

自己相反多項式と微分方程式の標準系

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻 鈴木正俊 (Suzuki Masatosi)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1. はじめに

研究集会の際は “On a sequence of Hilbert spaces of entire functions arising from the Riemann zeta-function” というタイトルで, Riemann ゼータ関数から生ずる微分方程式の標準系 (canonical system) について話した. 大まかなストーリーとしては:

1. Riemann 予想を仮定すると, Riemann ゼータ関数から de Branges 空間という整関数から成るヒルベルト空間が定義できる.
2. 一般に, de Branges 空間から, ある微分方程式の標準系が定まる. (逆に微分方程式の標準系から, de Branges 空間を定める事ができる.)
3. したがって Riemann 予想のもと, Riemann ゼータ関数からある微分方程式の標準系が定まる. そして Riemann 予想は, この標準系のハミルトニアン半正値性に反映される.
4. このハミルトニアンは, Riemann ゼータ関数から具体的に定まるある積分核によって定義される積分作用素のフレドホルム行列式を用いて表示できる.

といったものであった. この後, この話は [11] として出版されることになり, レフェリー氏のお陰もあって, かなり取っ付き易い構成になった (と思う). そういった訳で, 講演時の内容をそのままここで解説するのは, あまり有意義とは思えなくなってしまった.

一方, de Branges 空間や微分方程式の標準系といったものは, 数論方面ではかなりマイナーな話題だと思われる. そこで今回は, 簡単な例を通して, 整関数の零点と微分方程式の標準系のハミルトニアンとの関連を解説しようと思う. 上で述べた Riemann ゼータ関数に対応すべきハミルトニアンの数値計算についても, 最後に少しだけ触れる.

2. 微分方程式の標準系

定義 1. $H(b)$ を区間 $I = (b_0, b_1]$ ($-\infty < b_0 < b_1 \leq \infty$) の殆ど至るところで定義された 2×2 の行列値関数とする. $H(b)$ が I 上殆ど至るところ半正定値な対称行列で, 測度が 0 でない I の部分集合上で 0 でなく, 局所的に可積分 (L^1_{loc}) であるとき, $z \in \mathbb{C}$ をパラメータとする I 上の微分方程式の系

$$\frac{\partial}{\partial b} \begin{bmatrix} A(b, z) \\ B(b, z) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} H(b) \begin{bmatrix} A(b, z) \\ B(b, z) \end{bmatrix}, \quad \lim_{b \rightarrow b_0^+} \begin{bmatrix} A(b, z) \\ B(b, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

を (2 次元の) 標準系と呼ぶ. また $H(b)$ をこの標準系のハミルトニアンと呼ぶ.

定義 2. 整関数 $E(z)$ について,

$$|E(x + iy)| > |E(x - iy)| \quad \forall y > 0$$

が成り立つとき, $E(z)$ は Hermite-Biehler 条件を満たすという.

整関数 $E(z)$ が Hermite-Biehler 条件を満たすならば, $E(z) \pm \overline{E(\bar{z})}$ の零点は全て実軸上にある事が知られている (Lemma 5 of [4], Lemma 2.2 of [8] など).

実整関数の組 $(A(b, z), B(b, z))$ が標準系の解であるとき, これらは各 (regular な) $b \in I$ に対して整関数で, $E(b, z) = A(b, z) - iB(b, z)$ は Hermite-Biehler 条件を満たす. これから特に, $A(b, z), B(b, z)$ の零点は全て実軸上にある.

後の話では $a = \exp(b_1 - b)$ と変数変換した, $[1, a_0)$ ($a_0 = \exp(b_1 - b_0)$) 上の系

$$-a \frac{\partial}{\partial a} \begin{bmatrix} A(a, z) \\ B(a, z) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} H(a) \begin{bmatrix} A(a, z) \\ B(a, z) \end{bmatrix}, \quad \lim_{a \rightarrow a_0^-} \begin{bmatrix} A(a, z) \\ B(a, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

を考える. ($A(a, z)$ は $A(b_1 - \log a, z)$ などと書くべきだが, 混乱は無いだろう.)

3. 自己相反多項式

定義 3. 実数係数の多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^{n-i}$ が $c_0 \neq 0$, $c_i = c_{n-i}$ ($0 \leq \forall i \leq n$) を満たすとき, $f(x)$ を n 次の自己相反多項式 (self-reciprocal polynomial) と呼ぶ.

自己相反多項式の根が全て単位円周上にあるのはどのような場合か, というのは基本的な問題である. これについては多くの研究があり, 例えば最近では Kwon [7], Lakatos [10], Chen [1], Chinen [2, 3] などがある. 大雑把に言って, 多くの結果は $f(x)$ が $x^n - 1$, もしくはこれから生ずる $x^p + x^{p-1} + \cdots + x + 1$ (p : 素数) などの円分多項式に“近い”ならば, $f(x)$ の根が全て単位円周上にある, という結果である.

こういった結果は自然ではあるが, ゼータ関数, L 関数に応用しようとする, これらに対しては適用外になってしまう事が多い (例えば Egorov [6] の最後の注意など).

以下では自己相反多項式の根が全て単位円周上にあるような条件を, 標準系のハミルトニアンを通して調べることを考える.

