

薄膜近似による環状液体シートの解析

阪大・基礎工 吉永隆夫 (Takao YOSHINAGA)

阪大・基礎工 小谷晃士 (Koji KOTANI)

Faculty of Engineering Science, Osaka University

1 はじめに

液体シートの振る舞いはその面上を伝播する表面張力波の安定性に大きく依存している。その中でも、環状 (annular) シートの安定性に関する研究は流体力学における代表的な問題の一つであるばかりでなく、種々の噴射、噴霧装置の設計や化学反応等における遮蔽膜への応用においても重要である。環状シートは平面 (planar) シートや液体円柱 (liquid column) に比べてその幾何学的形状が複雑なために、あまり解析的な研究は進んでおらず、これまで主に線形理論により調べられてきた。特に、微小攪乱に対する安定性解析では、長波長の軸対称攪乱に対して二つの異なる不安定モードが存在することが示されている。これらのモードは平面シートにおける反対称 (sinuous)、対称 (dilatational, bulge) モードに対応するが、平面シートの場合とは異なり、周囲の流体の影響が無くても常に不安定である。また、非軸対象攪乱に対してはスワールを考えなければ安定であることも知られている [1, 2]。一方、実験的には不安定性によりシート中空部が閉じたり (Sealing-off)、風船玉のように膨らんだり (Ballooning) して崩壊する場合や [3]、シート周囲に沿って細かい液滴状になり崩壊する場合 [4] があることがこれまでに示されている。

このようなシートの崩壊には非線形性が重要な役割を果たすことは明らかであり、解析的な取り扱いにおいてはこの非線形性を考慮しなければならない。事実、Lee と Wang [5, 6] は非線形発展方程式を用いて Sealing-off や Ballooning の現象を調べている。彼等の解析ではシートが十分薄いとして、すべての物理量がシート中央面で代表されると仮定した「薄膜近似」を用いている。しかし、この近似では有限のシート厚みのため現れる分散性の影響が解析モデルに十分取り込めていない恐れがある。最近、Yoshinaga と Kotani [7] は Lee と Wang による薄膜近似の方法に対してシートの有限厚みの効果を取り入れるような修正を施した「修正薄膜近似」を提案し、平面シートの非線形方程式を導出し、崩壊 [8] に及ぼすシート厚みの影響を調べた。またこの修正が、Mehring と Sirignano [9] によるシートの厚み展開で得られた結果と一致することを示した。

本研究では、この修正薄膜近似を環状シートに用いることにより、従来よりもより厳密に現象を記述できる非線形方程式が得られることを示す。さらに、数値解析結果から崩壊に及ぼすシート厚みの影響を明らかにする。

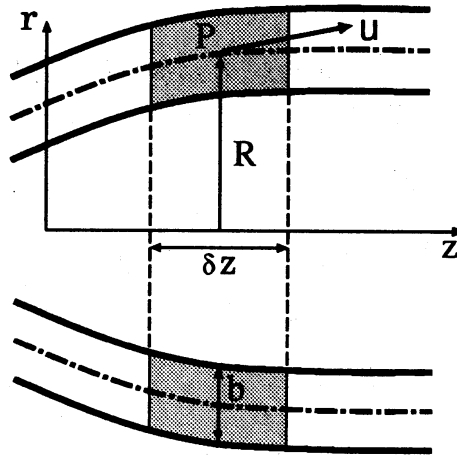


図 1: 環状シート

2 薄膜方程式

図 1 に示すような $r-z$ 座標系でシート厚み中心面を $r = R(z, t)$, シート厚みを $b(z, t)$, シート中心面における流体の速度ベクトルを $\mathbf{u} = (v(z, t), u(z, t))$, そして圧力を $P(z, t)$ で表す. シートの流体密度 ρ は一定で, シート周囲の流体密度は ρ に比べて十分小さいためその運動を考えない. このとき, 微小長さ δz の円環要素に対する質量, 運動量保存, および境界条件を以下のように考える:

- 連続の式

シート厚みが薄いとすれば円環要素の質量は $2\pi\rho Rb\delta z$ で表され, これが保存されることから

$$\frac{D(Rb\delta z)}{Dt} = Rb \frac{D(\delta z)}{Dt} + \delta z \frac{D(Rb)}{Dt} = 0, \quad (1)$$

