

双曲 4g 角形と曲面群の PSU(1,1)-表現

岡井孝行 (Takayuki Okai)

以下の内容は、講演の Note に若干の補足を加えたものであり、証明等の詳細に関しては、[O3]を見られたい。なお、 Σ_g は種数 g の有向閉曲面を、 $\mathcal{T}_g$ はその Teichmüller 空間を表す。

0. Preliminaries

Review of [O1], [O2]. Poincaré disk $\mathbb{D}^2$ 内に、各辺は clock-wise に

$\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$ と名前が付き (但し、 $g \geq 2$)。

$$\begin{cases} \text{辺 } \alpha_i \text{ の長さ} = \text{辺 } \alpha_i^{-1} \text{ の長さ} = l_i \\ \text{辺 } \beta_i \text{ の長さ} = \text{辺 } \beta_i^{-1} \text{ の長さ} = \widehat{l}_i \end{cases} \quad (1 \leq i \leq g).$$

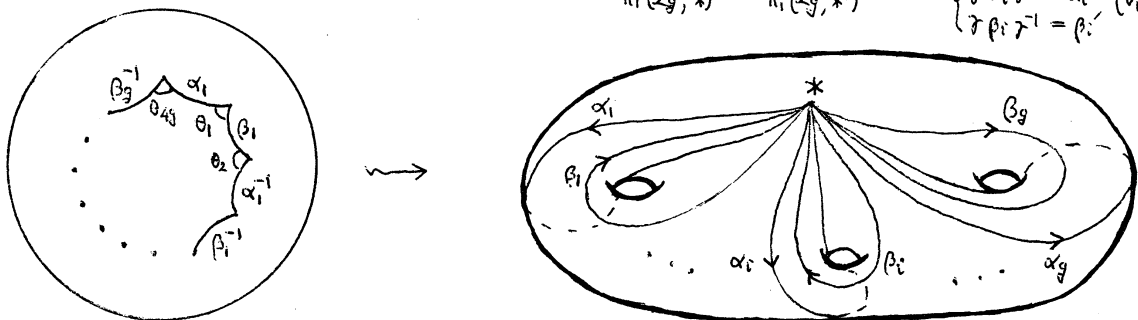
$$\alpha_i \text{ と } \beta_i \text{ の内角} = \theta_i, \dots, \beta_g^{-1} \text{ と } \alpha_1 \text{ の内角} = \theta_{4g}, \quad \sum_{j=1}^{4g} \theta_j = 2\pi$$

と n 個 hyperbolic geodesic $4g$ -gon が与えられたとき、これから、marked Riemann

surface $[(\Sigma_g, h), (\alpha_1, \dots, \beta_g)] \in \mathcal{T}_g$ を得る。(但し、marking $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ は $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の

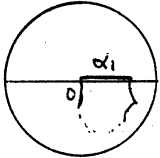
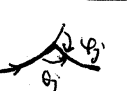
system of generators $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ の次の $\sim$ による同値類：

$$\begin{matrix} (\alpha_1, \dots, \beta_g) & \sim & (\alpha'_1, \dots, \beta'_g) \\ \pi_1(\Sigma_g, *) & & \pi_1(\Sigma_g, *) \end{matrix} \iff \begin{matrix} \exists \gamma: \text{path from } * \text{ to } *' \\ \text{s.t. } \begin{cases} \gamma \alpha_i \gamma^{-1} = \alpha'_i \\ \gamma \beta_i \gamma^{-1} = \beta'_i \end{cases} \quad (v_i) \end{matrix}$$

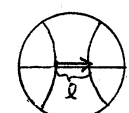


($\alpha_1, \dots, \beta_g$) は hyperbolic $4g$ -gon の頂点を同一視して得る点 $* \in \bar{\Sigma}_g$ から $*$ への geodesic arcs になる。このとき、

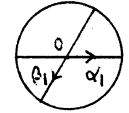
(1). この $(\bar{\Sigma}_g, h), (\alpha_1, \dots, \beta_g)$ に対応する holonomy 表現 $\rho: \pi_1(\bar{\Sigma}_g, *) \rightarrow \mathrm{PSU}(1, 1)$