4. 自己相反多項式と標準系

自己相反多項式 $f(x)$ の最初の係数を $c_0 = 1$ と正規化しておく. $f(x)$ の次数 n が奇数ならば, $(n-1)$ 次の実数係数多項式 $g(x)$ により $f(x) = (x+1)g(x)$ と書けるので, 以下では偶数次の自己相反多項式のみを考える事にし, $n = 2g$ とおく. このとき,

$$x^{-g} f(x) = (x^g + x^{-g}) + \sum_{j=1}^{g-1} c_j (x^{g-j} + x^{-(g-j)}) + c_g$$

と書ける. これに対し $q > 1$ を一つ固定して,

$$F(z) = F(z; q) = q^{-izg} f(q^{iz}) = 2 \cos(z \log q^g) + 2 \sum_{j=1}^{g-1} c_j \cos(z \log q^{g-j}) + c_g$$

とおく. 但し $g = 1$ のときは和 $\sum_{j=1}^{g-1}$ の部分は 0 とする. さらに $\omega > 0$ について,

$$E_\omega(z) = F(z + i\omega), \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} A_\omega(z) &= \frac{1}{2}(E_\omega(z) + \overline{E_\omega(\bar{z})}) = \frac{1}{2}(F(z+i\omega) + F(z-i\omega)), \\ B_\omega(z) &= \frac{i}{2}(E_\omega(z) - \overline{E_\omega(\bar{z})}) = \frac{i}{2}(F(z+i\omega) - F(z-i\omega)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

と定める. ($f(x)$ が実係数なので $\overline{E_\omega(\bar{z})} = F(z-i\omega)$ であることに注意.) このとき $F(z)$, $A_\omega(z)$, $B_\omega(z)$ は全て指数型の実整関数 ($F(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$) である.

実整関数 $F(z)$ の定義から, $F(z)$ の零点が全て実軸上にある事と, 自己相反多項式 $f(x)$ の根が全て単位円周上にある事は同値である. この前者は, 任意の正数 $\omega > 0$ について, 実整関数 $A_\omega(z)$ の零点が全て実である事と同値となる. 実際, $A_\omega(z)$ の零点が全て実ならば, 関数論の Hurwitz の定理により, $F(z) = \lim_{\omega \rightarrow 0+} A_\omega(z)$ の零点も全て実である. 逆に, 指数型の実整関数 $F(z)$ の Hadamard 積表示を用いて, $F(z)$ の零点が全て実軸上にあれば, 任意の $\omega > 0$ について $F(z+i\omega)$ は Hermite-Biehler 条件を満たし, 従って $A_\omega(z)$ (と $B_\omega(z)$) の零点は全て実であることが言える.

したがって $F(z)$ の零点が全て実である事と, 任意の $\omega > 0$ について $E_\omega(z)$ が Hermite-Biehler 条件を満たす事は同値となる. ゆえに $F(z)$ の零点が全て実ならば, 各 $\omega > 0$ について, $E_\omega(z)$ は de Branges 空間とそれに付随する標準系を定める. この標準系のハミルトニアンを $H_\omega = H_\omega(a)$ で表す. $A_\omega(z)$ は偶関数, $B_\omega(z)$ は奇関数なので, de Branges 空間の一般論により H_ω は対角型になる. (de Branges 空間と標準系の関連については Lagarias [8, 9] が良い. 筆者の [11-13] もこれを参考にした部分が多い. de Branges [4, 5] では標準系は積分方程式の形で書かれている.)

以下ではハミルトニアン H_ω を g が小さい場合に具体的を書き下し, $f(x)$ の根が全て単位円周上にあるという条件が, H_ω にどの様に反映されているのかを観察する.

4.1. “ $g = 1/2$ ” の場合. 先に n が偶数の場合のみを考えると宣言したが, あえて $n = 1$ ($g = 1/2$) の場合を考える. 正規化された 1 次の自己相反多項式は $f(x) = x + 1$ に限る. このとき $F(z) = (q^{iz} + q^{-iz}) = 2 \cos(z \log q)$ であり, 対応する実整関数 A_ω, B_ω は

$$A_\omega(z) = (q^\omega + q^{-\omega}) \cos(z \log q), \quad B_\omega(z) = (q^\omega - q^{-\omega}) \sin(z \log q)$$

となる. ここで天下一に

$$\begin{aligned} A_\omega(a, z) &= (q^\omega + q^{-\omega}) \cos(z \log(q/a)), \\ B_\omega(a, z) &= (q^\omega - q^{-\omega}) \sin(z \log(q/a)) \end{aligned}$$

とおくと, これらは明らかに実整関数で

$$\begin{bmatrix} A_\omega(1, z) \\ B_\omega(1, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\omega(z) \\ B_\omega(z) \end{bmatrix}, \quad \lim_{a \rightarrow q^-} \begin{bmatrix} A_\omega(a, z) \\ B_\omega(a, z) \end{bmatrix} = F(0 + i\omega) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり, $m_\omega(a) = (q^\omega + q^{-\omega}) / (q^\omega - q^{-\omega})$ (定数関数) に対して

$$-a \frac{\partial}{\partial a} \begin{bmatrix} A_\omega(a, z) \\ B_\omega(a, z) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} H_\omega(a) \begin{bmatrix} A_\omega(a, z) \\ B_\omega(a, z) \end{bmatrix}, \quad H_\omega(a) = \begin{bmatrix} m_\omega(a)^{-1} & 0 \\ 0 & m_\omega(a) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

が成り立つ. 明らかに $H_\omega(a)$ は任意の $\omega > 0$ に対して $1 \leq a < q$ で正定値である.

