆どいたる所で一致する.

f を $\mathbb{R}^2$ 上での一般ノルムとする. このとき, 上記をはじめとする BV-関数の一般論を基にすると, 式 (1.4) で与えられた異方的全変動 Var_f に関し, 以下 (V1)-(V3) が成り立つ事を確認出来る (cf. [1, Section 5.5]).

- (V1) 汎関数 $z \in L^1(\Omega) \mapsto \operatorname{Var}_f(z)$ は, $L^1(\Omega)$ 上の適正下半連続凸関数を成し, その有効領域は空間 $BV(\Omega)$ と一致する. 従って, Var_f の $L^2(\Omega)$ への制限として定義される界面エネルギー V_f は空間 $L^2(\Omega)$ 上の適正下半連続凸関数となり, その有効領域 $D(V_f)$ は空間 $BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ と一致する.

(V2) 任意の $z \in BV(\Omega)$ に対し, スカラー値の Radon 速度 $f^\circ(Dz)$ が一意的に存在し, 以下 (i)-(iii) が成立する:

(i) $f^\circ(Dz)$ は全変動測度 $|Dz|$ に対して絶対連続;

(ii) $\text{Var}_f(z) = \int_\Omega f^\circ(Dz) = \sup \left\{ \int_\Omega z \operatorname{div} \varphi \, dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^2) \text{ and } f(\varphi) \leq 1 \text{ on } \Omega \right\};$

(ii) $\int_B f^\circ(Dz) = \int_B f^\circ(\nabla z) \, dx + \int_B f^\circ\left(\frac{Dz^s}{|Dz^s|}\right) |Dz^s|, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega).$

(V3) (滑らかな関数による近似) 任意の $1 \leq p < +\infty$ に対し, 関数 $z \in BV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ を以下の意味で近似する滑らかな関数の列 $\{\zeta_i\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ が存在する:

$$\zeta_i \rightarrow z \text{ in } L^p(\Omega) \text{ and } \text{Var}_f(\zeta_i) \rightarrow \text{Var}_f(z) \text{ as } i \rightarrow +\infty.$$

任意の $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対し, 特性関数 χ_B に対する異方的全変動 $\text{Var}_f(\chi_B)$ の値は異方的ペリメータ (anisotropic perimeter) と呼ばれ, 本論文ではこれを $\text{Per}_f(B)$ と表す. 特に Borel 集合 $D \in \mathcal{B}(\Omega)$ が Lipschitz 連続な境界 ∂D を持つ開集合である場合:

$$\text{Per}_f(D) = \int_{\partial D \cap \Omega} f^\circ\left(\frac{D\chi_D}{|D\chi_D|}\right) d\mathcal{H}^1 \text{ and } \frac{D\chi_D}{|D\chi_D|} = -n_{\partial D}, \quad \mathcal{H}^1\text{-a.e. on } \partial D \cap \Omega; \quad (2.1)$$

となり, 従って:

$$f\left(\frac{D\chi_D}{|D\chi_D|}\right) = f(n_{\partial D}) \text{ and } f^\circ\left(\frac{D\chi_D}{|D\chi_D|}\right) = f^\circ(n_{\partial D}); \quad (2.2)$$

となる.

ペリメータの概念を用いると, 「余面積公式 (coarea formula)」として知られる, 以下の異方的全変動 Var_f に対する計算公式を導く事が出来る (cf. [2]).

(V4) (余面積公式) 任意の $z \in BV(\Omega)$ に対し, 以下の関係式が成立する:

$$\text{Var}_f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Per}_f(z^{-1}(\tau, +\infty)) \, d\tau. \quad (2.3)$$

特に, $z \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ であるときは, 式 (2.1)-(2.2) および Morse-Sard の定理 (cf. [19]) を援用する事により, 計算公式 (2.3) を以下のような累次積分の形式へ変形する事が出来る:

$$\text{Var}_f(z) = \int_\Omega f^\circ(\nabla z) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{z^{-1}(\tau)} f^\circ(n_{\partial z^{-1}(\tau, +\infty)}) \, d\mathcal{H}^1 \right) d\tau. \quad (2.4)$$

上記に加え, 論文 [3, 4, 5] および論文 [15] で構築された数学理論を合わせると, 界面エネルギー V_f と自由エネルギーの凸部分 Φ_f に関して以下の基本性質を示す事が出来る.

(V5) (cf. [3, Lemmas 1-4], [4, Lemma 1], [5, Chapters 2-5]) $[z^*, z] \in \partial V_f$ in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ となる必要十分条件は、以下 (i)-(iii) をすべて満足するベクトル関数 $\nu^* \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$ が存在する事である:

- (i) $|f(\nu^*)|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, and $\operatorname{div} \nu^* \in L^2(\Omega)$;
- (ii) $z^* = -\operatorname{div} \nu^*$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$;
- (iii) $\int_{\Omega} z^* \varphi \, dx = \int_{\Omega} \nu^* \cdot \nabla \varphi \, dx$, $\forall \varphi \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, and $V_f(z) = \int_{\Omega} z^* z \, dx$.

(V6) 式 (1.5) で与えられる凸関数 Φ_f に関し、以下 (i)-(iv) が成立する:

- (i) $D(\Phi_f) = \{ z \in BV(\Omega) \mid |z| \leq 1, \text{ a.e. in } \Omega \}$;
- (ii) 任意の $r > 0$ に対する Φ_f のレベル集合 $L_{\Phi_f}(r) := \{ z \in L^2(\Omega) \mid \Phi_f(z) \leq r \}$ は、空間 $L^2(\Omega)$ 内でコンパクト集合を成す;
- (iii) $(z_1^* - z_2^*, (z_1 - z_2)^+)_{L^2(\Omega)} \geq 0$, $\forall [z_k^*, z_k] \in \partial \Phi_f$ in $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ($k = 1, 2$);
- (iv) $D(\partial \Phi_f) = D(\partial V_f) \cap D(\Phi_f)$ and $\partial \Phi_f(z) = \partial V_f(z) + \partial I_{[-1,1]}(z)$ in $L^2(\Omega)$, $\forall z \in D(\partial \Phi_f)$.

本節では最後に、関数 $\bar{\theta} \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ を固定し、以下の発展方程式を考える:

$$(E; \bar{\theta})_f \quad u_t(t) + \kappa \partial \Phi_f(u(t)) \ni u(t) + \bar{\theta}(t) \text{ in } L^2(\Omega), \quad t > 0.$$

任意の関数 $\bar{\theta} \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ に対し、以下の条件:

$$u \in W^{1,2}_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega)), \quad \Phi_f(u) \in L^1_{\text{loc}}[0, +\infty),$$

$$\exists u^* \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega)), \text{ s.t. } u^*(t) \in \partial \Phi_f(u(t)), \text{ and}$$

$$u_t(t) + \kappa u^*(t) = u(t) + \bar{\theta}(t) \text{ in } L^2(\Omega), \text{ a.e. } t > 0.$$

をすべて満たす関数 $u : [0, +\infty) \rightarrow L^2(\Omega)$ は、発展方程式 $(E; \bar{\theta})_f$ の解と呼ばれる。

各 $\bar{\theta} \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ に対し、発展方程式 $(E; \bar{\theta})_f$ は、式 (1.3) において $\theta = \bar{\theta}$ (in Q) とした場合の自由エネルギーに対する勾配流となっている。言い方を変えれば、各 $(E; \bar{\theta})_f$ ($\bar{\theta} \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega))$) はひとつの Allen-Cahn 方程式、即ち温度を既知とした場合の相変化の支配方程式にもなっている。

$(E; \bar{\theta})_f$ と同種の発展方程式に関しては、近年様々な研究者によって多彩な角度から研究されており、文献 [6, 8, 14] に代表されるような多くの一般論が構築されている。従って、こうした一般論を適宜引用すれば、以下の命題に述べられるような発展方程式 $(E; \bar{\theta})_f$ に関する基本性質について、容易に確認する事が出来る。

命題 2.1 $((E; \bar{\theta})_f$ の基本性質)

(I) (cf. [8, Chapter III]) 任意の関数 $\bar{\theta} \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ と任意の初期値 $u_0 \in D(\Phi_f)$ を与えるごとに, 発展方程式 $(E; \bar{\theta})_f$ に対する初期値問題には一意的に解が存在する. またこのとき, 関数 $t \in [0, +\infty) \mapsto \Phi_f(u(t))$ は任意のコンパクトな時間区間上で絶対連続となる.

