

集合値関数の半順序に関する極値の可測性について

久野 洋

1. 序 集合値関数の可測性やボレル可測選択に関する一般論は、参考文献の[1],[2],[4],[5],[6],[7],[7]等で研究されている。

ここではこれらの研究をもとにして、ユークリッド空間 R^n に値を取るベクトル値マルコフ決定過程やベクトル値最適停止問題も考えるときに必要な特殊な形の集合値関数に対する同様の議論を行ないたい。尚ここで得られた結果は[3]の結果を拡張することに役立つ。

2. 定義と用語

今後特に断わらない限り A は可測空間とする。すなわち A 上で一つの σ -field $\mathcal{A}$ が定義されているものとする。 $\mathcal{A}$ に属する集合を A 上で可測という。 $\mathcal{A}$ 上に完備 σ -finite measure が定義されているときに A が完備という。(位相空間, 特に距離空間としての完備とは違う点に注意。) S は距離空間を表わすものとし, $\mathcal{B}(S)$ を S の開集合全体から生成された σ -field

とする。 $\mathcal{B}(S)$ に属する集合を(位相的)ボレル集合という。

A から S への集合値関数 F とは、 A から S の部分集合全体への写像のことである。 A から S への集合値関数が、すべての $a \in A$ に対して $F(a)$ が空集合でない時に多価関数と呼ばれる。 A から S への集合値関数は、すべての開集合 $G \subset S$ に対して集合 $F(G) = \{a \in A \mid F(a) \cap G \neq \emptyset\}$ が可測集合となるときに可測であると言われる。ここに述べた可測性の定義は[4], [9]などの中に述べられてゐる可測性の定義と同値であることに注意されたい。 A が位相空間のときには、集合値関数 $F: A \rightarrow S$ に対し F が可測ということは、 A にはボレル σ -field $\mathcal{B}(A)$ を考えているものとする。同様にして、 $F: A \times Y \rightarrow S$ に対して F の可測性はいつも積 σ -field $\mathcal{B}(A) \otimes \mathcal{B}(Y)$ 上で考えているものとする。 $F: A \rightarrow S$ のボレル可測選択(Borel measurable selector)とは、各々の $a \in A$ に対して $f(a) \in F(a)$ となるようなボレル可測写像 $f: A \rightarrow S$ のこととする。

S のすべての空でない開集合(コンパクト集合)の全体を $2^S(C(S))$ と書く。 2^S 上のfinite topologyの定義はE. Michael [8]に従う。すなわち 2^S 上のfinite topologyとは $G_1, G_2, \dots, G_n \in S$ の開集合として、 $\langle G_1, G_2, \dots, G_n \rangle = \{E \in 2^S \mid E \subset \bigcup_{i=1}^n G_i, \text{かつ } E \cap G_i \neq \emptyset \text{ for all } i\}$ の形で1に集合全体を開集合系の基とするような位相のことである。 $C(S)$ 上のfinite topologyとは 2^S 上のfinite topologyが $C(S)$

上に誘導されるものを言う。 P を S の部分集合全体に対する性質とする。このとき集合族 $\{E \in 2^S \mid E \text{ は } P\}$ ($\{E \in C(S) \mid E \text{ は } P\}$)

のことを $\bigcup_{E \in 2^S} (E \text{ は } P)$ ($\bigcup_{E \in C(S)} (E \text{ は } P)$) と書くこともある。集合値

関数 $F: A \rightarrow S$ は、すべての $a \in A$ に対して $F(a)$ が P であるときに P 値であると言われる。 F の定義域とは $\text{dom } F = \{a \in A \mid F(a) \neq \emptyset\}$

であり、 F のグラフとは $G_r(F) = \{(a, x) \in A \times S \mid x \in F(a)\}$ である。

$F: A \rightarrow S$ を閉値 (コンパクト値) 集合値関数とすると、 F は写像 $F: A \rightarrow 2^S$ (写像 $F: A \rightarrow C(S)$) と考えることが出来る。両者の相違は、値の空間の表現の相違で区別することにする。