したがって $(A_\omega(a, z) \mapsto \frac{A_\omega(a, z)}{F(i\omega)}$ と正規化すれば), $(A_\omega(a, z), B_\omega(a, z))$ は標準系の解になっている. ゆえに任意の $\omega > 0$ について $A_\omega(z) = A_\omega(1, z)$ の零点は全て実であるから, $F(z)$ の零点は全て実である.

以上により, $F(z) = 2 \cos(z \log q)$ の零点は全て実である事が, 標準系を用いて証明された. 根拠となったのは $q^\omega - q^{-\omega} > 0$ ($\omega > 0$) という自明な正値性である.

4.2. $g = 1$ の場合. 判別式による判定法から, $|c_1| \leq 2$ ならば $f(x) = x^2 + c_1x + 1$ の 2 つの根の絶対値は共に 1 である. 以下の通り, 同様の条件が標準系から導かれる.

$f(x) = x^2 + c_1x + 1$ のとき $F(z) = 2 \cos(z \log q) + c_1$ であり, 対応する A_ω, B_ω は

$$A_\omega(z) = (q^\omega + q^{-\omega}) \cos(z \log(q/a)) + c_1, \quad B_\omega(z) = (q^\omega - q^{-\omega}) \sin(z \log(q/a)).$$

ここで天下一りに

$$A_\omega(a, z) = \begin{cases} (q^\omega + q^{-\omega}) \cos(z \log(q/a)) + c_1 \cos(z \log(q^0/a)), & 1 \leq a < \sqrt{q}, \\ (q^\omega + q^{-\omega} + c_1) \cos(z \log(q/a)), & \sqrt{q} \leq a < q, \end{cases}$$

$$B_\omega(a, z) = \begin{cases} (q^\omega - q^{-\omega}) \sin(z \log(q/a)) + c_1 \frac{(q^\omega - q^{-\omega})}{(q^\omega + q^{-\omega})} \sin(z \log(q^0/a)), & 1 \leq a < \sqrt{q}, \\ (q^\omega + q^{-\omega} - c_1) \frac{(q^\omega - q^{-\omega})}{(q^\omega + q^{-\omega})} \sin(z \log(q/a)), & \sqrt{q} \leq a < q \end{cases}$$

とおく. このとき $(A(a, z), B(a, z))$ は $1 \leq a < q$ の各点で a について偏微分可能であり, $(A_\omega(1, z), B_\omega(1, z)) = (A_\omega(z), B_\omega(z))$, $\lim_{a \rightarrow q^-} (A_\omega(a, z), B_\omega(a, z)) = F(0 + i\omega)(1, 0)$ となる. しかも

$$m_\omega(a) = \begin{cases} \frac{(q^\omega + q^{-\omega})}{(q^\omega - q^{-\omega})}, & 1 \leq a < \sqrt{q} \\ \frac{(q^\omega + q^{-\omega})(q^\omega + q^{-\omega} + c_1)}{(q^\omega - q^{-\omega})(q^\omega + q^{-\omega} - c_1)}, & \sqrt{q} \leq a < q \end{cases}$$

とすれば微分方程式の系 (4.3) が成り立つ. この $m_\omega(a)$ の表示から, $|c_1| \leq 2$ ならば $H_\omega(a)$ は任意の $\omega > 0$ について正定値である.

したがって $|c_1| \leq 2$ ならば $(A_\omega(a, z) \mapsto \frac{A_\omega(a, z)}{F(i\omega)}$ と正規化すれば), $(A_\omega(a, z), B_\omega(a, z))$ は標準系の解になっている. ゆえに任意の $\omega > 0$ について $A_\omega(z) = A_\omega(1, z)$ の零点は全て実であるから, $F(z) = 2 \cos(z \log q) + c_1$ の零点は全て実である.

4.3. $g = 2$ の場合. 自己相反多項式 $f(x) = x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_1x + 1$ の根が全て単位円周上にあるならば, $f(x) = (x^2 + d_1x + 1)(x^2 + d_2x + 1)$ ($d_1, d_2 \in \mathbb{R}$) と分解できるから, $c_1 = d_1 + d_2$, $c_2 = d_1d_2 + 2$ により $f(x)$ の根が全て単位円周上にあるような (c_1, c_2) の範囲を求める事ができる. この範囲は以下のようにして標準系から導かれるものと同じになる.

いまの場合 $F(z) = 2 \cos(z \log q^2) + 2c_1 \cos(z \log q) + c_2$ で, 対応する A_ω, B_ω は

$$A_\omega(z) = (q^{2\omega} + q^{-2\omega}) \cos(z \log q^2) + c_1(q^\omega + q^{-\omega}) \cos(z \log q) + c_2,$$

$$B_\omega(z) = (q^{2\omega} - q^{-2\omega}) \sin(z \log q^2) + c_1(q^\omega - q^{-\omega}) \sin(z \log q).$$