(II) (cf. [14, Theorem 9.1]) 定数 $\theta_* \in \mathbb{R}$ を固定し, 以下を仮定する:

$$\bar{\theta} - \theta_* \in L^2(0, +\infty; L^2(\Omega)) \text{ and } \bar{\theta}(t) \rightarrow \theta_* \text{ in } L^2(\Omega) \text{ as } t \rightarrow +\infty.$$

このとき, 発展方程式 $(E; \bar{\theta})_f$ の解 u に対し, $u(t)$ の $t \rightarrow +\infty$ としたときの ω -極限集合 (ω -limit set):

$$\omega(u; \bar{\theta}) := \left\{ w_* \in L^2(\Omega) \mid \exists \{t_i\} \subset (0, +\infty) \text{ s.t. } t_i \nearrow +\infty \text{ and } u(t_i) \rightarrow w_* \text{ in } L^2(\Omega) \text{ as } i \rightarrow +\infty \right\}; \quad (2.5)$$

は, 空間 $L^2(\Omega)$ 内で空でない連結コンパクト集合を成す. 更に, 各 $w_* \in \omega(u; \bar{\theta})$ は ω -極限点 (ω -limit point) と呼ばれ, そのいずれもが導入で登場した劣微分作用素方程式 (1.9) の解となる.

(III) (比較性原理) 2つの関数 $\bar{\theta}_k \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ ($k = 1, 2$) を任意に取り, u_1 と u_2 をそれぞれ発展方程式 $(E; \bar{\theta}_1)_f$ と $(E; \bar{\theta}_2)_f$ の解とすると, 以下が成立する:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 \leq \bar{\theta}_2 \text{ a.e. in } Q, \text{ and } u_1(0) \leq u_2(0) \text{ a.e. in } \Omega \\ \implies u_1(t) \leq u_2(t) \text{ a.e. in } \Omega, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

(IV) (解の表現) 関数 $\bar{\theta} \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ を固定する. このとき, $u \in C([0, +\infty); L^2(\Omega))$ が発展方程式 $(E; \bar{\theta})_f$ の解となる必要十分条件は, 以下 (i)-(iii) をすべて満たすようなベクトル関数 $\nu_u^* \in L^\infty(Q; \mathbb{R}^2)$ が存在する事である:

$$(i) \quad |f(\nu_u^*)|_{L^\infty(Q)} \leq 1, \text{ and } \operatorname{div} \nu_u^* \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega));$$

$$(ii) \quad -\kappa \operatorname{div} \nu_u^* = \begin{cases} \leq u + \bar{\theta} - u_t, & \text{if } u = 1, \\ = u + \bar{\theta} - u_t, & \text{if } -1 < u < 1, \\ \geq u + \bar{\theta} - u_t, & \text{if } u = -1, \end{cases} \text{ a.e. in } Q;$$

$$(iii) \quad - \int_{\Omega} \operatorname{div} \nu_u^*(t) \varphi \, dx = \int_{\Omega} \nu_u^*(t) \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \text{ a.e. } t > 0,$$

$$\text{and } \Phi_f(u(t)) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \nu_u^*(t) u(t) \, dx.$$

証明の概略. この命題中の4つの主張 (I)-(IV) は, そのいずれも既存の一般論を引用する事によって証明する事が出来る.

実際, 主張 (I) については Brézis の一般論 (cf. [8]) を直接適用する事が可能である. また, 主張 (II) と主張 (III) についても, 証明の手法は, それぞれ [14, Theorem 9.1] と [26, Proposition 2.2] におけるそれらと本質的に同じものになる. 最後に, 主張 (IV) は (V5) および (V6) (iv) の両方を援用する事によって示す事が出来る. ■

3 システム $(P)_f$ の基本性質

本節では, f を一般の 2 次元ノルムとし, システム $(P)_f$ に対する解の存在・一意性・有界性・漸近挙動などの基本性質について議論する.

簡単のため, Sobolev 空間 $H_0^1(\Omega)$ を X_0 と表す. よく知られるように, 空間 X_0 は内積:

$$(z_1, z_2)_{X_0} := \int_{\Omega} \nabla z_1 \cdot \nabla z_2 \, dx, \quad \forall z_i \in X_0 \ (i = 1, 2);$$

を導入する事によってひとつの Hilbert 空間を成す. また, 空間 X_0 は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ ヘコンパクトに埋め込まれる. よって, ある定数 $C_P > 0$ が存在し, 以下の不等式が成立する:

$$|z|_{L^2(\Omega)} \leq C_P |z|_{X_0}, \quad \forall z \in X_0.$$

この不等式は Poincaré の不等式として知られる. 加えて, 本論文では Ω を滑らかな境界を持つ 2 次元有界領域としているので, Sobolev 空間 $H^2(\Omega)$ は Banach 空間 $C(\bar{\Omega})$ ヘ連続的に埋め込まれ, 従って上記とは別の定数 $\bar{C} > 0$ が存在して以下の不等式が成立する:

$$|z|_{C(\bar{\Omega})} \leq \bar{C} |z|_{X_0}^{1/2} |z|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \leq \bar{C} |z|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall z \in X_0 \cap H^2(\Omega). \quad (3.1)$$

上記 (3.1) は補間不等式として知られる不等式の一例である.

$\Delta_0 : D(\Delta_0) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ を以下で定義される作用素とする:

$$D(\Delta_0) := H^2(\Omega) \cap X_0 \text{ and } \Delta_0 z := \Delta z, \quad \forall z \in D(\Delta_0).$$

このとき, よく知られるように (cf. [6, 16]), 作用素 $-\Delta_0$ は自己共役性:

$$(-\Delta_0 z_1, z_2)_{L^2(\Omega)} = (z_1, -\Delta_0 z_2)_{L^2(\Omega)} = (z_1, z_2)_{X_0}, \quad \forall z_i \in D(\Delta_0) \ (i = 1, 2);$$

を伴う, $D(\Delta_0)$ から $L^2(\Omega)$ ヘの一価の極大単調作用素となる. また, 任意の $h \in L^2(\Omega)$ に対し, Poisson 方程式 $-\Delta_0 v = h$ in $L^2(\Omega)$ には解 $v \in H^2(\Omega)$ が一意的に存在し, 更に以下の不等式を満たすような定数 $C_0 > 0$ が存在する:

$$|v|_{H^2(\Omega)} \leq C_0 |\Delta_0 v|_{L^2(\Omega)} = C_0 |h|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.2)$$

上記の記法に基づき, システム $(P)_f$ の解は以下のように定義される.