が、 (辺 α_i を $0 \in \mathbb{D}^2$ から実軸方向に向かう geodesic arc とする) という “normalization” の下で (θ_j の代りに外角 $\varphi_j = -\pi + \theta_j$ を使う: )

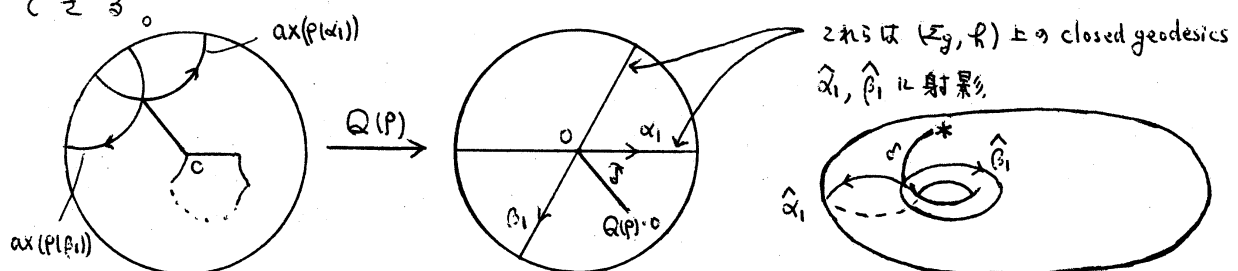
$$(\star): \begin{cases} \rho(\alpha_i) = e\left(\sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j\right) \mathrm{eh}(\ell_i) e(\pi - (\varphi_{4i-2} + \varphi_{4i-1})) e\left(-\sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j\right) \\ \rho(\beta_i) = e(-\pi + \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j) \mathrm{eh}(\widehat{\ell}_i) e(-\pi + (\varphi_{4i-3} + \varphi_{4i-2})) e\left(\pi - \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j\right) \end{cases}$$

(但し $e(\varphi) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix}$, $\mathrm{eh}(\ell) = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}(\frac{\ell}{2}) & \mathrm{sh}(\frac{\ell}{2}) \\ \mathrm{sh}(\frac{\ell}{2}) & \mathrm{ch}(\frac{\ell}{2}) \end{bmatrix}$ )

と読み取れる。(注: これは $\frac{0 \in \mathbb{D}^2}{\mathbb{Z}_1 \in \pi_1 \mathbb{D}^2}$ の $\rho(\alpha_i), \rho(\beta_i)$ による行き先を求めたもの)

(2). ρ が standard position にある $\iff$ $\begin{cases} \mathrm{ax}(\rho(\alpha_i)) = \text{the real axis} \\ \text{and} \\ \mathrm{ax}(\rho(\alpha_i)) \cap \mathrm{ax}(\rho(\beta_i)) = \{0\} \subset \mathbb{D}^2 \end{cases}$ 

とすると、(1) で求めた ρ を standard position に移すような conjugate transformation $Q(P) \in \mathrm{PSU}(1, 1)$ を構成できる。さらに、 0 と $Q(P) \cdot 0$ を結ぶ geodesic arc $\widehat{\gamma}$ を $\bar{\Sigma}_g$ に射影することで (それを $\widehat{\gamma}$ と書く)、与えられた hyperbolic $4g$ -gon から出来る α_i, β_i (geodesic arcs from $*$ to $*$) に関しての $*$ の $(\bar{\Sigma}_g, h)$ 内での位置、及び $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ の $\pi_1(\bar{\Sigma}_g, *)$ の generators としての choice の仕方 も特定できる。