またしても天下りだが, $\mu(x) = x + x^{-1}$, $\nu(x) = x - x^{-1}$ として,

$$\begin{aligned}
 A_\omega(a, z) &\stackrel{1 \leq a < \sqrt{q}}{=} \mu(q^{2\omega}) \cos(z \log(q^2/a)) + c_1 \frac{\mu(q^{2\omega}) + 1}{\mu(q^\omega)} \cos(z \log(q/a)) \\
 &\quad + c_2 \cos(z \log(q^0/a)) + \frac{c_1}{\mu(q^\omega)} \cos(z \log(q^{-1}/a)) \\
 &\stackrel{\sqrt{q} \leq a < q}{=} \frac{\mu(q^{3\omega}) + \mu(q^\omega) + c_1}{\mu(q^\omega)} \cos(z \log(q^2/a)) \\
 &\quad + c_1 \frac{\mu(q^{4\omega}) + \mu(q^{2\omega}) + (2 - c_2)}{\mu(q^{3\omega}) + \mu(q^\omega) - c_1} \cos(z \log(q/a)) \\
 &\quad + \frac{c_2 \mu(q^{4\omega}) + (2c_2 - c_1^2) \mu(q^{2\omega}) + (2c_2 - c_1^2)}{\mu(q^{4\omega}) + 2\mu(q^{2\omega}) - c_1 \mu(q^\omega) + 2} \cos(z \log(q^0/a)) \\
 &\stackrel{q \leq a < q\sqrt{q}}{=} \frac{\mu(q^{5\omega}) + (1 + c_2) \mu(q^{3\omega}) + (2 - c_1^2 + c_2) \mu(q^\omega)}{\mu(q^{3\omega}) + \mu(q^\omega) - c_1} \cos(z \log(q^2/a)) \\
 &\quad + c_1 \frac{\mu(q^{4\omega}) + \mu(q^{2\omega}) + (2 - c_2)}{\mu(q^{3\omega}) + \mu(q^\omega) - c_1} \cos(z \log(q/a)) \\
 &\stackrel{q\sqrt{q} \leq a < q^2}{=} (\mu(q^{2\omega}) + c_1 \mu(q^\omega) + c_2) \cos(z \log(q^2/a)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_\omega(a, z) &\stackrel{1 \leq a < \sqrt{q}}{=} \nu(q^{2\omega}) \sin(z \log(q^2/a)) + c_1 \frac{\nu(q^{3\omega})}{\mu(q^{2\omega})} \sin(z \log(q/a)) \\
 &\quad + c_2 \frac{\nu(q^{2\omega})}{\mu(q^{2\omega})} \sin(z \log(q^0/a)) + c_1 \frac{\nu(q^\omega)}{\mu(q^{2\omega})} \sin(z \log(q^{-1}/a)) \\
 &\stackrel{\sqrt{q} \leq a < q}{=} \frac{\nu(q^{4\omega}) - c_1 \nu(q^\omega)}{\mu(q^{2\omega})} \sin(z \log(q^2/a)) \\
 &\quad + c_1 \frac{\nu(q^{6\omega}) + \nu(q^{4\omega}) + (1 - c_2) \nu(q^{2\omega})}{\mu(q^{5\omega}) + \mu(q^{3\omega}) + c_1 \mu(q^{2\omega}) + 2\mu(q^\omega)} \sin(z \log(q/a)) \\
 &\quad + \frac{c_2 \nu(q^{5\omega}) + (c_2 - c_1^2) \nu(q^{3\omega})}{\mu(q^{5\omega}) + \mu(q^{3\omega}) + c_1 \mu(q^{2\omega}) + 2\mu(q^\omega)} \sin(z \log(q^0/a)) \\
 &\stackrel{q \leq a < q\sqrt{q}}{=} \frac{\nu(q^{5\omega}) + (1 - c_2) \nu(q^{3\omega}) + (c_1^2 - c_2) \nu(q^\omega)}{\mu(q^{3\omega}) + \mu(q^\omega) + c_1} \sin(z \log(q^2/a)) \\
 &\quad + \frac{\nu(q^{9\omega}) + \dots + (c_2^2 - c_1^2 c_2 + c_1^2 - c_2 + 1) \nu(q^\omega)}{\mu(q^{8\omega}) + \dots + (6 + 4c_2 - 2c_1^2)} \sin(z \log(q/a)) \\
 &\stackrel{q\sqrt{q} \leq a < q^2}{=} \frac{\nu(q^\omega)}{\mu(q^\omega)} \frac{(\mu(q^{4\omega}) + (2 - c_2) \mu(q^{2\omega}) + (2 + c_1^2 - 2c_2))}{(\mu(q^{4\omega}) + c_2 \mu(q^{2\omega}) + (2 - c_1^2))} \\
 &\quad \times (\mu(q^{2\omega}) - c_1 \mu(q^\omega) + c_2) \sin(z \log(q^2/a))
 \end{aligned}$$

とおく. ($q \leq a < q\sqrt{q}$ での $B_\omega(a, z)$ の表示は少々長いので一部省略した.) このとき
先と同様に, $(A(a, z), B(a, z))$ は $1 \leq a < q^2$ の各点で a について偏微分可能であり,