定義 3.1 (解の定義) $\theta_* \in \mathbb{R}$ を任意の定数 (境界熱源) とする. このとき, 関数の組 $[\theta, w]$ が以下 3 つの条件を満足するとき, この組をシステム $(P)_f$ の解と呼ぶ:

(s1) $\theta \in W_{\text{loc}}^{1,2}([0, +\infty); H^2(\Omega))$, $w \in W_{\text{loc}}^{1,2}([0, +\infty); L^2(\Omega))$, $\Phi_f(w) \in L_{\text{loc}}^1[0, +\infty)$,
 $\theta_0 - \theta_* \in D(\Delta_0)$ and $w_0 \in D(\Phi_f)$;

(s2) $\theta(t) - \theta_* \in D(\Delta_0)$, $\theta_t(t) \in D(\Delta_0)$, and

$$(\theta + w)_t(t) - \Delta_0[(\theta(t) - \theta_*) + \mu\theta_t(t)] = 0 \text{ in } L^2(\Omega), \text{ a.e. } t > 0; \quad (3.3)$$

(s3) w は, $\bar{\theta} = \theta$ とした場合の Allen-Cahn 方程式 $(E; \theta)_f$ の解となる. 即ち:
 $\exists w^* \in L_{\text{loc}}^2([0, +\infty); L^2(\Omega))$, s.t.

$$w^*(t) \in \partial\Phi_f(w(t)) \text{ and } w_t(t) + \kappa w^*(t) = w(t) + \theta(t) \text{ in } L^2(\Omega), \text{ a.e. } t > 0. \quad (3.4)$$

はじめに 以下の命題において, システム $(P)_f$ の可解性について確認する.

命題 3.1 (可解性) システム $(P)_f$ には解 $[\theta, w]$ が一意的に存在する.

証明の概略. 命題 3.1 の証明に関しては論文 [21] (または論文 [23]) を参照するにとどめ, ここではその詳細を省略する. 実際, 証明の道筋は [21, Theorem 2.1] におけるそれと本質的に同じものである. ■

次に, 任意の定数 $\theta_* \in \mathbb{R}$ に対し, 空間 $L^2(\Omega)$ 上の汎関数 $\mathcal{F}_{\theta_*}$ を以下で定義する:

$$\mathcal{F}_{\theta_*}(z) := \kappa \Phi_f(z) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z + \theta_*|^2 dx, \quad \forall z \in L^2(\Omega). \quad (3.5)$$

この汎関数 $\mathcal{F}_{\theta_*}$ は, 式 (1.3) において $\theta \equiv \theta_*$ (in Q) とした場合の自由エネルギーである. この汎関数を用いると, システム $(P)_f$ の時間大域的評価に関する以下の命題を得る事が出来る.

命題 3.2 (解の時間大域的評価) $\theta_* \in \mathbb{R}$ を任意の定数 (境界熱源), $[\theta_0, w_0] \in D_0 \times D(\Phi_f)$ を任意の初期データとし, $[\theta, w]$ をシステム $(P)_f$ の任意の解とする. このとき, 以下2つの主張が成立する.

(I) (エネルギー消散の不等式) エネルギー関数:

$$J(t) := \frac{1}{2} |\theta(t) - \theta_*|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2} |\theta(t) - \theta_*|_{X_0}^2 + \mathcal{F}_{\theta_*}(w(t)), \quad \forall t \geq 0;$$

は, $[0, +\infty)$ 上での非増加関数となる, 即ち:

$$J(t) \leq J(\tilde{t}) \quad 0 \leq \forall \tilde{t} \leq \forall t < +\infty.$$

(II) (温度 θ の H^2 -評価) $\exists C_* > 0$ s.t.:

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} |\theta(t) - \theta_*|_{H^2(\Omega)}^2 + \int_0^{+\infty} |\theta(t) - \theta_*|_{H^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^{+\infty} |w_t(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ \leq C_* \left(1 + |\theta_*|^2 + |\theta_0 - \theta_*|_{H^2(\Omega)}^2 + \Phi_f(w_0) \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

証明の概略. 主張 (I) は, 式 (3.3) と式 (3.4) の両辺にそれぞれ $(\theta(t) - \theta_*)$ と $w_t(t)$ をかけ, 得られた2つの等式を辺々足し算して得られる等式:

$$\frac{d}{dt} J(t) + |\theta(t) - \theta_*|_{X_0}^2 + |w_t(t)|_{L^2(\Omega)}^2 = 0, \quad \text{a.e. } t > 0; \quad (3.7)$$

から直接的に得られる. 主張 (II) を証明する際には, 先ず任意の $t > 0$ を取り, 式 (3.7) の両辺を区間 $[0, t]$ で積分する. ここで, $t \nearrow +\infty$ とすると, 以下の不等式が得られる:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} |\theta(t) - \theta_*|_{X_0}^2 dt + \int_0^{+\infty} |w_t(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ & \leq \frac{1}{2} |\theta_0 - \theta_*|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2} |\theta_0 - \theta_*|_{X_0}^2 + \kappa \Phi_f(w_0) + (1 + |\theta_*|^2) \mathcal{L}^2(\Omega). \end{aligned} \quad (3.8)$$

次に, 式 (3.3) の両辺に $(-\Delta_0)(\theta(t) - \theta_*)$ を掛け算すると:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(|\theta(t) - \theta_*|_{X_0}^2 + \mu |\Delta_0(\theta(t) - \theta_*)|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + |\Delta_0(\theta(t) - \theta_*)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq |w_t(t)|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \text{a.e. } t > 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

主張 (II) 中の定数 C_* は式 (3.9) の両辺を時間に関して積分して, (3.2) と (3.8) を援用する事によって見つける事が出来る. ■

更に, (V6) (ii) で述べたレベル集合のコンパクト性から, 解の漸近挙動に関する以下の命題を得る事も出来る.

命題 3.3 (解の漸近挙動) システム $(P)_f$ の解 $[\theta, w]$ に関し, 以下 (A)-(B) が成立する.

- (A) (温度 θ の収束) $\theta(t) \rightarrow \theta_*$ in $H^2(\Omega)$ as $t \rightarrow +\infty$. 従って (3.1) から, $t \rightarrow +\infty$ とするときの温度分布 $\theta(t)$ は, 定数値の分布 θ_* に $\bar{\Omega}$ 上一様収束する.
- (B) (相関数 w の ω -極限集合) $\omega(w; \theta)$ を, 式 (2.5) において $u = w, \bar{\theta} = \theta$ とした場合の ω -極限集合とする. このとき, $\omega(w; \theta)$ は空間 $L^2(\Omega)$ 内の空でない連結コンパクト集合を成す. 更に, 任意の $w_* \in \omega(w; \theta)$ は定常問題 (1.9) の解となる.

証明の概略. 主張 (A) は [21, Section 5] と全く同様の手法で証明する事が出来る. また, 主張 (B) は主張 (A) と命題 2.1 (II) から直ちに導かれる. ■

上記の命題を踏まえ, 以後 定数の平衡温度 θ_* と定常問題 (1.9) の解 w_* による組 $[\theta_*, w_*]$ を, システム $(P)_f$ の定常解と呼ぶ.