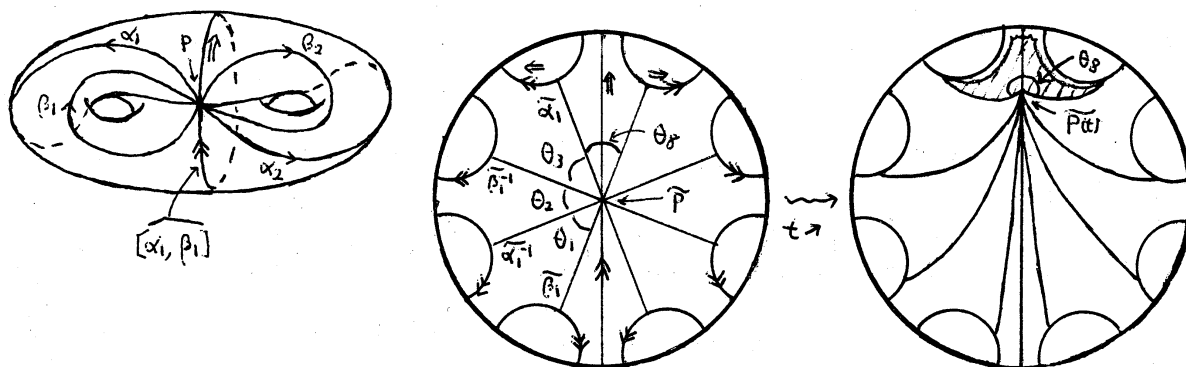


注. Σ_g の marking $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ を fix すると $\pi_1(\Sigma_g, *)$ の inner automorphism の自由度により、それを represent する $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g))$ のとり方は $\widetilde{\Sigma}_g$ 分だけある ($\{*(\text{fixed}) \text{ から any } * \text{ への path の homotopy class} \} = \widetilde{\Sigma}_g$)。

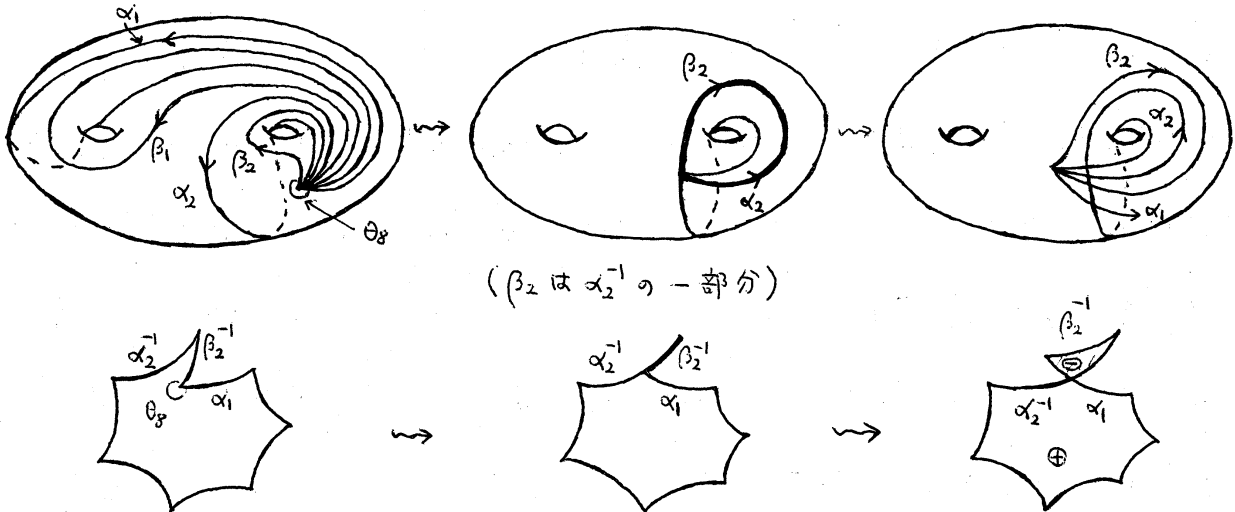
一般に、 $((\Sigma_g, h), (\alpha_1, \dots, \beta_g))$ (Riemann surface with fixed marking) にあって、 $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ を represent する $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g)) \in \widetilde{\Sigma}_g$ を任意にとると、この $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$ に沿って $\mathbb{D}^2$ 上で hyperbolic $4g$ -gon を描くと、convex とは限らないし、self-intersection があるかも知れない。

例. (L. Keen [K]) $\alpha_1 = \hat{\alpha}_1, \beta_1 = \hat{\beta}_1$ とし、左ものは (Σ_g, h) に対して convex な hyperbolic $4g$ -gon をなす。 $((\Sigma_g, h))$ 上の closed curve γ に対して、 γ に free-homotopic な唯一の closed geodesic を $\hat{\gamma}$ で表す。