ここで,

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial z}.$$

δt 時間後の円環要素の長さ $\delta z'$ は

$$\delta z' = \delta z + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \delta t,$$

で与えられるので

$$\frac{D(\delta z)}{Dt} = \frac{\delta z' - \delta z}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial z} \delta z, \quad (2)$$

となる. よって, (2) を (1) 式に用いれば以下の連続の式を得る:

$$\frac{\partial(Rb)}{\partial t} + \frac{\partial(uRb)}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

- 境界条件

シートが十分薄いとしてシート内面 $r = r_- (= R - b/2)$, 外面 $r = r_+ (= R + b/2)$ をシート中央面 $r = R(z, t)$ で代表させることにより, 運動学的境界条件は

$$v = \frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (4)$$

で与えられる.

• 運動方程式

有限厚みを考慮して、シート中央面での圧力 P が最低次の近似で、シート内外面 $r = r_{\mp}$ での表面張力と静水圧による力の平均として以下のように与えられるとする:

$$P = \frac{p_+ + p_-}{2}. \quad (5)$$

上式で、 σ は表面張力係数で、

$$f_{\pm} = [1 + (\frac{\partial R}{\partial z} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial z})^2]^{-1/2},$$

としたとき、 $r = r_{\pm}$ でシート面にかかる力は

$$p_{\pm} = p_{0\pm} \mp \sigma [\frac{f_{\pm}}{R \pm b/2} - (\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}) f_{\pm}^3],$$

で与えられる.

このとき、簡単な計算より、円環要素に働く合力の z 方向成分 F_z は

$$F_z = 2\pi [\Delta P (R \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{b}{4} \frac{\partial b}{\partial z}) - Rb \frac{\partial P}{\partial z}] \delta z, \quad (6)$$

で与えられる. ただし、

$$\Delta P = p_+ - p_-. \quad (7)$$

一方、 r 方向成分 F_r は

$$F_r = -2\pi \Delta P R \delta z, \quad (8)$$

で与えられる. これらの力が慣性項と釣り合うので

$$2\pi \rho R b \delta z \frac{Du}{Dt} = F_z, \quad 2\pi \rho R b \delta z \frac{Dv}{Dt} = F_r. \quad (9)$$

よって、運動方程式は次式で与えられる:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\Delta P}{\rho R b} (R \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{b}{4} \frac{\partial b}{\partial z}), \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\Delta P}{\rho b}. \quad (11)$$

かくして、問題は式 (3), (4), (10), (11) を適当な条件の下で解くことに帰着される.

ところで、上で得られた方程式の内、連続の式と境界条件式は Lee と Wang の薄膜近似により得られた結果 (座標系は異なるが) と一致する. しかし、運動方程式に関しては、厚み b が十分薄いとして $\partial b / \partial z$ を無視し、さらに、 P が $(p_{0+} + p_{0-})/2$ に、 ΔP が $p_{0+} + p_{0-} + \sigma [2/[R\sqrt{1 + (\partial R / \partial z)^2}] - 2(\partial^2 R / \partial z^2) / [1 + (\partial R / \partial z)^2]^{3/2}]$ とおいた場合に相当している. したがって、修正は運動方程式にのみ現れることがわかる.

上で得られた非線形方程式を解く前に、以下では線形安定性を調べておく.

3 線形安定性

微小攪乱の安定性を調べるため、

$$b = b_0 + b', \quad R = R_0 + R', \quad u = u_0 + u', \quad v = v', \quad (12)$$

のように結量が添え字 0 の一様状態に添え字 ' の微小攪乱が加わった状態で与えられるとする。ただし, R_0, b_0 は以下の関係

$$p_{0-} - p_{0+} = \frac{2\sigma R_0}{R_0^2 - b_0^2/4}, \quad (13)$$

を満たす必要がある。今, k, ω をそれぞれ波数, 角周波数としたとき, 微小攪乱が $\exp[i(kz - \omega t)]$ に比例すると仮定する。このとき, (12) 式を前節で得られた基礎方程式に用いて, 高次の微小量を無視することにより, 以下の線形分散関係式を得る:

$$(\omega^* - k^* \sqrt{We})^4 + \frac{b_0^*}{2} \left[\left(\frac{b_0^* k^{*2}}{2} + \frac{2}{b_0^*} \right) \left[\frac{1 + b_0^{*2}/4}{(1 - b_0^{*2}/4)^2} - k^{*2} \right] + \frac{b_0^*}{(1 - b_0^{*2}/4)^2} \right] (\omega^* - k^* \sqrt{We})^2 + \frac{b_0^{*2} k^{*2}}{4} \left[k^{*2} - \frac{1}{(1 + b_0^*/2)^2} \right] \left[k^{*2} - \frac{1}{(1 - b_0^*/2)^2} \right] = 0. \quad (14)$$