4 主定理の概要

本節以降, 2次元ノルム f をクリスタラインタイプの設定 (1.8) の下で考え, また任意の $r > 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対し, 開集合 $(x + r\mathcal{W}_f) \cap \Omega$ を $W_f(x; r)$ と表す. ここに $\mathcal{W}_f$ は式 (1.6) で与えられるノルム f に対する Wulff 図形である. 式 (1.8) による設定下では, f の双対ノルム:

$$f^\circ(\xi^\circ) := \sup \left\{ \xi^\circ \cdot \xi \mid \xi \in \mathbb{R}^2 \text{ s.t. } f(\xi) \leq 1 \right\}, \quad \forall \xi^\circ \in \mathbb{R}^2;$$

は単位ベクトル:

$$\nu_k^\circ := \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2m}, \sin \frac{(2k+1)\pi}{2m} \right) \in \mathbb{S}^1, \quad \forall k \in \mathbb{Z};$$

を用いて具体的に以下のように表わす事が出来る:

$$f^\circ(\xi^\circ) := \left(\sec \frac{\pi}{2m} \right) \max_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k^\circ \cdot \xi^\circ, \quad \forall \xi^\circ \in \mathbb{R}^2. \quad (4.1)$$

ここで, (1.8) と (4.1) とを合わせると, 更に以下の事項が確認出来る:

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2m} = f(\nu_k^\circ) \leq f(\nu) \leq f(\nu_k) = 1, \\ 1 = f^\circ(\nu_k) \leq f^\circ(\nu) \leq f^\circ(\nu_k^\circ) = \sec \frac{\pi}{2m}, \end{cases} \quad \forall \nu \in \mathbb{S}^1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4.2)$$

主定理のテーマは, システム $(P)_f$ の定常解に対する安定性解析である. こうした安定性解析には定常問題 (1.9) の解に関する詳細な考察が不可欠であるが, その際には (1.9) の非自明解 (定数でない解) によって再現される界面の幾何学的パターン (定常パターン) が自然と考察の焦点となる.

しかしながら $|\theta_*| \geq 1$ である場合には, 定常問題 (1.9) は定数解しか持たない事がわかっていて. 実際, 変分不等式 (1.10) から容易に確認出来る様に, $\theta_* > 1$ ($\theta_* < -1$) であるときは, 定常問題 (1.9) の解は定数関数 1 (-1) のみである. 同様に, $|\theta_*| = 1$ であるときも, 定常問題 (1.9) には2つの定数定常解 ± 1 しか存在しない. このような事情から以後, 定数 θ_* に関しては, 非自明解の考察が可能な $-1 < \theta_* < 1$ という設定のみを考える.

他方で, 命題 2.1 (II) から, 劣微分作用素方程式 (1.9) は, 熱源 (温度) $\bar{\theta} \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ の条件次第で, 単独の Allen-Cahn 方程式 $(E; \bar{\theta})_f$ に対する定常問題と位置づける事が可能である. この観点からすると論文 [24] は, 本研究の主定理を述べる上で大変関連性の深い参考文献である. 事実, 論文 [24] では温度 $\bar{\theta}$ が時間的空間的一様に定数 θ_* に近いという設定での単独の Allen-Cahn 方程式が扱われており, 主結果では定常問題 (1.9) が再現する定常パターンが力学系の中で安定性を持つための幾何学的条件が具体的に示されている.

参考文献 [24] では, 定常パターンの幾何学的特徴は以下で定義される Ω 内での開集合族を用いて特徴付けされる.

定義 4.1 任意の定数 $-1 < \theta_* < 1$ に対し, Ω 内の開集合族 $\mathcal{D}_*(\theta_*) \subset \mathcal{B}(\Omega)$ を:

$$\mathcal{D}_*(\theta_*) := \{\emptyset, \Omega\} \cup \mathcal{D}_0(\theta_*);$$

と定義する. ここに, $\mathcal{D}_0(\theta_*)$ は以下 (D1)-(D5) を満足する開集合全体の族である (Fig. 1 参照).

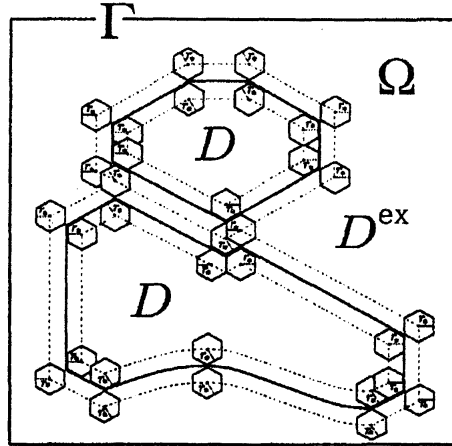


Fig. 1. 開集合 $D \in \mathcal{D}_0(\theta_*)$ の一例 ($m = 3$)

- (D1) $\Gamma_D := \partial D \cap \Omega$ は高々有限個の Jordan 曲線から成る.
- (D2) Γ_D は区分的 C^2 -級の構造を持つ. 即ち, ある自然数 $n_D \in \mathbb{N}$ と n_D 本の C^2 -曲線 Γ_k ($k = 1, \dots, n_D$) が存在し, $\Gamma_D = \bigcup_{k=1}^{n_D} \Gamma_k$ と表される. 以後, 各番号 $1 \leq k \leq n_D$ における C^2 -曲線 Γ_k を, 弧長パラメータによる有界閉区間 J_k 上の関数 $\gamma_k \in C^2(J_k; \mathbb{R}^2)$ のグラフと対応させるが, その際には一般性を失う事なく J_k の開核 J_k° (有界開区間) の像 $\Gamma_k^\circ := \gamma_k(J_k^\circ)$ ($k = 1, \dots, n_D$) は互いに素であると仮定出来る.
- (D3) 各番号 $1 \leq k \leq n_D$ に対し, 以下2つの状況のどちらかに対応する番号 $\ell_k \in \mathbb{Z}$ が必ず存在する:
- (i) $\gamma_k^\perp(s) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma_k'(s) = \nu_{\ell_k}, \quad \forall s \in J_k;$
 - (ii) $f(\gamma_k^\perp(s)) = \max \{ \nu_{\ell_k} \cdot \gamma_k^\perp(s), \nu_{\ell_k+1} \cdot \gamma_k^\perp(s) \} < 1, \quad \forall s \in J_k.$
- (D4) $\exists r_* > 2\kappa/(1 - |\theta_*|)$, s.t. $D = \bigcup_{\substack{x \in \Omega \\ W_f(x; r_*) \subset D}} W_f(x; r_*)$ and $D^{\text{ex}} = \bigcup_{\substack{x \in \Omega \\ W_f(x; r_*) \subset D^{\text{ex}}}} W_f(x; r_*)$.
- (D5) 任意の番号 $1 \leq k \leq n_D$ および任意の $0 \leq r \leq r_*$ に対し, Γ_D の近傍 $\Gamma_D(r)_f$ を以下で定義する:

$$\Gamma_D(r)_f := \begin{cases} \left\{ x \in \Omega \mid \inf_{y \in \Gamma_D} f(y-x) < r \right\}, & \text{if } \Gamma_D \neq \emptyset \text{ and } r > 0, \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき, 以下の条件をすべて満足する連結集合 $\Gamma_k(r)$ ($0 < r \leq r_*, k = 1, \dots, n_D$) が存在する:

- (i) $\Gamma_D(r)_f = \bigcup_{k=1}^{n_D} \Gamma_k(r);$
- (ii) 各 $0 < r \leq r_*$ に対し, $\Gamma_k(r)$ の開核 $\Gamma_k^\circ(r)$ ($k = 1, \dots, n_D$) は互いに素となる;
- (iii) $\Gamma_k = \bigcap_{0 < r \leq r_*} \Gamma_k(r)$ and $\Gamma_k^\circ = \bigcap_{0 < r \leq r_*} \Gamma_k^\circ(r), k = 1, \dots, n_D.$

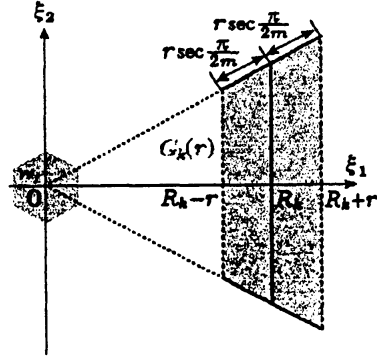


Fig. 2. (case 1) での $G_k(r)$
($m = 3$)