例. (non-convex な (Σ_g, h) の基本領域を囲む hyperbolic $4g$ -gon (S. Kojima))
まず、正 θ_j 角形 ($\theta_j = \frac{2\pi}{g}$) から出来る $((\Sigma_2, h), (\alpha_1, \dots, \beta_2))$ を用意する。
対称性により、base point p は $[\alpha_1, \beta_1]$ 上にある。そこで、 p を $[\alpha_1, \beta_1]$ 上を、その向きに動かす ($p(t)$ ($t \geq 0$) と書く) と、 t が十分大で、 $\theta_g > \pi$ となる。
この過程で、 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ を表す geodesic arcs (from $p(t)$ to $p(t)$) は $p(t)$ 以外で交わらず、こうして出来る non-convex hyperbolic 8 -gon は (Σ_2, h) の基本領域を囲む。



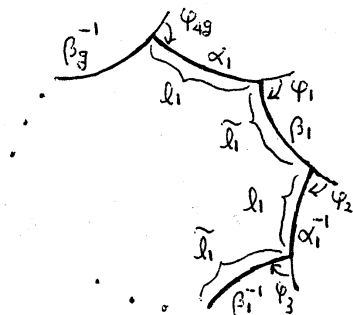
“例” (self-intersection のある hyperbolic $4g$ -gon) やはり正八角形から始めて、今度は base point を  の方向に動かすと、次の図のようになるであろう：



そこで、(後で扱う $l_i = 0$ or $\tilde{l}_i = 0$ の場合も考慮に入れて)

Definition. (1). $\mathcal{l} = (l_i) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^g$, $\tilde{\mathcal{l}} = (\tilde{l}_i) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^g$, $\varphi = (\varphi_j) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{4g}$ に対して、 $(\mathcal{l}, \tilde{\mathcal{l}}, \varphi)$ が “system of data of a marked hyperbolic $4g$ -gon”
 $\iff \begin{cases} \textcircled{1} \sum_{j=1}^{4g} \varphi_j \equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \textcircled{2} \prod_{i=1}^g \{ \text{eh}(l_i) e(\varphi_{4i-3}) \text{eh}(\tilde{l}_i) e(\varphi_{4i-2}) \text{eh}(l_i) e(\varphi_{4i-1}) \text{eh}(\tilde{l}_i) e(\varphi_{4i}) \} = I \end{cases}$

(2). system of data $(\mathcal{l}, \tilde{\mathcal{l}}, \varphi)$ から出来る $\mathbb{D}^2$ 内の hyperbolic $4g$ -gon (長さ 0 の辺があってもよいので、geodesic arcs の union とするべきか) の marked isometry class を $X(\mathcal{l}, \tilde{\mathcal{l}}, \varphi)$ と書き marked hyperbolic $4g$ -gon とする。



(注. 条件②は $X(\mathcal{l}, \tilde{\mathcal{l}}, \varphi)$ が closing するための条件)

1. Case for the Teichmüller component

Fact (W. Goldman [G]). space of representations $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1)) / \text{conj.}$

は、その Euler number e ($2-2g \leq e \leq 2g-2$) により 連結成分に分かれ、

$e = 2-2g$ の成分 $\longleftrightarrow$ holonomy 表現 から成る成分 $\longleftrightarrow \mathcal{T}_g$ 。

$((\Sigma_g, \mathbb{R}), (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\beta}_g))$ と $(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\beta}_g)$ を represent する $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g))$

を任意に与えると、これにより marked hyperbolic $4g$ -gon $X_{\mathbb{R}, m} = X(l, \tilde{l}, \varphi)$

($\forall l_i, \tilde{l}_i > 0$) が構成され、この $(l, \tilde{l}, \varphi)$ から $(*)$ により、 $f = f(l, \tilde{l}, \varphi)$

with $e(f) = 2-2g$ が出来た。(注 条件②の下で「① $\iff$ この f が

$\prod_{i=1}^g [p(\alpha_i), p(\beta_i)] = I$ を満たし、表現になる」) ここで、逆に、abstract

な f with $e(f) = 2-2g$ から出発して、それに対応する marked hyperbolic $4g$ -gon (normalized) を構成できることを主張する：

Lemma 1.1.1. $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in \text{PSU}(1,1)$ with $b \neq 0$. は $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} = e(\Phi) e(h) e(\Theta)$

with $l > 0$, $\Phi, \Theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ と unique に書ける (Cartan decomposition).

