

あるディリクレ級数について

近大 工学部 竹 内 文彦

§ 1

(§1 では以降使用する原理並びに記号について説明する).

この小論に於て, 我々は次の型の *dirichlet serie* を導入する

即ち
$$\prod_p f_n(p^{-s}) \quad \prod_p g_n(p^{-s})$$

但し
$$f_n(t) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1+t & t \\ t & t \end{pmatrix}^n \right] \quad g_n(t) = f_n(-t)$$

その意味, 動機については § 2 以降説明する

(i) D を C 上 commutative-semi-simple algebra と

$$D = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \} / C \quad \text{とする.}$$

D 内には primitive idempotent $w_1, w_2, \dots, w_n$

が存在して, $w_i \cdot w_j = \delta_{ij} w_i$ を満足している.

30

$$\times \quad \omega_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

φ を D から C への C 上 linear map とする.

$$\times \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n} \quad \text{と表はは} \quad \left(A \text{ を 仮に pr. id matrix といふ} \right)$$

$$A \begin{pmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \dots & \varphi(x_n) \end{pmatrix} A' = \begin{pmatrix} \varphi(\omega_1) & \varphi(\omega_2) & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(\omega_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi(\omega_n) \end{pmatrix}$$

となる.

(ii) C 上の com. s.s. algebra F, G , を (ii) に於て定義し
それ fix する.

N を 任意の自然数とし

$$I = \{1, 2, 3, 5, 6, \dots, n\}$$

と N 以下の平方因子を含まない全体とする

$$\times \quad \#(I) = \nu \quad \text{と置く.}$$

そのとき

$$F = \{x_i\}/C \quad i \in I \quad x_i \cdot x_j = x_{(i,j)} \quad i, j \in I$$

と定義する ((i, j) は i, j の最大公約数)

その時 F の pr. idempotent $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ は

$$\omega_i = \sum_{d|i} \mu(d) x_{\frac{i}{d}} \quad i \in I$$

F の pr. id. matrix を A とし $A^{-1} = B$ とおけば

$$B = (b_{ij})_{i,j \in I} \quad \text{は} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & j|i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(\because \sum_{d|i} \omega_d = x_i)$$

$$\text{又} \quad G = \{x_i\}/C \quad i \in I \quad x_i \cdot x_j = \begin{cases} x_{ij} & \{i,j\} \leq N \\ 0 & \{i,j\} > N \end{cases}$$

($\{i,j\}$ は i, j の最小公倍数)

と定義する

その時 G の pr. idempotent $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ は

$$\omega_i = \sum_{d|i} \mu\left(\frac{d}{i}\right) x_d \quad i, d \in I$$

G の pr. id. matrix を A_1 , $A_1^{-1} = B_1$ とおけば

$$B_1 = (b_{ij})_{i,j \in I} \quad \text{は} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

も容易に分る又.

$$B = B_1$$

$$\text{今} \quad J = \begin{pmatrix} \mu(1) & & & \\ & \mu(2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu(n) \end{pmatrix} \quad i \in I$$

とおけば

$$JB_1J = B_1^{-1} = A_1 \quad \text{従って} \quad JB_1J = A_1$$

も容易に分る.

(iii) この section に於ては2つの型の行列を問題にする.

まず p_i を i 番目の素数とする.

これから問題にする2つの型の行列を仮に α 型, β 型 という

α 型; $K = (k_{ij})_{i,j \in I}$ の type の行列

$$\text{又 } L = \{1, 2, 3, 5, 6, \dots\}$$

とすべての平方因子を含まぬ数の集合とすれば

$$\text{必要に応じて } K \text{ を } (k_{ij}) \quad i, j \in L \quad k_{ij} = \begin{cases} k_{ij} & (i, j) \in L \times L \\ 0 & \text{sonet} \end{cases}$$

で定義される無限行列と identify する。

$$\beta) \text{ 型 } K_1 = (k_{ij}) \quad i, j \in L_1 \text{ の type の行列}$$

$$\text{但し } L_1 = \{1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, \dots\} = \{1, p_1, p_2, p_1 p_2, \dots\}$$

$$\text{つまり } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_4 \end{pmatrix} \otimes \dots$$

において、対角成分に並んだ順序に並べたものが

$$L_1 \text{ である。 (又順序を無視すれば) } L \text{ の元と } L_1 \text{ の元とは}$$

一致する。

次に

$$\alpha) \text{ 型行列 } K \text{ と } \beta) \text{ 型行列 } K_1$$

とがあたえられたとする

我々は K と K_1 とが互いに対応するというのを次のよ

うにして定義する.

今 K を前ページの注の如く無限行列とみなす.

K の行と列とを適当に入れ換えれば β 型行列 になる.

それが K_1 と一致するとき K_1 と K とは互いに対応すると

い. $K^{(\alpha)} \approx K^{(\beta)}$ とかく.