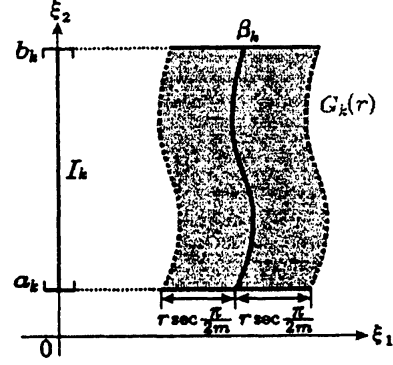


Fig. 3. (case 2) での $G_k(r)$
($m = 3$)

補足 4.1 条件 (D5) 中の連結集合 $\Gamma_k(r)$ ($0 < r \leq r_*$, $k = 1, \dots, n_D$) については, 特別な幾何学的特徴を持つように選ぶ事が可能である. 実際, 任意の番号 $1 \leq k \leq n_D$ において, 直交行列 Θ_k と平行移動から成るアフィン変換 Λ_k を適宜選べば, 変換先の像:

$$G_k := \Lambda_k \Gamma_k, \quad G_k(r) := \Lambda_k \Gamma_k(r) \quad (0 < r \leq r_*);$$

を常に以下 (case 1), (case 2) のどちらかに対応させる事が出来る (Fig. 2 および Fig. 3 参照):

(case 1) $\exists R_k \geq r_*$, s.t.:

$$\begin{cases} G_k = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(\xi) = \nu_0 \cdot \xi \text{ and } \xi_1 = R_k \right\}, \\ G_k(r) = ((R_k + r)\mathcal{W}_f \setminus (R_k - r)\overline{\mathcal{W}_f}) \cap \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 \mid f(\xi) = \nu_0 \cdot \xi \right\}; \end{cases}$$

(case 2) $\exists I_k := [a_k, b_k]$ ($-\infty < a_k < b_k < +\infty$), $\exists \beta_k \in C^2(I_k)$, s.t.:

$$\begin{cases} |\beta'_k| \leq \tan \frac{\pi}{2m} \text{ on } I_k, \\ G_k = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 \mid \xi = (\beta_k(\tau), \tau), \tau \in I_k \right\}, \\ G_k(r) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 \mid \xi = (\sigma + \beta_k(\tau), \tau), \tau \in I_k, |\sigma| < r \sec \frac{\pi}{2m} \right\}, \\ \Lambda_k(\Gamma_k(r) \cap D) = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2) \in G_k(r) \mid \xi_1 > \beta_k(\xi_2) \right\}. \end{cases}$$

更にこのとき, 任意の番号 $1 \leq k \leq n_D$ に対し, 合成関数 $f_{\Theta_k} := f \circ \Theta_k^{-1}$ および $f_{\Theta_k}^\circ := f^\circ \circ \Theta_k^{-1}$ は互いに双対関係にある2つの2次元ノルムとなり, 更に以下が成立する:

$$\begin{cases} \bullet \text{ (case 1)} \implies f_{\Theta_k} = f \text{ and } f_{\Theta_k}^\circ = f^\circ \text{ on } \mathbb{R}^2, \\ \bullet \text{ (case 2)} \implies f_{\Theta_k} = (\cos \frac{\pi}{2m}) f^\circ \text{ and } f_{\Theta_k}^\circ = (\sec \frac{\pi}{2m}) f \text{ on } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

定義 4.1 と同じ記法の下で, 区分的定数値の構造を持つ BV-関数のクラス $S_*(\theta_*)$ を以下で定義する:

$$S_*(\theta_*) := \left\{ w = (1 + \theta_*)\chi_D + (-1 + \theta_*)\chi_{D^*} - \theta_* \mid D \in \mathcal{D}_*(\theta_*) \right\}. \quad (4.4)$$

補足 4.2 式 (4.4) で定義されるクラス $S_*(\theta_*)$ は, $D = \Omega$ と $D = \emptyset$ のそれぞれの場合に対応する 2 つの定数値関数 1 と -1 とをその構成要素に含む.

上記の記法を基に, 参考文献 [24] での研究報告内容は以下のように要約される.

命題 4.1 (温度が既知である設定における先行研究)

- (I) (定常パターンの構造) $S_*(\theta_*)$ は定常問題 (1.9) の解全体の部分集合を成す.
- (II) (温度が既知である設定での安定性解析) $w_* = (1 + \theta_*)\chi_D + (-1 + \theta_*)\chi_{D^*} - \theta_* \in S_*(\theta_*)$ ($D \in \mathcal{D}_*(\theta_*)$) を定常問題 (1.9) の解とし, 2 つの定数 $\bar{\delta}, \bar{\rho} > 0$ を以下の条件を満たすほど十分小さく設定する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet w_* \in S_*(\theta_*) \text{ が定数値関数} \implies 2\bar{\delta} + \bar{\rho} \leq 1 - |\theta_*|, \\ \bullet w_* \in S_*(\theta_*) \text{ が定数値関数でない} \implies 0 < \frac{2\kappa}{1 - |\theta_*| - 3\bar{\delta}} < r_* - \bar{\rho}. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

また, $0 \leq \delta \leq \bar{\delta}$, $0 \leq \rho \leq \bar{\rho}$, $\bar{\theta} \in L^2_{\text{loc}}([0, +\infty); L^2(\Omega))$ とし, 関数 (温度) $\bar{\theta}$ と Allen-Cahn 方程式 $(E; \bar{\theta})_f$ の解 u に以下の条件を仮定する:

$$|\bar{\theta} - \theta_*|_{L^\infty(Q)} \leq \bar{\delta} \text{ and } |u(0) - w_*|_{L^\infty(\Omega \setminus \Gamma_D(\rho)_f)} \leq \delta.$$

このとき, 以下 (i)-(ii) が成立する:

- (i) $|u(t) - w_*|_{L^\infty(\Omega \setminus \Gamma_D(\rho)_f)} \leq \delta, \forall t \geq 0;$
- (ii) $\exists \bar{t}(\delta, \rho) > 0$, s.t. $u(t) = w_*$ a.e. in $\Omega \setminus \Gamma_D(\rho)_f, \forall t \geq \bar{t}(\delta, \rho).$

特に, w_* が定数値関数である場合は, 時刻 $\bar{t}(\delta, \rho)$ は ρ に無関係に定まり, 従ってこの場合の (ii) は $u(t)$ の値分布が, ある有限時間 $\bar{t} = \bar{t}(\delta)$ において, Ω 上一様に w_* (定数値) へ収束する事を意味する.

証明の概略. 主張 (I)-(II) のどちらにおいても, 命題 2.1 (IV) で述べられた事実が証明の鍵となる. 実際, 主張 (I) は上記の事実を時間的変化のない状況で適用する事によって証明出来る.

それに対し, 主張 (II) の証明中での命題 2.1 (IV) は, 安定性解析において考察中の解の挙動範囲を特徴付ける評価関数を見つける際に用いられる. この評価関数はしばしば「比較関数」と呼ばれ, 実際には特別な条件を与えたときの Allen-Cahn 方程式の解として構成される. 最終的に主張 (II) は, 適切な比較関数を構成した後に命題 2.1 (III) を援用し, 考察中の解と比較関数との位置関係とを見比べる事によって証明される. ■

補足 4.3 式 (4.4) で与えられるクラス $S_*(\theta_*)$ は, 定常問題 (1.9) の解全体の真部分集合である. 実際, すぐに確かめられるように, 定数値関数 $-\theta_*$ は定常問題と同値な変分不等式 (1.10) を満足するが, この関数は $S_*(\theta_*)$ には属さない.