$(A(1, z), B(1, z)) = (A_\omega(z), B_\omega(z))$, $\lim_{a \rightarrow q^-} (A(a, z), B(a, z)) = F(0 + i\omega)(1, 0)$. しかも

$$m_\omega(a) \stackrel{1 \leq a < \sqrt{q}}{=} \frac{\mu(q^\omega) \mu(q^{2\omega})}{\nu(q^\omega) [\mu(q^{2\omega}) + 2]}$$

$$\stackrel{\sqrt{q} \leq a < q}{=} \frac{\mu(q^\omega) \mu(q^{2\omega}) [\mu(q^{3\omega}) + \mu(q^\omega) + c_1]}{\nu(q^\omega) [\mu(q^{2\omega}) + 2] [\mu(q^{3\omega}) + \mu(q^\omega) - c_1]}$$

$$\stackrel{q \leq a < q\sqrt{q}}{=} \frac{\mu(q^\omega) [\mu(q^{3\omega}) + \mu(q^\omega) + c_1] [\mu(q^{4\omega}) + c_2 \mu(q^{2\omega}) + (2 - c_1^2)]}{\nu(q^\omega) [\mu(q^{3\omega}) + \mu(q^\omega) - c_1] [(\mu(q^{4\omega}) + (2 - c_2) \mu(q^{2\omega}) + (2 + c_1^2 - 2c_2))]}$$

$$\stackrel{q\sqrt{q} \leq a < q^2}{=} \frac{\mu(q^\omega) [\mu(q^{4\omega}) + c_2 \mu(q^{2\omega}) + (2 - c_1^2)] [\mu(q^{2\omega}) + c_1 \mu(q^\omega) + c_2]}{\nu(q^\omega) [\mu(q^{4\omega}) + (2 - c_2) \mu(q^{2\omega}) + (2 + c_1^2 - 2c_2)] [\mu(q^{2\omega}) - c_1 \mu(q^\omega) + c_2]}$$

に対して, 微分方程式の系 (4.3) が成り立つ. この表示から

$$\frac{4 + c_1}{4 - c_1} \geq 0, \quad \frac{8 - 2c_1^2 + 4c_2}{8 + c_1^2 - 4c_2} \geq 0, \quad \frac{2 + 2c_1 + c_2}{2 - 2c_1 + c_2} \geq 0$$

ならば $H_\omega(a)$ は任意の $\omega > 0$ について正定値である. これから $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ が 2 直線 $2c_1 - c_2 - 2 = 0$, $2c_1 + c_2 + 2 = 0$ と放物線 $c_1^2 - 4c_2 + 8 = 0$ に囲まれた領域かその境界に含まれていれば, $F(z)$ の零点が全て実であることが分かる. この領域は $c_1 = d_1 + d_2$, $c_2 = d_1 d_2 + 2$ を $|d_i| \leq 2$ ($i = 1, 2$) の範囲で動かした領域と一致している.

4.4. $g \geq 3$ の場合. 以上のようにして, 自己相反多項式の根が全て単位円周上にあるための条件が, 標準系のハミルトニアンを通して求められることを見た. 一般に $A_\omega(a, z)$, $B_\omega(a, z)$, $m_\omega(a)$ は $1 \leq a < q^g$ 内の $2g$ 個の区間 $q^{j/2} \leq a < q^{(j+1)/2}$ ($0 \leq j \leq 2g - 1$) 毎に定義された a について偏微分可能な関数になるが, すでに $g = 2$ で片鱗が見えるように, g が大きくなるにつれて $a \approx q^g$ での表示は急速に複雑化してゆく.

一般の $2g$ 次の自己相反多項式 $f(x)$ について, 対応する $A_\omega(a, z)$, $B_\omega(a, z)$, $m_\omega(a)$ を計算するアルゴリズムは出来ており, 実際に $g = \frac{1}{2}, 1$ の場合はこれに従って手計算でこれらを計算し, $g = 2$ の場合はこのアルゴリズムに従って計算機に計算させた. しかし現時点では, これらの関数を係数 $c_1, \dots, c_g$ と q^ω の有理式として (意味が良く分かる形で) 書き下すところまでは考察が及んでいない. このため, 一般の場合はもう少し整理してから発表することにしたい.

5. 補足

今回根が全て単位円周上にあるような自己相反多項式に対応するハミルトニアンを計算することを試みたが, もともとの動機は [11] にある Riemann ゼータ関数に対応すべきハミルトニアンを計算する事にあつた (※ [11] の $m_\omega(a)^2$ がこの小論の $m_\omega(a)$ にあたる). そちらではハミルトニアンを積分作用素のフレドホルム行列式により表示したのだが, この表示では $0 < \omega \leq 1$ でのハミルトニアンの半正値性を数値計算的に調べるのにあまり都合がよろしくなかった. これは積分作用素の積分核の可積分性が, $\omega > 1$ では連続, $1/2 < \omega \leq 1$ では L^2 , $0 < \omega \leq 1/2$ では L^1 だが L^2 でない, のように ω の値によって変化していく事による.

そこで Riemann ゼータ関数の積分表示の Riemann 和による表示

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_1^\infty \sqrt{x}\phi(x)(x^{s-\frac{1}{2}}+x^{-(s-\frac{1}{2})})\frac{dx}{x} \quad \left(s=\frac{1}{2}-iz\right) \\ &= \lim_{T\rightarrow\infty}\lim_{q\rightarrow 1^+}\log q \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\log T}{\log q} \rfloor} q^{\frac{k}{2}}\phi(q^k)(q^{ikz}+q^{-ikz}) \end{aligned}$$

($\phi(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp(-\pi n^2x^2)\right)$)に着目して, Riemann ゼータ関数に対応すべきハミルトニアンを, 次数の大きな自己相反多項式に対応するハミルトニアンによって近似することを考えたのである.