(① $\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in \text{PSU}(1,1)$ の $\text{SU}(1,1)$ への lifts を $\pm \begin{pmatrix} |a|e^{i\theta} & |b|e^{i\varphi} \\ |b|e^{-i\varphi} & |a|e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ と書くとき
 $l = 2 \log\{|a| + \sqrt{|a|^2 - 1}\}$, $(\Phi, \Theta) = (\theta + \varphi, \theta - \varphi)$ と決まる。□)

(注. 「 $l=0$ 」は $5x$ と「 $b=0$ 」に対応し、このとき $e(\Phi) e(h) e(\Theta) = e(\Phi + \Theta)$ で、 Φ, Θ に関しては和 $\Phi + \Theta$ のみが意味を持つ。)

そして、最初に $\check{f}$ with $e(\check{f}) = 2-2g$ が与えられたとき、 $\check{f}(\alpha_i) = e(\check{\Phi}_i) e(h_i) e(\check{\Theta}_i)$ と Cartan 分解し、 $f = e(\check{\Phi}_1)^{-1} \check{f} e(\check{\Phi}_1)$ とおく。(この f は $f(\alpha_i) = e(\Phi_i) e(h_i) e(\Theta_i)$ において「 $\Phi_i = 0$ 」を満たす。即ち、 f は g_0 の意味で normalize されたものになる。)

ここで、
$$\begin{cases} p(\alpha_i) = e(\Phi_i) e h(l_i) e(\Theta_i) \\ p(\beta_i) = e(\widehat{\Phi}_i) e h(\widehat{l}_i) e(\widehat{\Theta}_i) \end{cases} \quad (l_i, \widehat{l}_i > 0) \quad \text{と Cartan 分解するとき、}$$

これを (★) のように書きたい。

Lemma 1.1.2. $\forall \Phi_i, \Theta_i, \widehat{\Phi}_i, \widehat{\Theta}_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad (i=1, \dots, g) \text{ with } \Phi_1 = 0.$
 が与えられたとき、 $\varphi_j \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad (j=1, \dots, 4g) \text{ with } \sum_{j=1}^{4g} \varphi_j \equiv 0.$ に対する
 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j = \Phi_i, & (\pi - (\varphi_{4i-2} + \varphi_{4i-1})) + (-\sum_{j=1}^{4i-4} \varphi_j) = \Theta_i \\ -\pi + \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j = \widehat{\Phi}_i, & (-\pi + (\varphi_{4i-3} + \varphi_{4i-2})) + (\pi - \sum_{j=1}^{4i-1} \varphi_j) = \widehat{\Theta}_i \end{cases} \quad \text{は、}$$

$$(\star\star): \begin{cases} \varphi_{4i-3} = \Theta_i + \widehat{\Phi}_i \\ \varphi_{4i-2} = \pi - \Theta_i + \widehat{\Theta}_i \\ \varphi_{4i-1} = -\Phi_i - \widehat{\Theta}_i \\ \varphi_{4i} = -\pi - \widehat{\Phi}_i + \Phi_{i+1} \end{cases} \quad (i=1, \dots, g \pmod{g})$$

と unique に解ける。

□

こうして定まる $(\mathcal{L}, \widehat{\mathcal{L}}, \varphi)$ が ①, ② を満たすことも言えて、

Theorem 1.1. $\{p \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1)) ; e(p) = 2-2g, p \text{ は } \Phi_1 = 0 \text{ を満たす}\}$
 $(= \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g} \text{ とおく})$ と $\{(\mathcal{L}, \widehat{\mathcal{L}}, \varphi) \in (\mathbb{R}_{>0})^g \times (\mathbb{R}_{>0})^g \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{4g}; (\mathcal{L}, \widehat{\mathcal{L}}, \varphi) \text{ は}$
 ①, ② 及び $e(p(\mathcal{L}, \widehat{\mathcal{L}}, \varphi)) = 2-2g \text{ を満たす}\}$ は上記の対応により 1:1. □