全体を通じて K は n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に於ける原点 0 を頂点とする凸錐で $K^* \cap (-K^*) = \{0\}$ をみたすものとする。ここに $K^* = K \cup \{0\}$ のことである。さらに K は少なくとも一つの内点を持つものと仮定しておく。 $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $x - y \in K^*$ のときに $y \preceq x$ と定義する。すると $\preceq$ は $\mathbb{R}^n$ 上の一つの半順序となる。 $K(x) = \{z \mid x \preceq z\}$, $K^-(x) = \{z \mid z \preceq x\}$ と定義する。 $K(x) \cap K^-(x) = \{x\}$ となることに注意。 K が閉凸錐のときには、 $K + x = K(x)$ となるが一般には $K + x \subset K(x)$ である。 $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 E に対して E の極大点集合 $e(E)$ と E の上限点集合 $S(E)$ を次式で定義する。 $e(E) = \{p \in E \mid K(p) \cap E = \{p\}\}$, $S(E) = e(\bar{E})$. $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ を多価関数として、集合値関数 $eF: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ を各々の $a \in A$ に対して $(eF)(a) = e(F(a))$ で定義し、

集合値関数 $SF: A \rightarrow \mathcal{R}^?$ を各 $a \in A$ に対し $(SF)(a) = S(F(a))$ で定義する。

3. 集合値関数の可測性

この節では集合値関数の可測性に関するいくつかの定理を証明なしで列記することにする。

次の定理は Michael [8, Thm. 4.9] による、1 得られた *finite topology* に関するよく知られた結果を述べたものである。

定理 1 ([8])

- (i) S が compact Hausdorff ということと $C(S)$ が compact Hausdorff ということとは同値,
- (ii) S が距離付け可能ということと $C(S)$ が距離付け可能ということとは同値。

$F: A \rightarrow S$ をコンパクト値多価関数とする。すると $F: A \rightarrow S$ の可測性と $F: A \rightarrow C(S)$ の可測性との関連を扱った次の定理は、後で主定理の定理 8, 定理 9, 定理 10 を証明するときに使われる。

定理 2 ([2])

S を可分距離空間とし, $F: A \rightarrow S$ をコンパクト値多価関数とする。このとき次の (i) と (ii) は同値である。

- (i) $F: A \rightarrow S$ が可測,
- (ii) $F: A \rightarrow C(S)$ がボレル可測。

この結果は Debreu [2, Thm. 4.2] に示されて得られた。

今各々の $F_n: A \rightarrow S$ が可測のとき, $(\bigcup_n F_n)(a) = \bigcup_n F_n(a)$ の式で定義される集合値関数 $\bigcup_n F_n: A \rightarrow S$ も可測となることはすぐわかる。ところが可測集合値関数の可算共通部分 $\bigcap_n F_n: A \rightarrow S$ の可測性はすぐには出てこない。このことをある種の条件の下で保証したのが Rockafellar [9, Cor. 1.3] であり、それは次の定理である。

定理 3 ([9])

$(F_i \mid i=1, 2, \dots)$ を閉値可測集合値関数の可算族とする。但し各 $F_i: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ 。すると集合値関数 $F: a \rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i(a)$ も可測である。

定理 4 ([4])

$F: A \rightarrow S$ が可測であることと, $\bar{F}: A \rightarrow S$ が可測であることは同値である。但し $\bar{F}: A \rightarrow S$ は各々の $a \in A$ に対して, $\bar{F}(a) = \overline{F(a)}$ で定義されているものとする。

この定理 4 は Himmelberg [4, Prop. 2.6] が与えたものである。

定理5 ([1])

X, Y をそれぞれポーランド空間のボレル集合として, E を $X \times Y$ のボレル集合とする。もし各 $x \in X$ に対する切片 E_x が σ -compact とすると, 次の (i) と (ii) が成立する。

(i) $\text{Proj}_X(E)$ から Y へのボレル可測写像 f で $G_f(f) \subset E$ となるものが存在する。

(ii) $\text{Proj}_X(E)$ はボレル集合である。

定理5は Brown-Purves の定理という名でも知られている [1] 中の定理を修正したものである。

S が Souslin であるとは, S がポーランド空間の連続像であることに云う。

定理6 ([4])