先に述べたように, 自己相反多項式に対応するハミルトニアンを係数 $c_1, \dots, c_g$ の有理式として計算機に計算させようとする, その複雑さから g が 10 程度でもかなりの時間がかかる (プログラミングの不味さもあるかもしれないが). しかし具体的に与えられた自己相反多項式については, g が大きくてもハミルトニアンをそれなりに早く計算できる. そこで上の Riemann 和を参考にして, 自己相反多項式 $f_{T,g}(x)$ を

$$f_{T,g}(x) = \log q \sum_{k=0}^g q^{\frac{k}{2}}\phi(q^k)(x^{2g-k}+x^k), \quad q = T^{\frac{1}{g}}$$

と定義し, これに対応するハミルトニアン $m_\omega(a; T, g)$ を計算してみる.

例えば $\zeta(s)$ は $|\Im(s)| \leq 50$ では

$$\frac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{s(s-1)\Gamma(s/2)} \int_1^{T=4} \sqrt{x}\phi(x)(x^{s-\frac{1}{2}}+x^{-(s-\frac{1}{2})})\frac{dx}{x}$$

によって良く近似されるので, $T=4$ として次数 $2g$ を動かしてみる. パラメータ ω は $1/2$ に固定しておこう. このとき $g=20, 50, 100, 200, 300$ について $1/m_{1/2}(a; 4, g)$ を $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ の範囲で描いたのが Figure 1 ~ 5 である. ($1 \leq a \leq \sqrt{2}$ は比較のしやすさのために選んだ範囲.) これらの図にあるように, g が小さいと $m_{1/2}(a; 4, g)$ は頻繁に符号を変えるが, g が大きくなると, $m_{1/2}(a; 4, g)$ は正值で局所的に連続な関数に収束してゆくように見える. パラメータ ω をとりかえて $\omega=0.01$ などとしても, $m_\omega(a; 4, g)$ の変化の様子はあまり変わらない. $T=4$ だと a が大きい所では g を増やしても $m_\omega(a; 4, g)$ が振動したままのような様子が観察されるが, T を大きくするとそのような a の範囲は狭まってゆく様子が観察される.

Riemann 予想が正しいならば, Riemann ゼータ関数に対応する $m_\omega(a)$ は任意の $\omega > 0$ に対して $1 \leq a < \infty$ 上で殆ど至るところ非負な局所可積分関数となるはずだから, この観察は妥当なものに思える.

REFERENCES

- [1] W. Chen, On the polynomials with all there zeros on the unit circle, J. Math. Anal. and Appl. 190 (1995), 714-724
- [2] 知念宏司, Distribution of the zeros of certain self-reciprocal polynomials, 数理解析研究所講究録「解析的整数論とその周辺」, No. 1665 (2009), 9-16.

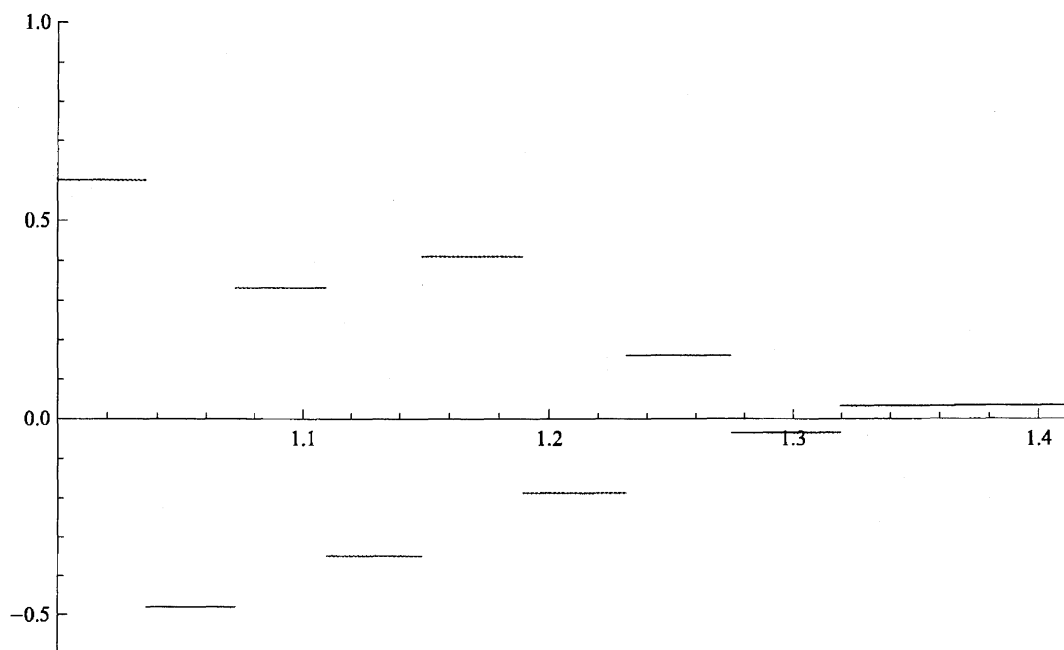


FIGURE 1. 区間 $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ における $m_{1/2}(a; T, 20)$ のグラフ.