次に、これは (mod. conj. でなくて) 表現のレベルにおいて何をとりえた
ものか、について調べる。まず、 $\forall \check{p} \text{ with } e(\check{p}) = 2-2g \text{ を } \Phi_1 = 0$
 に normalize する操作は S^1 -bundle $(e(\Phi_i) \in S^1)$ を形成する。次に、

$\forall \rho \in \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g}$ に対して、その standard position が定まり、それから決まる δ を用いて $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g)) \in \widehat{\Sigma}_g$ が定まる。 $\alpha_1, \dots, \beta_g$ を $*$ から $*$ に到る geodesic arcs ($[P] \in \mathcal{T}_g$ の定める hyperbolic structure に関しての) として実現すると、それがちょうど Th. 1.1 によって ρ から定まる $X(l, \mathcal{I}, \varphi)$ を与えるものになる。以上をまとめると (右肩の「 $e=2-2g$ 」は連結成分を示す) :

Theorem 1.2. 上述の $\check{\rho} \mapsto \rho \mapsto [P]$ は次の fibrations を形成する:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1))^{e=2-2g} & \cong & \mathcal{T}_g \times \widehat{\Sigma}_g \times S^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Rep}_{\Phi_1=0}^{e=2-2g} & \cong & \mathcal{T}_g \times \widehat{\Sigma}_g \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1))^{e=2-2g} / \text{conj.} & \cong & \mathcal{T}_g
 \end{array}$$

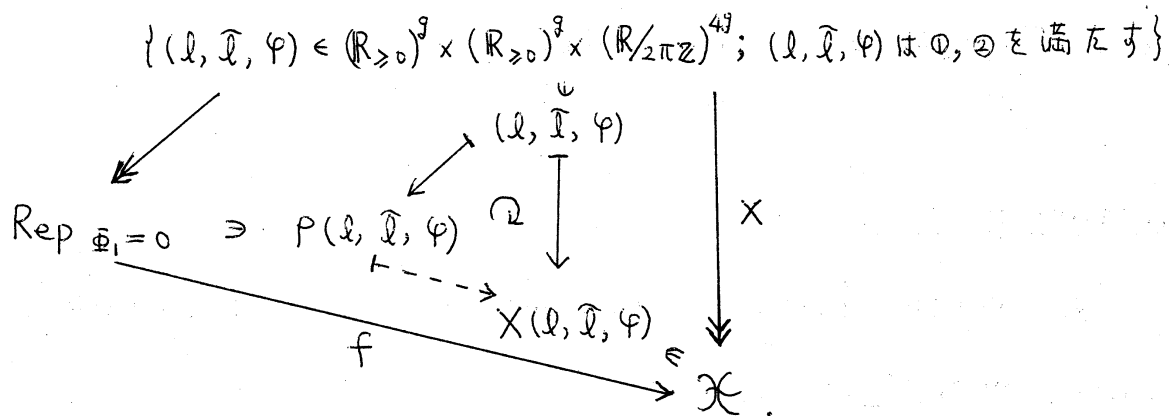
ここで、 $\mathcal{T}_g \times \{m\} \ni \rho$ ($m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g)) \in \widehat{\Sigma}_g$) は m により与えられた $(\alpha_1, \dots, \beta_g)$ に沿う holonomy 表現 $\pi_1(\Sigma_g, *) \xrightarrow{\rho} \text{PSU}(1,1)$ (with 「 $\Phi_1 = 0$ 」) として幾何学的に意味付けられ、 $m = (*; (\alpha_1, \dots, \beta_g))$ は ρ から具体的に求めることが出来る。□