A が完備 (位相的な意味でなくここに注意) とし, S を Souslin とし, $F: A \rightarrow S$ を $G_r(F) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$ となるような集合値関数とすると, F は可測である。

この結果は Himmelberg [4, Thm. 3.4] によつて得られた。可測空間 $(A, \mathcal{A})$ が Souslin 演算を許容する (to admit the Souslin operation) とは, 可測集合上の Souslin 演算で作られた集合が再び可測となることに云う。 ([7])

集合値関数 $F: A \rightarrow S$ が Souslin 型であるとは、ポーランド空間 P と可測閉値集合値関数 $\Omega: A \rightarrow P$ と連続写像 $\varphi: P \rightarrow S$ が存在して、すべての $a \in A$ に対して $F(a) = \varphi(\Omega(a))$ となるときに言う。

定理 7 ([7])

$(A, \mathcal{A})$ を Souslin 演算を許容する可測空間とし、 S を Souslin $F: A \rightarrow S$ を $G_\delta(F) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(S)$ となる集合値関数とすると、 F は Souslin 型となる。

この結果は Leese [7, Lem. 3] で証明されている。

4. $S = \mathbb{R}^2$ の場合の可測性

この節では主定理を証明するのに必要ないくつかの補題を準備しよう。今から x を中心として半径 ε の開球を $U(x, \varepsilon)$ と表わすことにする。さらに A, B を $\mathbb{R}^2$ の部分集合として、

$$d(A, B) = \inf \{ |a - b| \mid a \in A, b \in B \} \quad \text{と表わす。}$$

$|a - b|$ の代わりに $d(a, b)$ と書くことにする。

補題 1

K を $\mathbb{R}^2$ の閉凸錐とする。このとき $f(x) = K(x)$ で定義される写像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$ は連続写像である。

証明 $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 G と任意の $x_0 \in f^{-1}(\bigcup_{E \in 2^{\mathbb{R}^2}} (E \subset G))$ に対

して, $\inf \{d(a, b) \mid a \in K(x), b \in G^c\} > 0$ が成り立つ。ここで
 その値を δ_{x_0} とおくと, $U(x_0; \frac{\delta_{x_0}}{2}) \subset \bigcup_{E \in 2^{R^1}} f^{-1}(\bigcap (E \subset G))$ となる。従っ
 て $\bigcup_{E \in 2^{R^1}} f^{-1}(\bigcap (E \subset G))$ が開集合となることがわかった。同様にして
 $\bigcup_{E \in 2^{R^1}} f^{-1}(\bigcap (E \cap G \neq \emptyset))$ も開集合となることが示される。従ってこの
 補題は証明された。

R^1 の一点コンパクト化を $\overline{R^1}$ で表わすことにする。すると、
 $\overline{R^1}$ はコンパクトかつハウスドルフで可分な距離付可能空間と
 なる。E を $\overline{R^1}$ の部分集合として、E の $\overline{R^1}$ と R^1 における閉包を
 それぞれ $\overline{E}$ と $\overline{E}^{R^1}$ で表わす。特に断わらない限り、 $X = \overline{R^1}$ とお
 く。

補題2

K を凸錐とし, $F: A \rightarrow R^1$ をコンパクト値可測多価関数とす
 る。多価関数 $F_1: X \rightarrow X$ と集合値関数 $F_2: A \times X \rightarrow X$ を次式で
 定義するとき、どちらもコンパクト値可測となる。

$$\begin{cases} F_1(x) = \overline{K(x)} & \text{for each } x \in R^1 \\ F_1(\infty) = \{\infty\}, \end{cases} \quad F_2(a, x) = F_1(x) \cap \overline{F(a)} \quad \text{for each } (a, x) \in A \times X$$

証明 φ_1 の R^1 上への制限 $\varphi_1|_{R^1}$ が可測であることを示せば十
 分である。G を X の任意の開集合として、

$$(\varphi_1|_{R^1})^{-1}(\bigcap_{E \in \mathcal{C}(X)} (E \subset G)) = \{x \in R^1 \mid \overline{K(x)} \subset G\}$$

$$= \begin{cases} \phi & \text{if } G \neq \infty \\ \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{K(x)}^{\mathbb{R}^2} \subset G - \{\infty\}\} & \text{if } G = \infty \end{cases}$$