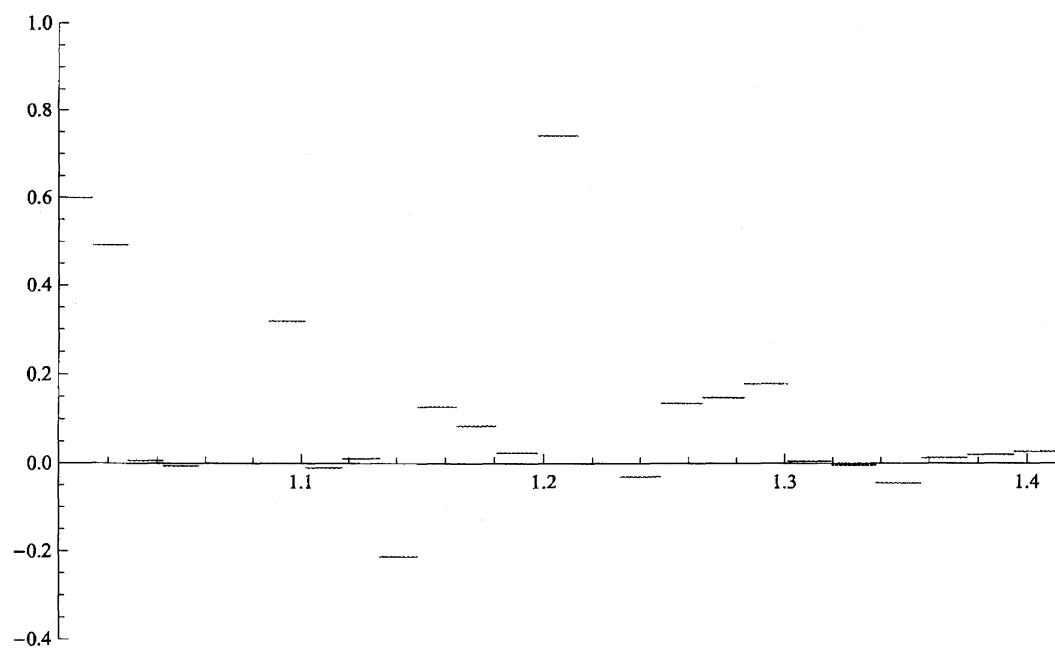


FIGURE 2. 区間 $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ における $m_{1/2}(a; T, 50)$ のグラフ.

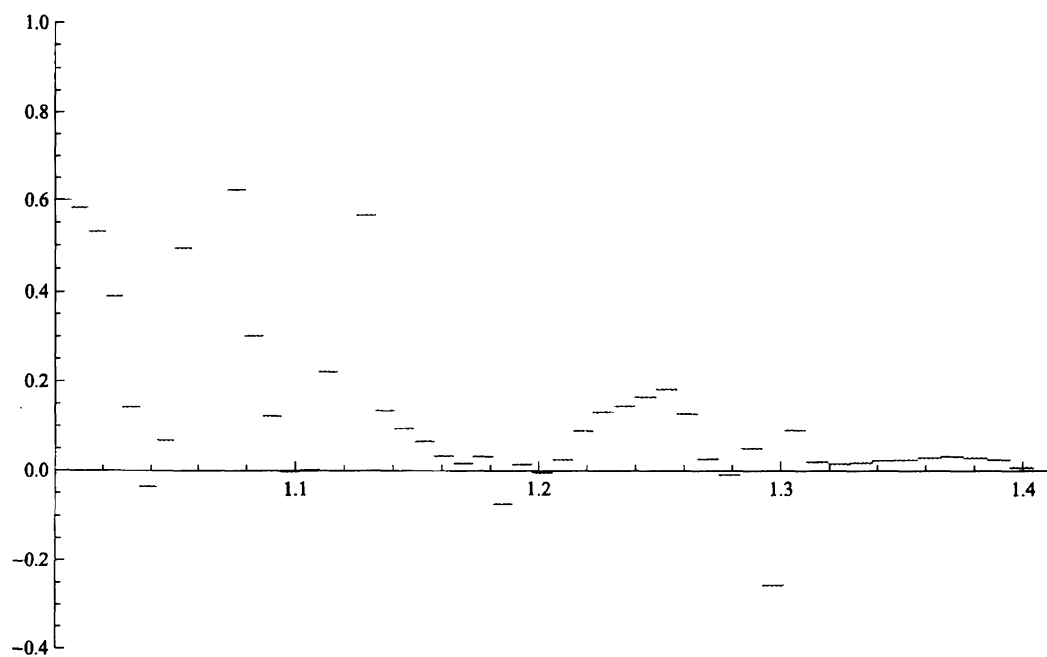


FIGURE 3. 区間 $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ における $m_{1/2}(a; T, 100)$ のグラフ.