ただし, 上式では表面張力波の速度 $\sqrt{2\sigma/\rho b_0}$ を代表速度に, R_0 を代表長さを選び, 無次元波数及び角周波数 k^*, ω^* , 厚み比 b_0^* , ウェバー数 We が以下のように導入されている:

$$\omega^* = \frac{R_0 \omega}{\sqrt{2\sigma/\rho b_0}}, \quad k^* = k R_0, \quad b_0^* = \frac{b_0}{R_0}, \quad We = \frac{\rho b_0 u_0^2}{2\sigma}. \quad (15)$$

(14) 式は厚み比 b_0^* が 0 の極限で Lee と Wang の薄膜近似 [5] により得られる分散関係

$$(\omega^* - k^* \sqrt{We})^2 \left[(\omega^* - k^* \sqrt{We})^2 + (1 - k^{*2}) \right] = 0, \quad (16)$$

に一致することを注意しておく。

式 (14) は, k^* を実数として ω^* に関する方程式と見た場合時間不安定を調べることができ, 解 ω^* の虚数部 $Im(\omega^*)$ が時間増幅率を表す。一方, ω^* を実数とし k^* に関する方程式と見た場合空間不安定を調べることができ, 解 k^* の虚数部 $Im(k^*)$ が空間増幅率を表す。図 2 に $We = 0$ に対する時間増幅率を示す。(a), (b) 図はそれぞれ $b_0^* = 0.1$ と 0.8 の場合を示している。図よりわかるように長波長領域に増幅率の大きい反対称モードと小さい対称モードの二つの不安定モードが現れる。これらの二つのモードの増幅率は, 一般のシート厚みに対する線形ポテンシャル理論での増幅率 [1] とよく一致する。また, Lee と Wang による薄膜方程式では, 増幅率の小さいほうのモード (対称モード) 現れない [5]。さらに, (b) 図でわかるように短波長領域 ($2 < k < 3$) で '孤立' 不安定モードが現れるが, 線形ポテンシャル理論ではこのようなモードは存在しない。したがって, このモードは薄膜近似特有のものであると考えられる。また, この孤立不安定領域は b_0^* が 0 の極限で $k \rightarrow \infty$ に退き, b_0^* が大きくなるにつれて長波長領域に移動し最終的には反対称モードと合体する。

一方, 図 3 には $We = 4$ の場合の空間増幅率を示す。図よりわかるように, 時間不安定の場合と同様, 厚み比 b_0^* が小さい場合, 低角周波数領域で二つの (反対称, 対称) 不安定モードが存在し, さらに, $\omega^* \sim 2$ でも孤立不安定領域があることがわかる ($b_0^* = 0.1$)。 b_0^* が大きくなるに従って, この孤立不安定領域は大きくなり左側にある低周波領域での不安定モードと合体する ($b_0^* = 0.5$)。さらに b_0^* が増加するにつれて, 高周波数領域にある不安定モードとも合体し ($b_0^* = 1.0$), ほぼ全周波数領域で不安定となることがわかる。しかし, このような高周波領域での不安定モードが薄膜近似特有のものかどうかは線形ポテンシャル理論での結果と比較を行う必要がある。

4 数値解析結果

前節で得られた安定性の結果を参考にして, 適当な条件の下でのシートの時間発展および空間発展を調べる。そのため, 方程式 (3), (4), (10), (11) を有限差分法を用いて数値的に解く。このと