補題 1 に よる、集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{K(x)}^{\mathbb{R}^2} \subset G - \{\infty\}\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であるから、 $(\varphi_1 / \mathbb{R}^2)^{-1}(\bigcup_{E \in \mathcal{C}(X)} (E \subset G))$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。同様に $(\varphi_1 / \mathbb{R}^2)^{-1}(\bigcup_{E \in \mathcal{C}(X)} (E \cap G \neq \phi))$ も $\mathbb{R}^2$ の開集合であることがわかる。
 F_2 の可測性は、定理 3 と定理 4 をあわせて用いるとわかる。

補題 3

$(A, \mathcal{A})$ を可測空間、 K を開凸錐、 $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を開値可測多価関数とする。このとき $\Gamma(a, x) = F(a) \cap K(x)$ for $(a, x) \in A \times \mathbb{R}^2$ で定義される集合値関数 $\Gamma: A \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ もまた可測集合値関数となる。特に集合 $\{(a, x) \in A \times \mathbb{R}^2 \mid \Gamma(a, x) = \phi\}$ は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に属する。

証明 $\{d_i: i=1, 2, \dots\}$ を K の dense subset とする。すると、
 $K(x) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{K(d_i)}^{\mathbb{R}^2} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{K(d_i)}^{\mathbb{R}^2}$ となることから K が開集合であることが従う。従って補題 1 と $F(a) \cap K(x) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{F(a) \cap \overline{K}^{\mathbb{R}^2}(x+d_i)\}$ となる事実により、明らかに Γ は可測である。

補題 4

E を $\mathbb{R}^2$ の閉部分集合、 K を開凸錐とすれば、極点集合 $e(E)$ は開集合となる。

証明 $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ を $e(E)$ の点列とし, $x_0 \in E$ とし $x_n \rightarrow x_0$ と仮定する。今 $x_0 \notin e(E)$ と仮定すると, $y \in E$, $y \neq x_0$, $y \neq \bar{y}$ となる点 y が存在する。一方 $y \in K+x_0$ で $K+x_0$ は開集合であるから $\delta > 0$ が存在して $U(y; \delta) \subset K+x_0$ をみえる。 $x_0 \notin U(y; \delta)$ であることに注意。すると n_0 が存在して, すべての $n \geq n_0$ に対して $x_n \in U(x_0; \delta)$ となるので, $x_{n_0} \neq y$, $y \neq x_{n_0}$ で $y \in E$ となるが, これは x_{n_0} が E の極大点であることに反する。

補題5

K を閉凸錐とし, $F: A \rightarrow \mathcal{R}^q$ を可測集合値関数とする。このとき $\text{dom } SF \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{R}^q)$ となる。

証明 $\{d_i: i=1, 2, \dots\}$ を $\mathcal{R}^q$ の dense subset とする。このとき次の(1)式を示そう。

$$(1) \quad \text{dom } SF = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a \in A \mid \phi \neq K(d_i) \cap \overline{F(a)} \subset U(d_i; \frac{1}{n})\}$$

この(1)を示す為に, 次の(2)で表わされる命題が必要である。

(2) E を閉集合とし, $x \in e(E)$ とする。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して $d(E, K(x) \cap U(x; \varepsilon)^c) > \delta$ となる。

(1)式の証明 任意の $a \in \text{dom } SF$ に対して $e(\overline{F(a)}) \neq \emptyset$ であるから, $x \in e(\overline{F(a)})$ が取れる。 $\varepsilon = \frac{1}{m}$ とし (2) を適用すると, $\delta = \frac{1}{n}$ が存在して $d(\overline{F(a)}, K(x) \cap U(x; \frac{1}{m})^c) > \frac{1}{n}$ となる。

$\overline{F(a)} \cap U(y; \frac{1}{m} + \frac{1}{n})^c \cap K(y) = \emptyset$ for all $y \in U(x; \frac{1}{n})$, 特に

for all $y \in U(y: \frac{1}{n}) \cap K(x)$ とする。自然数 m と n は a が (1) の右辺の集合に属するように幾らでも大きく取ることができる。
従って、 $\text{dom } SF \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a \in A \mid \phi \neq K(d_i) \cap \overline{F(a)} \subset U(d_i: \frac{1}{n})\}$ であることがわかった。逆の包含関係は自明である。