以上の先行研究成果を踏まえた上で, 本論文の主定理では, システム $(P)_f$ による温度と相変化が相互作用する力学系において命題 4.1 と同様な視点からの考察を与える. このため, ここでは各定常解 $[\theta_*, w_*]$ のデータに与える揺らぎの範囲を, 以下で定められるような直積空間 $D(\Delta_0) \times D(\Phi_f)$ 内の部分集合 (族) を用いて特徴付ける.

定義 4.2 (揺らぎの範囲) $[\theta_*, w_*]$ を, 定数 $-1 < \theta_* < 1$ (平衡温度) と, 定常問題 (1.9) の解 $w_* = (1 + \theta_*)\chi_D + (-1 + \theta_*)\chi_{D^{\text{ex}}} - \theta_* \in S_*(\theta_*)$ ($D \in \mathcal{D}_*(\theta_*)$) の組から成るシステム $(P)_f$ の定常解とする. また, $\bar{\delta}, \bar{\rho}$ を式 (4.5) で与えられる 2 つの正の定数とする. このとき, 任意の $\lambda \geq 0, 0 \leq \delta \leq \bar{\delta}, 0 \leq \rho \leq \bar{\rho}$ に対し, 直積空間 $D(\Delta_0) \times D(\Phi_f)$ 内の部分集合 $U_\lambda \left(\begin{pmatrix} \theta_* \\ w_* \end{pmatrix}; \delta, \rho \right)$ を以下で定義する:

$$U_\lambda \left(\begin{pmatrix} \theta_* \\ w_* \end{pmatrix}; \delta, \rho \right) := \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} \in \begin{matrix} D(\Delta_0) \\ \times \\ D(\Phi_f) \end{matrix} \left| \begin{array}{l} |\tilde{\theta} - \theta_*|_{H^2(\Omega)} \leq \lambda, \\ |\tilde{\theta} - \theta_*|_{H^1(\Omega)} \leq \delta, \\ |\tilde{w} - w_*|_{L^\infty(\Omega \setminus \Gamma_D(\rho)_f)} \leq \delta, \\ \Phi_f(\tilde{w}) \leq \Phi_f(w_*) + \delta \end{array} \right. \right\}.$$

補足 4.4 定義 4.2 と同じ記法の下で, 初期条件:

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in U_\lambda \left(\begin{pmatrix} \theta_* \\ w_* \end{pmatrix}; \delta, \rho \right); \quad (4.6)$$

を満足するようなシステム $(P)_f$ の解 $[\theta, w]$ を考える. このとき, 解の時間大域的評価 (3.6) および条件 (4.5) から, $\lambda \geq 0$ のみに依存して定まり, 温度に関する以下の評価式を実現する様な定数 $M_\lambda > 0$ を見つける事が出来る:

$$|\theta(t) - \theta_*|_{H^2(\Omega)} \leq M_\lambda (1 + \mathcal{H}^1(\Gamma_D)), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.7)$$

式 (4.7) は, 2 つの未知変数 θ, w の相互作用を解析する際に重要な役割を担う評価式である.

先で導入したすべての記法を踏まえ, 以下に本論文における主定理を述べる.

定理 4.1 (主定理) $[\theta_*, w_*]$ を, 定数 $-1 < \theta_* < 1$ (平衡温度) と定常問題 (1.9) の解 $w_* = (1 + \theta_*)\chi_D + (-1 + \theta_*)\chi_{D^{\text{ex}}} - \theta_* \in S_*(\theta_*)$ ($D \in \mathcal{D}_*(\theta_*)$) の組から成るシステム $(P)_f$ の定常解とする. また, $\bar{\delta}, \bar{\rho}$ を式 (4.5) で与えられる 2 つの正の定数とする. このとき, 任意の $\lambda \geq 0$ に対し, λ のみに依存して定まる定数 $0 < \delta_*(\lambda) \leq \bar{\delta}, 0 \leq \rho_*(\lambda) \leq \bar{\rho}$ が存在し, これらの定数を用いる事によって定常解 $[\theta_*, w_*]$ の安定性は以下の様に特徴づけられる:

(*) $0 \leq \delta \leq \delta_*(\lambda)$, $0 \leq \rho \leq \rho_*(\lambda)$ であり, システム $(P)_f$ の解 $[\theta, w]$ が初期条件 (4.6) を満たすならば:

$$|\theta(t) - \theta_*|_{C(\bar{\Omega})} \leq \bar{\delta}, \text{ and } |w(t) - w_*|_{L^\infty(\Omega \setminus \Gamma_D(\rho)_f)} \leq \delta, \quad \forall t \geq 0.$$

更に δ と ρ のみに依存して定まる有限時間 $t_*(\delta, \rho)$ が存在し, 以下が成立する:

$$w(t) = w_* \text{ a.e. in } \Omega \setminus \Gamma_D(\rho)_f, \quad \forall t \geq t_*(\delta, \rho). \quad (4.8)$$

特に, w_* が定数値関数の場合, 有限時間 $t_*(\delta, \rho)$ は ρ に無関係に定まり, 従ってこの場合の (4.8) は, $w(t)$ の値分布がある有限時間 $t_* = t_*(\delta)$ において, Ω 上一様に w_* (定数値) へ収束する事を意味する.

5 主定理の証明

本節では, 主定理の証明を与える. $[\theta_*, w_*]$ を, 定数 $-1 < \theta_* < 1$ (平衡温度) と, 定常問題 (1.9) の解 $w_* = (1 + \theta_*)\chi_D + (-1 + \theta_*)\chi_{D^*} - \theta_* \in \mathcal{S}_*(\theta_*)$ ($D \in \mathcal{D}_*(\theta_*)$) の組から成るシステム $(P)_f$ の定常解とし, 要点を絞るため, ここでは w_* が定数でない場合のみを考える. 実際, w_* が定数の場合の証明は, そうでない場合の証明を簡単な形へ書き直したものになる.

主定理の証明に入る前に, 以下の補題を準備する.

補題 5.1 ($\mathcal{F}_{\theta_*}$ のエネルギー評価) $-1 < \theta_* < 1$ を任意の定数とし, $\mathcal{F}_{\theta_*}$ を式 (3.5) で与えられる空間 $L^2(\Omega)$ 上の汎関数とする. また, $w_* = (1 + \theta_*)\chi_D + (-1 + \theta_*)\chi_{D^*} - \theta_* \in \mathcal{S}_*(\theta_*)$ ($D \in \mathcal{D}_*(\theta_*)$) を, 定常問題 (1.9) の定数でない解とする. このとき, 任意の $0 \leq \delta < 1 - |\theta_*|$, $0 \leq \rho < r_*$ を固定すると, 以下のエネルギー評価が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta_*}(z) &\geq \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) - 11(\delta + \rho)\mathcal{H}^1(\Gamma_D), \\ \forall z \in D(\Phi_f) \text{ s.t. } |z - w_*|_{L^\infty(\Omega \setminus \Gamma_D(\rho)_f)} &\leq \delta. \end{aligned} \quad (5.1)$$

補題 5.1 の証明. はじめに, $\rho = 0$ の場合を考える. この場合では, (V4), (4.2) および $m \geq 2$ といった条件から, 条件 (5.1) を満足するようなすべての関数 $z \in D(\Phi_f)$ に対し以下の不等式が成立する事を容易に確認する事が出来る:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta_*}(z) &= \kappa \Phi_f(z) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z + \theta_*|^2 dx \\ &\geq \kappa \int_{-1+\delta}^{1+\delta} \text{Per}_f(z^{-1}(\tau, +\infty)) d\tau - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_* + \theta_*|^2 dx \\ &= 2\kappa(1 - \delta) \int_{\Gamma_D} f^\circ(n_{\Gamma_D}) d\mathcal{H}^1 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_* + \theta_*|^2 dx \\ &\geq \kappa \text{Var}_f(w_*) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_* + \theta_*|^2 dx - 2\delta \left(\sec \frac{\pi}{2m} \right) \mathcal{H}^1(\Gamma_D) \\ &= \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) - 4\delta \mathcal{H}^1(\Gamma_D). \end{aligned}$$