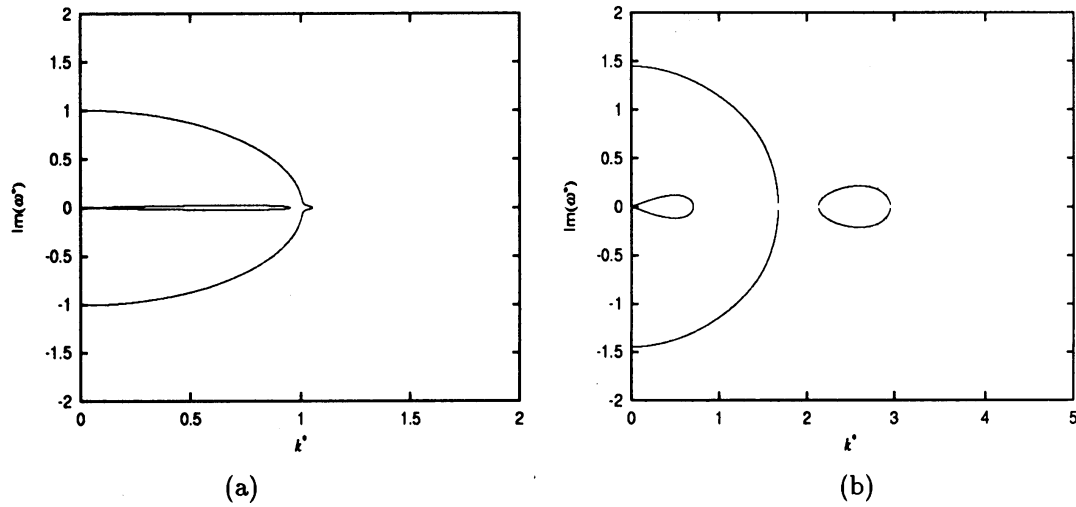


図 2: 波数 k^* に対する時間増幅率 $Im(\omega^*)$; (a) $b_0^* = 0.1$, (b) $b_0^* = 0.8$.

き, 時間微分に対しては前進差分 (オイラー法), 空間微分に対しては中心差分で離散化する. 十分な計算精度を得るために, 適当な空間領域でのシートの質量 $M(t)$ が保存される (実際の計算では $M(t)/M(0) < 0.001$ となる) ように時間, 空間刻み幅を与える. さらに数値不安定性を押さえるために, 対流微分項に対して 3 次の風上差分を用い, 計算時間の長い場合には, 1000 時間ステップ毎に 5 点平滑化法を適用する.

4.1 時間発展

$t^* = 0$ で波数 k^* の正弦攪乱 ($\exp[i k^* z^*]$) を与えた場合のシート形状の時間発展を調べる. 以下では, 主流の速度 $u_0^* = 0$ として $We = 0$ の場合を考え, 計算は $0 \leq z^* \leq 2\pi/k^*$ のでの周期境界条件の下で行われている. 図 4 は, 線形不安定領域における $b_0^* = 0.1$ の場合の崩壊に至るまでのシート形状の時間発展である. 初期条件は, $k^* = 0.5$ とし R^* に 10 % の攪乱を与え, (a) 図では反対称不安定モードを, (b) 図では対称不安定モードを選んでいる. 図よりわかるようにシートは不安定性のため大きく変形し最終的には閉じて (Sealing-off) 崩壊する. 反対称モードの増幅率は対称モードよりもかなり大きいため, 崩壊までの時間は (a) 図のほうが短いことがわかる. 線形不安定の場合, シート厚みに関わらず反対称モードは常に存在し, 増幅率は対称モードよりも大きい. したがって, 適当な初期条件に対して, この反対称モードの攪乱が支配的になりシートは最終的には閉じて崩壊する. さらに, 厚みが大きいほど増幅率が大きくなるため, 崩壊に至るまでの時間が短くなる.

一方, 図 5 は線形安定領域におけるシート形状の崩壊に至るまでの時間発展である. 初期条件としては $k^* = 1.5$ とし, 強い非線形性の影響を見るために v^* に 30 % の攪乱を加えた. (a) 図は $b_0^* = 0.1$ とした場合を, (b) 図は $b_0^* = 0.3$ とした場合を示している. シート厚みが薄い場合, (a) 図よりわかるように非線形性のためシートは途切れ崩壊に至ることが予想されるのに対して, シート厚みが厚い場合, (b) 図よりわかるようにシートは閉じて崩壊に至る. もちろん, 両者とも攪乱が小さい場合線形安定のため考えられている有限の時間内では崩壊は起こらないことを注意しておく.