2. Components with small Euler numbers

$|e(\rho)| < 2-2g$ のときは、 $(l, \mathcal{I}, \varphi)$ から $(\star)$ により $\rho(l, \mathcal{I}, \varphi)$ は決まるが、 ρ が与えられても、system of data $(l, \mathcal{I}, \varphi)$ が unique に決まるとは限らない ($l_i = 0$ のとき、 $\Phi_i + \Theta_i$ から Φ_i, Θ_i は unique に決まらなないので)。しかし、ものとしての $X(l, \mathcal{I}, \varphi)$ は ρ から unique

に決まる:

Theorem 2. $\exists f : \{p \in \text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \text{PSU}(1,1)) ; p \text{ は } \langle \Phi_1=0 \rangle \text{ を満たす} \}$
 $(= \text{Rep } \Phi_1=0 \text{ と書く}) \longrightarrow \{\text{marked hyperbolic } 4g\text{-gon } X(l, \widehat{l}, \varphi)\} (= \mathcal{X} \text{ と書く}) \text{ s.t.}$

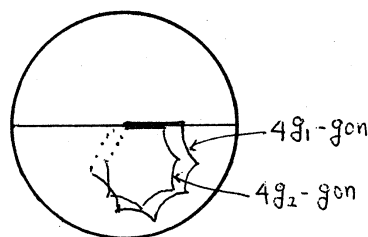


(注 map $X : (l, \widehat{l}, \varphi) \mapsto X(l, \widehat{l}, \varphi)$ は $\forall l_i, \widehat{l}_i > 0$ に制限すると 1:1.)
 p に対して $l_i = 0$ となるときは $p \in \text{Rep } \Phi_1=0$ と見なす。

証明の方針: (**) の式を用いて $l_i = 0$ or $\widehat{l}_i = 0$ となるときにも $X(l, \widehat{l}, \varphi)$ の picture が $p(l, \widehat{l}, \varphi)$ の data から再現できることを言う。□

例. $\text{Im } p \subset K = \{e(\theta) ; \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ (abel 群) のとき $X(l, \widehat{l}, \varphi) = \text{one point}$.
 (従って f は単射ではない。)

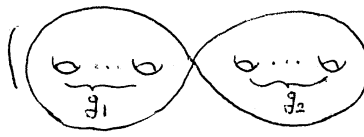
例 $X(l, \widehat{l}, \varphi)$ が



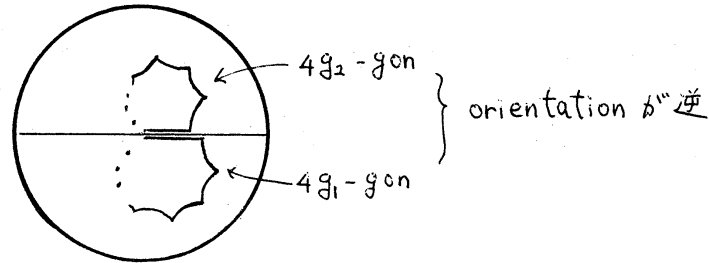
$(g_1 + g_2 = g)$

となるとき、

(このときは $\forall l_i, \widehat{l}_i > 0$)

(のようなものを想定) $e(p) = (2-2g_1) + (2-2g_2)$
 $= 2 - 2g + 2$.

例 $X(2, \mathbb{Z}, \varphi)$ の



のとき, $e(p) = (2-2g_1) + (2g_2-2)$.

References.

- [G] W. Goldman: Topological components of spaces of representations,
 Invent. Math. 93 (1988), 557-607.
- [K] L. Keen: Canonical polygons for finitely generated
 Fuchsian groups, Acta Math. 115 (1966), 1-16.
- [O1] T. Okai: Reading the Fuchsian representations of a closed
 Riemann surface from its fundamental domains, preprint.
- [O2] T. Okai: Hyperbolic $4g$ -gons and Fuchsian representations,
 数理解析研究所講究録 967 Analysis of Discrete Groups
 (1996), 132-141.
- [O3] T. Okai: Hyperbolic $4g$ -gons and $PSU(1,1)$ -representations
 of surface groups, Hokkaido University Technical Report
 Series in Mathematics #51 リーマン面に関連する位相幾
 何学 (1997), 11-19.