この不等式は、補題の結論をそのまま保障する。

次に、 $\rho > 0$ の場合を考える。条件 (5.1) を満たす関数 $z \in D(\Phi_f)$ を任意に固定し、以下の収束条件を満たすような z の近似列 $\{\zeta_i\} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ を考える：

$$\zeta_i \rightarrow z \text{ in } L^2(\Omega) \text{ and } \text{Var}_f(\zeta_i) \rightarrow \text{Var}_f(z) = V_f(z) \text{ as } i \rightarrow +\infty. \quad (5.2)$$

上記の近似列 $\{\zeta_i\}$ は (V3) で述べた関数列そのものであるが、この近似列を論文 [22, Lemma 6.2] で用いられた手法に従って構成すれば、関数列 $\{\zeta_i\}$ が満たす性質に以下の条件を追加する事が出来る (構成法の元々のアイデアについては [1, Theorem 3.9], [10, Theorem 2 in Section 5.2], [12, 1.17 Theorem in Chapter 1]などを参照)：

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \zeta_i \in C^\infty(\overline{\Gamma_D(r_*)_f}), \\ \bullet 1 - \delta \leq \zeta_i(x) \leq 1, \forall x \in \Gamma_D(r_*)_f \setminus \overline{\Gamma_D(\frac{r_*+\rho}{2})_f}, \\ \quad \text{s.t. } 1 - \delta \leq z(x) \leq 1, \\ \bullet -1 \leq \zeta_i(x) \leq -1 + \delta, \forall x \in \Gamma_D(r_*)_f \setminus \overline{\Gamma_D(\frac{r_*+\rho}{2})_f}, \\ \quad \text{s.t. } -1 \leq z(x) \leq -1 + \delta, \end{array} \right. \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

また、収束条件 (5.2) により、十分大きな番号 $i_* = i_*(\rho, \kappa, \mathcal{H}^1(\Gamma_D)) \in \mathbb{N}$ ($\rho, \kappa, \mathcal{H}^1(\Gamma_D)$ のみに依存) に対し、以下の不等式が成立する：

$$|\text{Var}_f(\zeta_{i_*}) - \text{Var}_f(z)| \leq \frac{\rho \mathcal{H}^1(\Gamma_D)}{1 + \kappa}. \quad (5.4)$$

いま、 $\text{Var}_f(\zeta_{i_*})$ に対し、(2.1)-(2.4) を用いれば：

$$\begin{aligned} \text{Var}_f(\zeta_{i_*}) &\geq \int_{\Gamma_D(r_*)_f} f^\circ(\nabla \zeta_{i_*}) dx \\ &\geq \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \left(\int_{\zeta_{i_*}^{-1}(\tau)} f^\circ(n_{\partial \zeta_{i_*}^{-1}(\tau, +\infty)}) d\mathcal{H}^1 \right) d\tau; \end{aligned}$$

と計算できるが、ここで (5.3) と [25, Lemma Ap.1] を適用すると、更に以下のように不等式をつなげていく事が出来る：

$$\begin{aligned} \text{Var}_f(\zeta_{i_*}) &\geq \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \left(1 - \frac{\rho}{r_*} \right) \left(\int_{\Gamma_D} f^\circ(n_{\Gamma_D}) d\mathcal{H}^1 \right) d\tau \\ &= 2(1 - \delta) \left(1 - \frac{\rho}{r_*} \right) \int_{\Gamma_D} f^\circ(n_{\Gamma_D}) d\mathcal{H}^1 \\ &\geq \text{Var}_f(w_*) - 2 \left(\delta + \frac{\rho}{r_*} \right) \left(\sec \frac{\pi}{2m} \right) \mathcal{H}^1(\Gamma_D). \end{aligned}$$

これに、 $m \geq 2$, $0 < \kappa < 1$, $r_* > 2\kappa/(1 - |\theta_*|)$ といった条件を合わせると、以下の不等式が得られる：

$$\kappa \Phi_f(\zeta_{i_*}) \geq \kappa \Phi_f(w_*) - (4\delta + 2\rho) \mathcal{H}^1(\Gamma_D). \quad (5.5)$$

他方で, 仮定 (5.1) から,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \int_{\Omega} |z + \theta_*|^2 dx &\geq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_* + \theta_*|^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \left| \int_{\Gamma_D(\rho)_f} |z + \theta_*|^2 dx - \int_{\Gamma_D(\rho)_f} |w_* + \theta_*|^2 dx \right| \\
&\geq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_* + \theta_*|^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_D(\rho)_f} 2(1 + |\theta_*|) |z - w_*| dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_* + \theta_*|^2 dx - 8\rho \mathcal{H}^1(\Gamma_D). \tag{5.6}
\end{aligned}$$

3つの不等式 (5.4), (5.5), (5.6) すべてを用いれば, 補題の結論を保障する以下の不等式を導く事が出来る:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\theta_*}(z) &\geq (\kappa \text{Var}_f(\zeta_{i_*}) - \rho \mathcal{H}^1(\Gamma_D)) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z + \theta_*|^2 dx \\
&\geq (\kappa \text{Var}_f(w_*) - (4\delta + 3\rho) \mathcal{H}^1(\Gamma_D)) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_* + \theta_*|^2 dx - 8\rho \mathcal{H}^1(\Gamma_D) \right) \\
&\geq \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) - 11(\delta + \rho) \mathcal{H}^1(\Gamma_D).
\end{aligned}$$

■

主定理の証明. $\bar{C}$ を補間不等式 (3.1) における正の定数とし, $\bar{\delta}$ と $\bar{\rho}$ を式 (4.5) で与えられた2つの正の定数とする.

任意の $\lambda \geq 0$ に対し, M_λ を評価式 (4.7) における正の定数とし, また3つの正の定数 $\varepsilon_*(\lambda)$, $\delta_*(\lambda)$, $\rho_*(\lambda)$ を以下で定める:

$$\begin{cases} \varepsilon_*(\lambda) := \frac{\mu \bar{\delta}^4}{4(1 + \bar{C})^4 (1 + M_\lambda)^4 (1 + \mathcal{H}^1(\Gamma_D))^4} (< 1), \\ \delta_*(\lambda) := \frac{\varepsilon_*(\lambda)}{22(1 + \mathcal{H}^1(\Gamma_D))(1 + \mathcal{L}^2(\Omega))} (< \bar{\delta}), \\ \rho_*(\lambda) := \min \left\{ \frac{\varepsilon_*(\lambda)}{22(1 + \mathcal{H}^1(\Gamma_D))}, \bar{\rho} \right\}. \end{cases}$$

加えて, 任意の $0 \leq \delta \leq \delta_*(\lambda)$, $0 \leq \rho \leq \rho_*(\lambda)$ に対し, 初期条件 (4.6) を満たすシステム (P)_f の解 $[\theta, w]$ を一つ選び,

$$T_* := \sup \left\{ T \geq 0 \mid \mathcal{F}_{\theta_*}(w(t)) \geq \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) - \varepsilon_*(\lambda), \forall t \in [0, T] \right\}, \tag{5.7}$$

と設定する. このとき, $T_* > 0$ となる. 実際, 初期条件 (4.6) と補題 5.1 から:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta_*}(w_0) &\geq \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) - 11(\delta + \rho)\mathcal{H}^1(\Gamma_D) \\ &\geq \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) - 11(\delta_*(\lambda) + \rho_*(\lambda))\mathcal{H}^1(\Gamma_D) > \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) - \varepsilon_*(\lambda); \end{aligned}$$

となるが, 命題 2.1 から関数 $\mathcal{F}_{\theta_*}(w(\cdot))$ は $[0, +\infty)$ 上連続となるので, 上の不等式から直ちに $T_* > 0$ が得られる.