図 6 に Lee と Wang の方程式を用いて得られた結果を比較のため示す. (a), (b) の初期条件はそれぞれ図 5(a), (b) に対応する. 崩壊近傍での両図の形状の違いは大きく, 厚み効果を考慮することにより図 6 に現れるような流体の '瘤' が抑えられていることがわかる. このことは, 厚みを考慮す

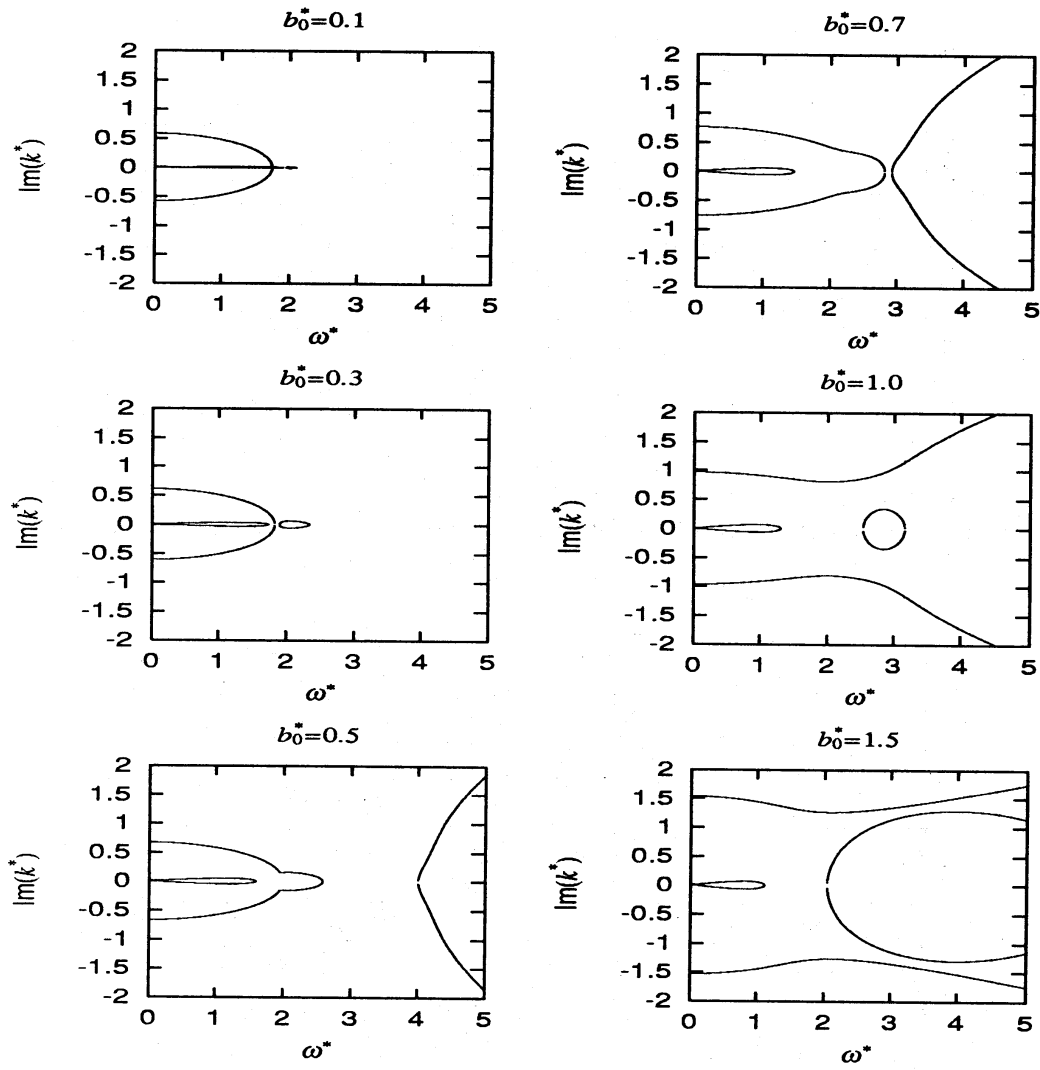


図 3: $We = 4$ の場合の角周波数 ω^* に対する空間増幅率 $\text{Im}(k^*)$.