又. $i \in L_1$ 即ち $i \in L$ とする. よ, て $i = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_m} (\mu(i) \neq 0)$

β 型行列 $\beta(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots$

を下の如く定義する. すなわち

$\beta(i)$ は 2 次の行列の無限個の Kronecker-product で

$i_1, i_2, \dots, i_m$ 番目の因子は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ でその他の因子は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

[例] $\bar{L} = 3 \cdot 5 = 15$ とする $\beta(\bar{L}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \dots \dots \dots \left(\text{4番目以後の因子はすべて } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

此処で §1 (ii) の記号と (i), (ii) の原理とを使えば.

prop 1. $B_1 \begin{pmatrix} \varphi(\omega_1) & & & & \\ & \varphi(\omega_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \varphi(\omega_n) \end{pmatrix} B'_1 \approx \sum_{i \in I} \varphi(\omega_i) \beta(\bar{L})$

が容易に分る。

§ 2

prop 2 $f_n(t) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1+t & t \\ t & t \end{pmatrix}^n \right]$ とおく. その時

$$f_n(t) = \begin{cases} \prod_{\substack{\lambda: \lambda^n+1=0 \\ \lambda \neq -1}} (1 + (2-\lambda-\lambda^{-1})t + 4t^2) & n: \text{偶数} \\ \left(\prod_{\substack{\lambda: \lambda^n+1=0 \\ \lambda \neq -1}} (1 + (2-\lambda-\lambda^{-1})t + 4t^2) \right) \times (1+2t) & n: \text{奇数} \end{cases}$$

$\lambda: \lambda^n+1=0 \quad \lambda+\lambda^{-1}$ が異なる値をとり $\frac{n}{2}$ 個をとりこ

$\lambda: \lambda^n+1=0 \quad \lambda+\lambda^{-1}$ が異なる値をとり $\frac{n-1}{2}$ 個をとりこ

$\therefore \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t & t \end{pmatrix}$ の eigen value $\gamma(t), \delta(t)$ とする.

そのとき $f_n(t) = \gamma(t)^n + \delta(t)^n$ である.

今 t_0 は $f_n(t)$ の任意の根とする. $\gamma(t_0)^n + \delta(t_0)^n = 0$

$$\therefore \left(\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)} \right)^n + 1 = 0 \quad (1) \quad \gamma(t_0) + \delta(t_0) = 1 + t_0 + t_0 = 1 + 2t_0$$

$$\gamma(t_0)\delta(t_0) = (1+t_0)t_0 - t_0^2 = t_0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{(\gamma(t_0) + \delta(t_0))^2}{\gamma(t_0)\delta(t_0)} &= \frac{\gamma(t_0)^2 + 2\gamma(t_0)\delta(t_0) + \delta(t_0)^2}{\gamma(t_0)\delta(t_0)} \\ &= \frac{\gamma(t_0)}{\delta(t_0)} + \frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)} + 2 = \frac{(1+2t_0)^2}{t_0} = \frac{1}{t_0} + 4 + 4t_0 \quad (2) \end{aligned}$$

(1) から $\left(\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)} \right)^n + 1 = 0$ よって次の2つの case を考える.

(1) $\left\{ \frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)} = -1 \right\}$ のとき.

(2) より $0 = \frac{1}{t_0} + 4 + 4t_0 \quad t_0 = -2$

(2) $\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)} = \eta \neq -1$ のとき

(2) より $4t_0 + (2 - \eta - \eta^{-1})t_0 + 1 = 0$

後は t_0 の任意性と $f_n(t)$ の次数を調べればよい Q.E.D.

$f_n(t)$ はすべて絶対値が $\frac{1}{2}$ の根をもっている。

又高々 $-\frac{1}{2}$ を除いて、あとはすべて虚根であることも。

prop 2 より明らかである

$$\left(f_1(t) = 1+2t, f_2(t) = 1+(2-\bar{c}^1-\bar{c})t+4t^2, \dots \right)$$

$$= 1+2t+4t^2$$

§3

この section に於ては §1(ii) の記号と §1 (i) (ii) (iii) の結果を断りなしに使う。

次に

$$W = B_1' B_1, \quad Z = B_1' J B_1 = \left(z_{ij} \right)_{\substack{(i,j) \in I \times I \\ z_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \\ 0 & \text{ sonst} \end{cases}}} = I$$