次に, 設定 (5.7) および命題 3.2 (I) から:

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{2}|\theta(t) - \theta_*|_{X_0}^2 - \varepsilon_*(\lambda) \\ &\leq \frac{1}{2}|\theta_0 - \theta_*|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2}|\theta_0 - \theta_*|_{X_0}^2 + \mathcal{F}_{\theta_*}(w_0) - \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) \\ &\leq \delta^2 + \kappa(\Phi_f(w_0) - \Phi_f(w_*)) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|w_0 + \theta_*|^2 - |w_* + \theta_*|^2) dx \\ &\leq 2\delta(1 + \mathcal{L}^2(\Omega)) + 8\rho\mathcal{H}^1(\Gamma_D) \\ &\leq 2\delta_*(\lambda)(1 + \mathcal{L}^2(\Omega)) + 8\rho_*(\lambda)\mathcal{H}^1(\Gamma_D) \\ &< \varepsilon_*(\lambda), \quad 0 \leq \forall t < T_*. \end{aligned}$$

これを整理すると:

$$\begin{aligned} |\theta(t) - \theta_*|_{X_0}^2 &< \frac{4}{\mu} \cdot \varepsilon_*(\lambda) = \frac{\bar{\delta}^4}{(1 + \bar{C})^4(1 + M_\lambda)^4(1 + \mathcal{H}^1(\Gamma_D))^4}, \\ &0 \leq \forall t < T_*. \end{aligned} \tag{5.8}$$

更に補間不等式 (3.1) と (4.7), (5.8) から:

$$\begin{aligned} |\theta(t) - \theta_*|_{C(\bar{\Omega})} &\leq \bar{C}|\theta(t) - \theta_*|_{X_0}^{1/2}|\theta(t) - \theta_*|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \\ &< \bar{C} \cdot \frac{\bar{\delta} \cdot M_\lambda^{1/2} (1 + \mathcal{H}^1(\Gamma_D))^{1/2}}{(1 + \bar{C})(1 + M_\lambda)(1 + \mathcal{H}^1(\Gamma_D))} < \bar{\delta}, \quad 0 \leq \forall t < T_*. \end{aligned} \tag{5.9}$$

上記の温度の一樣評価 (5.9) および初期条件 (4.6) により, 命題 4.1 中の (II) (i) が適用可能となるので, 相関数 w に関して以下の評価式を得る事が出来る:

$$|w(t) - w_*|_{L^\infty(\Omega \setminus \Gamma(\rho)_f)} \leq \delta, \quad 0 \leq \forall t < T_*. \tag{5.10}$$

これは, $T_* = +\infty$ である事を意味する. 実際, 仮に $T_* < +\infty$ とすると, 補題 5.1 から:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta_*}(w(T_*)) &= \lim_{t \nearrow T_*} \mathcal{F}_{\theta_*}(w(t)) \geq \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) - 11(\delta + \rho)\mathcal{H}^1(\Gamma_D) \\ &\geq \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) - 11(\delta_*(\lambda) + \rho_*(\lambda))\mathcal{H}^1(\Gamma_D) > \mathcal{F}_{\theta_*}(w_*) - \varepsilon_*(\lambda); \end{aligned}$$

となるが, これは T_* の定義 (5.7) と矛盾する.

ここで改めて (5.9) と (5.10) を見直してみると, 式 (4.8) で主張されている有限時間 $t_*(\delta, \rho)$ の存在は命題 4.1 中の (II) (ii) によって直ちに保障される. ■

参考文献

- [1] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Science Publications, 2000.
- [2] M. Amar and G. Bellettini, A notion of total variation depending on a metric with discontinuous coefficients, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **11** (1994), no. 1, 91–133.
- [3] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, Minimizing total variation flow, *Differential Integral Equations*, **14** (2001), no. 3, 321–360.
- [4] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, The Dirichlet Problem for the Total Variation Flow, *J. Funct. Anal.*, **180** (2001), 347–403.
- [5] F. Andreu, V. Caselles and J. M. Mazón, *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals*, Progress in Mathematics, **223**, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.
- [6] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff International Publishing, 1976.
- [7] G. Bellettini, V. Caselles, A. Chambolle and M. Novaga, Crystalline mean curvature flow of convex sets, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **179** (2006), no. 1, 109–152.
- [8] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espace de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [9] V. Caselles, A. Chambolle, S. Moll and M. Novaga, A characterization of convex calibrable sets in $\mathbb{R}^N$ with respect to anisotropic norms, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **25** (2008), no. 4, 803–832.
- [10] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Inc., Boca Raton, 1992.
- [11] Y. Giga and P. Rybka, Facet bending in the driven crystalline curvature flow in the plane, *J. Geom. Anal.*, **18** (2008), no. 1, 109–147.
- [12] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Monographs in Mathematics, **80**, Birkhäuser, 1984.
- [13] T. Ishiwata, Motion of non-convex polygons by crystalline curvature and almost convexity phenomena, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **25** (2008), no. 2, 233–253.
- [14] N. Kenmochi, Systems of nonlinear PDEs arising from dynamical phase transitions, in *Phase transitions and hysteresis (Montecatini Terme, 1993)*, Lecture Notes in Math., **1584**, Springer, Berlin, (1994), 39–86.

- [15] N. Kenmochi, Y. Mizuta and T. Nagai, Projections onto convex sets, convex functions and their subdifferentials, *Bull. Fac. Edu., Chiba Univ.*, **29** (1980), 11–22.
- [16] J. L. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications Vol. I*, Springer-Verlag, 1972.
- [17] J. S. Moll, The anisotropic total variation flow, *Math. Annalen.*, **332** (2005), 177–218.
- [18] M. Novaga and E. Paolini, Stability of crystalline evolutions, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, **15** (2005), no. 6, 1–17.
- [19] A. Sard, The measure of the critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.* **48**, (1942). 883–890.
- [20] K. Shirakawa, Stability for steady-state solutions of a nonisothermal Allen-Cahn equation generated by a total variation energy, in *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **20**, Gakkōtoshō, (2004), 289–304.
- [21] K. Shirakawa, Large-time behavior for a phase field system associated with total variation energy, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **15** (2005), no. 1, 1–27.
- [22] K. Shirakawa, Stability for steady-state patterns in phase field dynamics associated with total variation energies, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **15** (2006), no. 4, 1215–1236.
- [23] K. Shirakawa, Stability for phase field systems involving indefinite surface tension coefficients, in *Dissipative phase transitions*, (ed. P. Colli, N. Kenmochi and J. Sprekels), Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences **71**, World Scientific Publishing, (2006), 269–288.
- [24] K. Shirakawa, Stability analysis for two dimensional Allen-Cahn equations associated with crystalline type energies, submitted to *Discrete Contin. Dyn. Syst.*.
- [25] K. Shirakawa, Stability analysis for phase field systems associated with crystalline type energies, submitted to *Discrete Contin. Dyn. Syst.* -S.
- [26] K. Shirakawa and M. Kimura, Stability analysis for Allen-Cahn type equation associated with the total variation energy, *Nonlinear Anal.*, **60** (2005), no. 2, 257–282.
- [27] A. Visintin, *Models of Phase Transitions*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **28**, Birkhäuser, Boston, 1996.