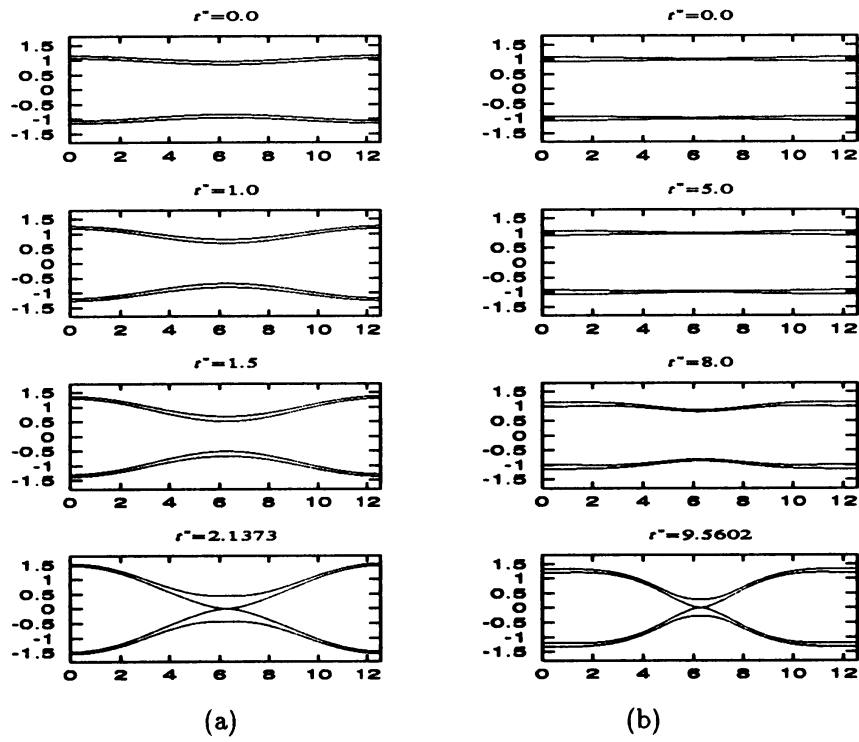


図 4: 線形不安定領域での環状シートの時間発展 (横軸 z^* , 縦軸 r^*); (a) 反対象モード (b) 対象モード

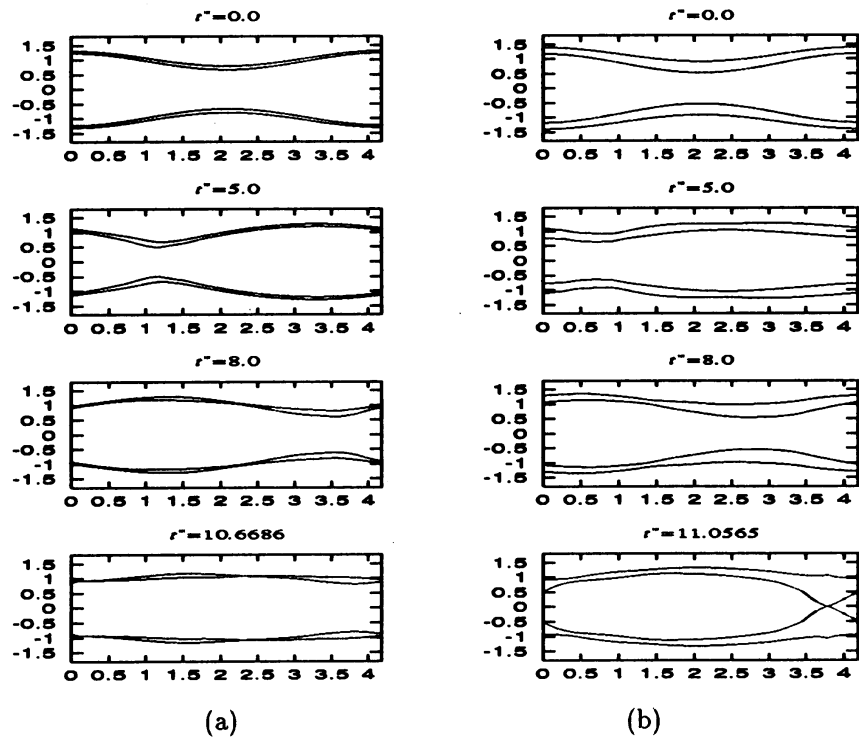


図 5: 線形安定領域での環状シートの時間発展 (横軸 z^* , 縦軸 r^*); (a) $b_0^* = 0.1$, (b) $b_0^* = 0.3$

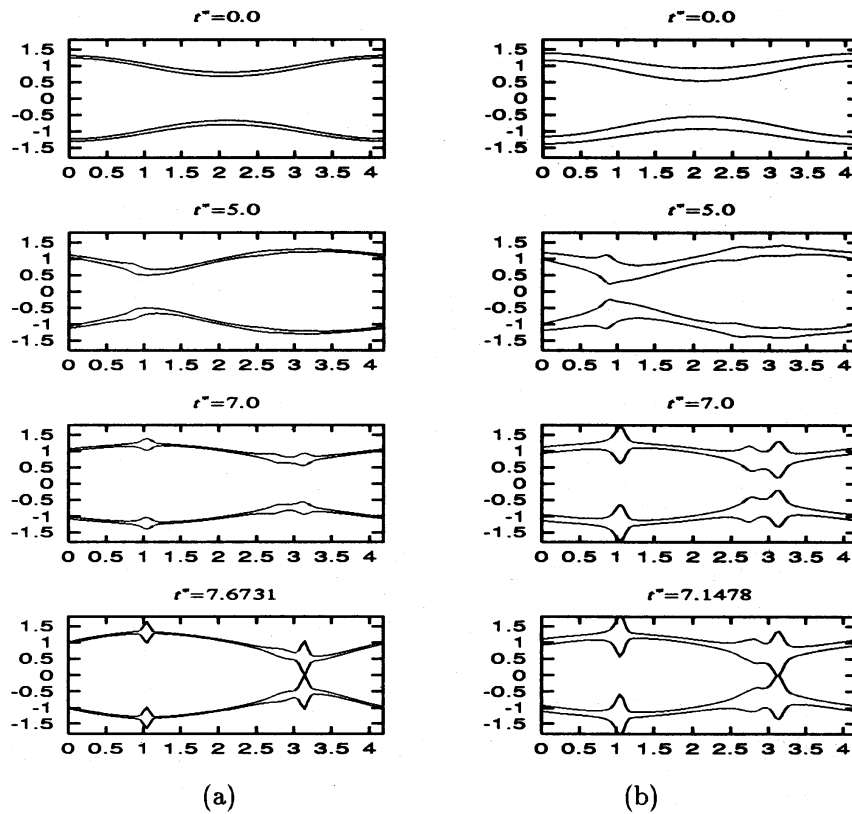


図 6: シート厚みの効果を見逃した場合 (Lee と Wang) の線形不安定領域での環状シートの時間発展 (横軸 z^* , 縦軸 r^*); (a) 反対称モード (b) 対称モード

ることにより分散効果が増し, 相対的に非線形性が弱くなったためと考えられる.

4.2 空間発展

空間発展を調べるため $z^* = 0$ で角周波数 ω^* の正弦攪乱 ($\exp[i\omega^*t^*]$) を与える. 以下では $We = 4$, $b_0 = 0.1$ とし, 計算は空間領域 $0 \leq z^* \leq 50$ で行われている. 図 7 は線形不安定領域で $\omega^* = 1$ の攪乱が与えられたときの崩壊近傍での波形を示す. (a) 図は v^* に 10% の攪乱を与えた反対称モードの場合で, (b) 図は u^* に 10% の攪乱を与えた対称モードの場合を示す. 両図とも, シートは閉じて崩壊することが予想される. また, (a) 図より反対称攪乱を与えた場合, 閉じた (Sealing-off) 後に大きなバルーニングが現れていることがわかる.

一方, 図 8 は線形安定領域で $\omega^* = 4$ の正弦攪乱を与えた場合である. 先と同様 (a) 図では反対称モードを (b) 図では対称モードの場合を示す. 図 7 の場合と同様, 反対称攪乱が与えられた場合, 線形安定にもかかわらず, Sealing-off を起こし背後に大きな Ballooning を伴っている. しかし, 対称攪乱を与えた場合, シートは閉じることはないが, 攪乱が次第に増幅してシートが途切れることが予想される. このように, 線形安定な場合でもシートは崩壊に至る可能性があると言える.