とあって $\rho(W^{-1})$ $\rho(Z^{-1})$ を考察する ($\rho(U)$ は

U の spectral-radius)

$$W^{-1} = B_1^{-1} B_1'^{-1} = J B_1 B_1' J \stackrel{\text{equivalent}}{\sim} B_1 B_1'$$

$$\stackrel{\text{equiv.}}{\sim} B_1' B_1 = W$$

$$\therefore p(W^{-1}) = p(W) \dots (1)$$

$$p(W)^2 < \text{Tr}(W^2) \dots (2)$$

(1) (2) より $p(W^{-1}) = O(N)$ が分る

次に $Z^{-1} = J B_1 J B_1' J \sim^{eqv} B_1 J B_1'$

$$\therefore p(Z^{-1}) = p(B_1 J B_1')$$

又 prop1 より $B_1 J B_1' \approx \sum_{i \in I}^{(\alpha)} \mu(i) \beta(i)$

次にすぐ分る如く

$$\sum_{i=1}^N a_i M\left(\frac{N}{i}\right) = \sum_{i=1}^N b_i \quad \left(\text{但し } \sum_{i|j} b_i = a_j \right) \dots (3)$$

$$(3) \text{より } \sum_{(n,d)=1, d \leq N} M\left(\frac{N}{d}\right) = \sum_{d|n, d \leq N} \mu(d) \dots (4)$$

(4) に於て n に I を全て重みかせば

$$Z \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad i \in I \quad \dots (5)$$

($\bar{i} = p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_e}$ としたとき $M_{\bar{i}} = \sum_{d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, \dots, d_e \geq 0} M \left(\frac{N}{p_{j_1}^{d_1} p_{j_2}^{d_2} \dots p_{j_e}^{d_e}} \right)$
と定義する)

(5) から Z^{-1} の各行目が分るが、それと 10 ページに於る

Z^{-1} の形と §1 (ii) を使えば Z^{-1} の全成分が分る。

即ち $J Z^{-1} J = (S_{ij}) \quad i, j \in I \quad S_{ij} = \begin{cases} M_{\{\bar{i}\bar{j}\}} \times \mu(\{\bar{i}\bar{j}\}) & \{\bar{i}\bar{j}\} \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \dots (6)$

(6) と $\text{Tr}((Z^{-1})^2) > (\rho(Z^{-1}))^2$ $(\rho(Z^{-1}))^2 > Z^{-2}$ の (1.1) 成分
 $\parallel$
 $\text{Tr}((J Z^{-1} J)^2)$

より $\rho(Z^{-1})$ の評価と $M(N)$ の評価とは同値である。

§4

さて ${}^{(\alpha)}K \approx {}^{(\beta)}K_1$ であれは

$$\text{Tr}(K^{\ell}) = \text{Tr}(K_1^{\ell}) \quad \ell=1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

である。

又 $\gamma_1=1 \quad \gamma_m \cdot \gamma_n = \gamma_{mn} \quad (m, n) \in L_1$ であれは

$$\begin{aligned} \sum_{i \in L_1} \gamma_i \beta(i) & \text{ は形式的に} \\ & \begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_1} & \gamma_{p_1} \\ \gamma_{p_1} & \gamma_{p_1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_2} & \gamma_{p_2} \\ \gamma_{p_2} & \gamma_{p_2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_3} & \gamma_{p_3} \\ \gamma_{p_3} & \gamma_{p_3} \end{pmatrix} \otimes \dots \\ & = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_i} & \gamma_{p_i} \\ \gamma_{p_i} & \gamma_{p_i} \end{pmatrix} \quad \text{とかける} \quad (2) \end{aligned}$$

又一般に Dirichlet-series $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^s}$ において

仮に $\psi^{(m)} = \sum_{n=1}^m d_n$ と定義する。

以下アイデアを簡単に述べれば

$\rho(Z^{-1})$ を評価したい訳であるがその為には

$\text{Tr}[(Z^{-1})^{\ell}]$ を評価すればよい。

然るに 10 ページより

$$JZ^{-1}J \approx \sum_{i \in I} \mu^{(\beta)}(i) \beta^{(\beta)}(i)$$

よって (1) より $\text{Tr} \left[\left(\sum_{i \in I} \mu^{(\beta)}(i) \beta^{(\beta)}(i) \right)^2 \right]$ を評価すれば ... (3)

より.

そこで (3) 式を $\psi_\ell^{(n)}$ で代用しようという訳で

ある. 但し $\psi_\ell(s) = \text{Tr} \left[\bigotimes_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s} \\ -\frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s} \end{pmatrix} \right]^2$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s} \\ -\frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s} \end{pmatrix} \right]^2 = \prod_{p_i} g_\ell(p_i^{-s})$$

但し n は §1 (ii) で定義した n . (2 ページの下から 3 行目)

$\psi_\ell(s)$ 等については全然調べてない $\left[f_\ell\left(\frac{t}{2}\right) = h_\ell(t), h_\ell(-t) = h_\ell(t) \right]$
 において $h_\ell(t), h_\ell(t)$ についても dirichlet series が def した

- 後は別の機会に述べることにすることにしてこの小論を

終りたいと思います

参考文献

M. Hall. Jr combinatorial theory