補題 6

K を開凸錐とし、 $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を可測集合値関数とするとき、
 $\text{dom } SF \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ とする。

証明 $\{d_i: i=1, 2, \dots\}$ を補題 5 の証明中のものと同じとし、
よう。すると $\text{dom } SF = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a \in A \mid (K+d_i) \cap \overline{F(a)} = \phi\}$ とする。
従って、 $\text{dom } SF \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ である。

5 eF の可測性

この節では主定理である定理 8, 定理 9, 定理 10 を述べる。
これ等の定理では、もし $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ がコンパクト値可測多価関数のとき、それぞれ何等かの条件の下で、 $\text{Gr}(eF) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ とする、 $eF: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ が可測となること、 $eF: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ が Souslin 型となること及び $eF: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ がボレル可測選択を持つことを示している。定理 10 は SF の可測性について述べた。

定理 8

$F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ をコンパクト値可測多価関数とする。このとき
次の (1) から (4) までの結果が得られる。

- (1) K が閉集合もしくは開集合のとき $\text{Gr}(eF) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$
- (2) A が完備で K が閉または開集合のとき, $eF: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ は可測
- (3) $(A, \mathcal{A})$ が Souslin 演算を許容し, K が閉または開集合であるとき $eF: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ は Souslin 型である。
- (4) $\mathcal{A} = \mathcal{B}(A)$ で A がポーランド空間のボレル集合で凸錐 K に対して開凸錐 L で $L \cap K, L^* \cap (-L^*) = \{\emptyset\}$ をみたすものが取れるとき, $eF: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ はボレル可測選択を持つ。

証明 (2) と (3) は (1) から定理 6, 定理 7 によって得られる。
 だから最初に (1) を証明して, 次に (4) を証明しようと思う。
 $X = \overline{\mathbb{R}^2}$ とおいておく。 K が開集合の場合には, 補題 3 から $\text{Gr}(eF) = \text{Gr}(F) \cap \{(a, x) \mid F(a) \cap K + x = \emptyset\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 。
 K が閉集合の場合 $F: X \rightarrow C(X)$ を $\begin{cases} F_1(x) = \overline{K(x)}, x \in \mathbb{R}^2 \text{ で定義し,} \\ F_1(\infty) = \{\infty\} \end{cases}$
 $F_2: A \times X \rightarrow C(X)$ を $F_2(a, x) = F_1(x) \cap \overline{F(a)}$ で定義すると定理 2 と補題 2 によって F_1 と F_2 はともに可測である。さらに,
 $F_3: X \rightarrow C(X)$ を $F_3(x) = \{x, \infty\}$ で定義して, $\Gamma: A \rightarrow X$ を $\Gamma(a) = eF(a) \cup \{\infty\}$ で定義する。そして最後に写像 Φ を次のように定義する。つまり $\Phi: A \times X \rightarrow C(X) \times C(X)$ を
 $\Phi(a, x) = (F_2(a, x), F_3(x))$ で定義する訳である。

F_1, F_2, F_3, Γ はすべて集合値関数なのに重付けは写像として定義されていることに注意を要する。このとき次の関係が成立する。

(a) Δ を積空間 $C(X) \times C(X)$ の対角集合として

$$Gr(\Gamma) = \Phi^{-1}(\Delta),$$

(b) $Gr(eF) = Gr(\Gamma) \cap A \times \mathbb{R}^2$.