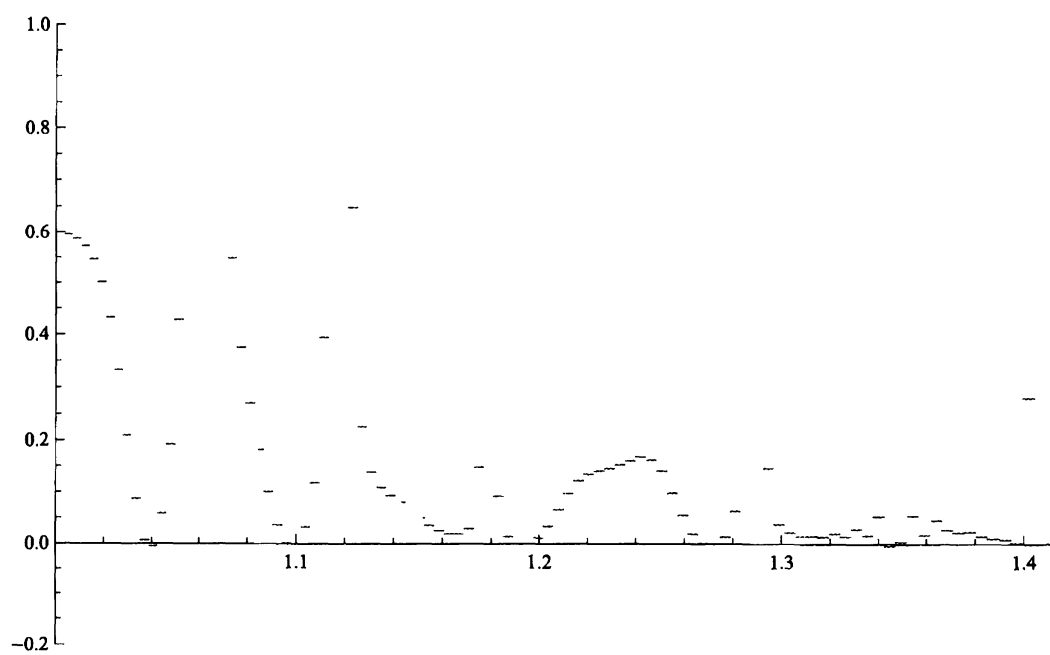


FIGURE 4. 区間 $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ における $m_{1/2}(a; T, 200)$ のグラフ.

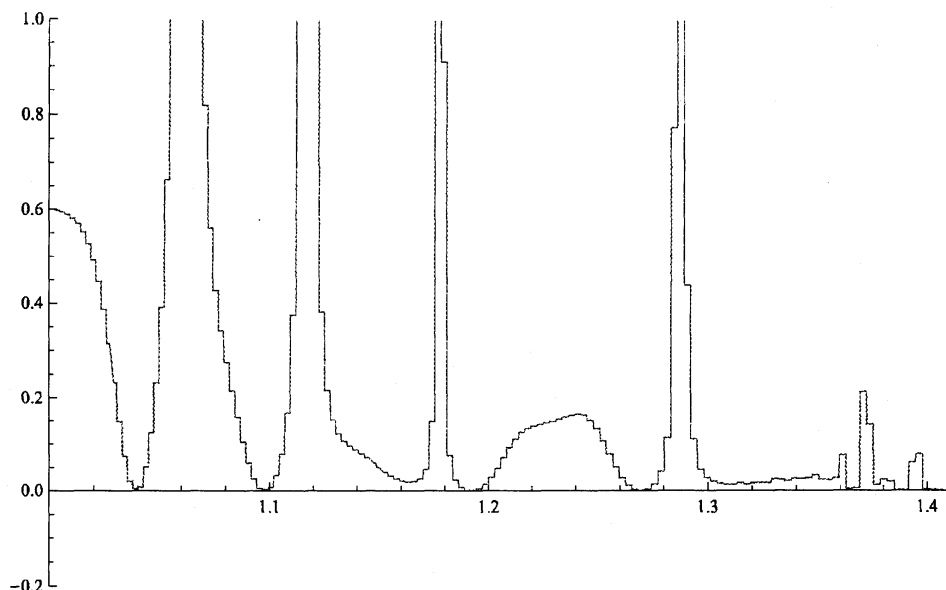


FIGURE 5. 区間 $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ における $m_{1/2}(a; T, 300)$ のグラフ.

- [3] ———, An abundance of invariant polynomials satisfying the Riemann hypothesis, *Discrete Math.* **308** (2008), no. 24, 6426–6440.
- [4] L. de Branges, Some Hilbert spaces of entire functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 840–846.
- [5] ———, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.
- [6] A. V. Egorov, A remark on the distribution of the zeros of the Riemann zeta function and a continuous analogue of Kakeya's theorem (Russian), *Mat. Sb.* **194** (2003), no. 10, 107–116; translation in *Sb. Math.* **194** (2003), no. 9-10, 1533–1542.
- [7] D. Y. Kwon, Reciprocal polynomials with all zeros on the unit circle, *Acta Math. Hungar.* **131** (2011), no. 3, 285–294.
- [8] J. C. Lagarias, Zero spacing distributions for differenced L-functions, *Acta Arith.* **120** (2005), no. 2, 159–184.
- [9] ———, *Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions*, *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, Springer, Berlin, 2006, pp. 365–377.
- [10] P. Lakatos, On zeros of reciprocal polynomials, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **24** (2002), 91–96.
- [11] 鈴木正俊, A canonical system of differential equations arising from the Riemann zeta-function, to be published in “Number Theory and Their Probabilistic Aspects - Kyoto 2010”, *RIMS Kokyuroku Bessatsu series*, 2012.
- [12] ———, Riemann ゼータ関数のある連続変形について, *数理研講究録「解析的整数論の新しい展開」*, No. 1639 (2009), 123–132.
- [13] ———, On subspaces of the Hardy space related to zeros of zeta functions, *数理研講究録「解析数論-複素関数の値の分布と性質を通して」*, 掲載予定

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology
 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, JAPAN
 Email: msuzuki@math.titech.ac.jp