上の (a), (b) の関係式を証明する為に次の関係を得る。

$$\begin{aligned} Gr(\Gamma) &= \{(a, x) \in A \times X \mid x \in \Gamma(a)\} \\ &= \{(a, x) \in A \times \mathbb{R}^2 \mid x \in \Gamma(a)\} \cup A \times \{\infty\} \\ &= \{(a, x) \in A \times \mathbb{R}^2 \mid x \in eF(a)\} \cup A \times \{\infty\} \\ &= Gr(eF) \cup A \times \{\infty\} \end{aligned} \quad \text{よして}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\Delta) &= \{(a, x) \in A \times X \mid F_2(a, x) = F_3(x)\} \\ &= \{(a, x) \in A \times X \mid F_1(x) \cap \overline{F(a)} = \{x, \infty\}\} \\ &= \{(a, x) \in A \times \mathbb{R}^2 \mid \overline{K(x)} \cap F(a) = \{x\}\} \cup A \times \{\infty\} \\ &= Gr(eF) \cup A \times \{\infty\}. \end{aligned}$$

(a) と (b) はこの式からすぐにわかる。

最後に (4) を証明しよう。仮定から存在が保証されている開凸錐 L に関する E の極大点集合を $e(L; E)$ と書くことにする。

すると補題 4 からすべての $a \in A$ に対して $e(L; F(a))$ はコンパクトとなり $Gr(e(L; F)) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ となることが (1) からわかる。従って定理 5 によつて $e(L; F)$ のボレル可測選択が存在する。

在する。ところが $\text{Gr}(e(L:F)) \subset \text{Gr}(eF)$ であるから、それは eF のボレル可測選択になっている。これで定理の証明は完了した。

eF の可測性は定理 8 の (2) で A が完備のときに証明している。ところでベクトル値コルコフ決定過程やベクトル値最適停止問題への応用の際に、 A が完備だという仮定はかなり強過ぎる。これらへの応用に於ては $\mathcal{A} = \mathcal{B}(A)$ であるような局面にしばしば出会う。 K を閉集合と仮定すれば次の定理を得る。

定理 9

A をポーランド空間のボレル集合とし $\mathcal{A} = \mathcal{B}(A)$ とし K を閉凸錐として $F: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ をコンパクト値可測多価関数とする。すると $eF: A \rightarrow \mathbb{R}^q$ も可測である。

証明 定理の証明には次の補題が必要である。

補題 7

定理 9 と同じ条件のもとで次の (3) 式が成立する。

$$(3) \quad \text{Gr}(eF) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{ (a, x) \in A \times \mathbb{R}^q \mid \emptyset \neq K(x + d_{nj}) \cap F(a) \subset U(x; \frac{1}{n}) \}$$

但し $\{d_k: k=1, 2, \dots\}$ を $\mathbb{R}^q$ の dense subset とし、各 n に対して、

$$\{d_{nj}: j=1, 2, \dots\} = U(x; \frac{1}{n}) \cap \{d_k: k=1, 2, \dots\} \text{ とおいてゐる。}$$

補題 7 の証明 (3) の右辺の集合の元を任意に取る。すると任意の n に対して $i(n)$ が存在して $\phi \neq K(x + d_{n i(n)}) \cap F(a) \subset U(x; \frac{1}{n})$ を満たす。各々の n に対して $z_n \in K(x + d_{n i(n)}) \cap F(a) \subset U(x; \frac{1}{n})$ を選ぶことができる。すると $x = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ となるので $x \in \overline{F(a)}$ である。

逆に任意の $(a, x) \in Gr(\overline{F})$ を取ると $F(a)$ の点列 $\{z_m : m=1, 2, \dots\}$ が存在して $z_m \rightarrow x$ となる。ここで次の (4) を満たさないような n_0 が存在すると仮定する。

(4) $\phi \neq K(x + d_{n_0 i}) \cap F(a) \subset U(x; \frac{1}{n_0})$ for all i .

$z_\ell \in U(x; \frac{1}{2n_0})$ を固定して考えることにする。今 $K(x)$ は内点を持つといえるので $\{d_{n_0 j} : j=1, 2, \dots\}$ の部分列 $\{d_{n_0 j_k} : k=1, 2, \dots\}$ で $x + d_{n_0 j_k} \rightarrow z_\ell$ as $k \rightarrow \infty$ であって、かつすべての k に対して $x + d_{n_0 j_k} \leq_K z_\ell$ となるようなものが取れる。故にこの事実と (4) から次の (5) が成立することになる。

(5) $\phi \neq F(a) \cap K(x + d_{n_0 j_k}) \not\subset U(x; \frac{1}{n_0})$ for all k

そこで点列 $\{p_{j_k} : k=1, 2, \dots\}$ を $p_{j_k} \in F(a) \cap K(x + d_{n_0 j_k}) \cap U(x; \frac{1}{n_0})^c$ とすると $F(a)$ がコンパクトであることから $\{p_{j_k} : k=1, 2, \dots\}$ の収束部分列 $\{p_{j_{k'}} : k'=1, 2, \dots\}$ とその収束極限 $p_0 \in F(a)$ が存在する。すべての k' に対して $p_{j_{k'}} - (x + d_{n_0 j_{k'}}) \in K$ から $k' \rightarrow \infty$ として $p_0 - z_\ell \in K$ を得る。これは矛盾である。

さて定理 9 を証明する準備が出来た。各々の (n, i) に対して $\Lambda_1^{(n, i)}: A \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\Lambda_1^{(n, i)}(a, x) = K(x + dni) \cap F(a)$ で定義し、 $\Lambda_2^{(n, i)}: A \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\Lambda_2^{(n, i)}(a, x) = K(x + dni) \cap F(a) \cap U(x; \frac{1}{n})^c$ で定義する。すると各々の (n, i) に対して補題 7 と定理 3 と集合値関数 $x \mapsto U(x; \frac{1}{n})^c$ の可測性により、 $\Lambda_1^{(n, i)}$ と $\Lambda_2^{(n, i)}$ は可測であることがわかる。故に $\text{Gr}(\overline{eF})$ を表現すると逆式になるので、これは $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$ に属す。

$$\text{Gr}(\overline{eF}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} [\text{dom}(\Lambda_1^{(n, i)}) \cap \{A \times \mathbb{R}^2 - \text{dom}(\Lambda_2^{(n, i)})\}] .$$

従って [5] の中にある定理を使うと $\overline{eF}: A \rightarrow \mathcal{C}(X)$ はボレル可測写像となっている。故に $eF: A \rightarrow X$, あるいは $eF: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ が可測多価関数であることが定理 2 と定理 4 からわかる。以上で定理 9 の証明は終った。

もし $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ が有界値可測なら、 SF の可測性は定理 8 と定理 9 と同じように述べることができる。

ところで次の定理は SF のボレル可測選択の存在を扱っているものである。

定理 10

A をポーランド空間のボレル集合とし K を開凸錐とし、 $F: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ を可測多価関数とする。すると $\text{dom } SF \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ であつて $SF: \text{dom } SF \rightarrow \mathbb{R}^2$ はボレル可測選択を持つ。

証明 補題 6 から $\text{dom } SF \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^?)$ であり, 補題 4 から $SF(a)$ はすべて $a \in A$ に対して閉集合であることがわかる。すると補題 3 から $\text{Gr}(SF) \in \mathcal{B}(\text{dom } SF) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^?)$ となるので, 定理 5 によって SF がボレル可測選択をもつことがわかる。

参考文献

- [1] L.D. BROWN and R. PURVES, *Measurable selections of extrema*, *Ann. Stat.* Vol. 1, No. 5, 902-912 (1973).
- [2] G. DEBREU, *Integrations of correspondences*, *Proc. fifth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob.* Vol. 2, No. 1, 351-372 (1965).
- [3] N. FURUKAWA, *Characterization of optimal policies in vector-valued Markov decision processes*. Submitted to *Math. Operations Research*.
- [4] C. J. HIMMELBERG, *Measurable relations*, *Fund. Math.* 87, 53-72 (1975).
- [5] C. J. HIMMELBERG, T. PARTHASARATHY and F. S. VAN VLECK, *Optimal plans for dynamic programming problems*, *Math. Operations Research* Vol. 1, No. 4, 390-394 (1976).
- [6] K. KURATOWSKI, *Topology* Vol 1, New York-London-Warszawa (1966).
- [7] S. J. LEESE, *Multifunction of Souslin type*, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 11, 395-411 (1974).
- [8] E. MICHAEL, *Topologies on spaces of subsets*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 71, 152-182 (1951).
- [9] R. T. ROCKAFELLAR, *Measurable dependence of convex sets and functions on parameters*, *J. Math. Anal. Appl.* 28, 4-25 (1969).