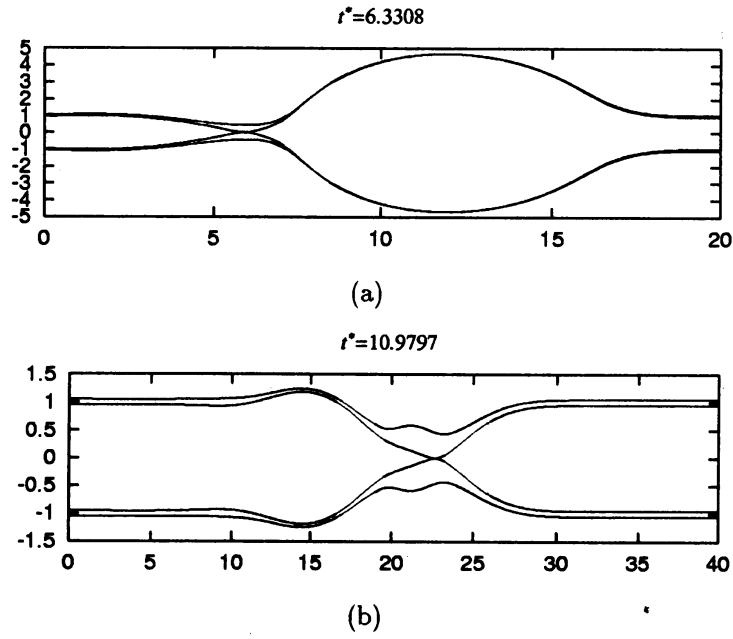


図 7: 線形不安定領域でのシートの空間発展 (横軸 z^* , 縦軸 r^*); (a) 反対称モード, (b) 対称モード

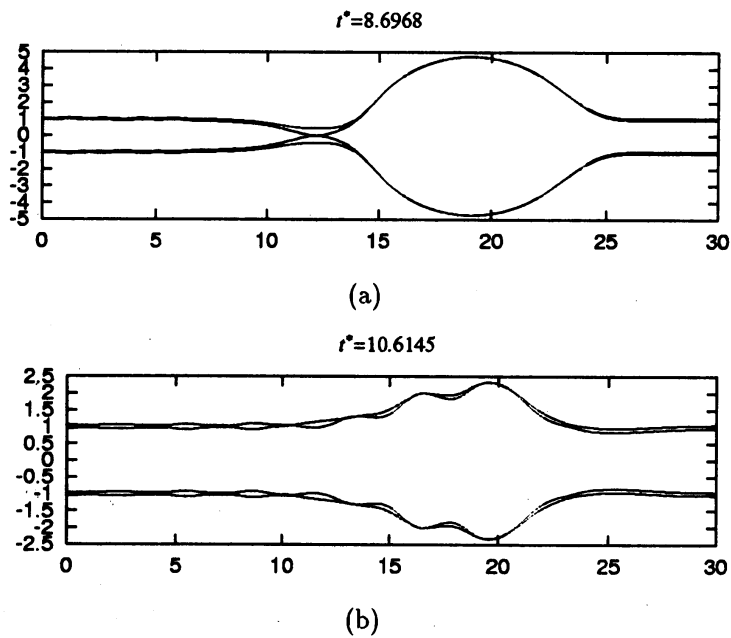


図 8: 線形安定領域でのシートの空間発展 (横軸 z^* , 縦軸 r^*); (a) 反対称攪乱, (b) 対称攪乱

5 おわりに

数値解析における時間発展の問題に対して、空洞内圧力 p_{0-} が時間的に変化することを許し、一空間周期における空洞内の体積が時間的に一定に保たれることを要求した。このことは以下のように説明できる。解析モデルにおいてシート周囲の流体の密度を無視しているため、運動方程式は圧力の勾配が 0 となり、周囲の流体の圧力は時間の関数であってもよい。また、このことは、運動方程式 (10)(11) で圧力に関する時間微分が入ってこないことから矛盾しない。実際の計算では、一周期にわたる空洞の体積を $V(t)$ としたとき、適当な α に対して $p_{0-}(t)/p_{0-}(0) = [V(t)/V(0)]^\alpha$ の関係を用いて体積が一定になるように $p_{0-}(t)$ を変化させた (計算では $\alpha = 100$ を用いた)。一方、空間発展の問題では、ノズル出口で内圧が一定になるように、空洞内の流体の流量が適当に変化すると考えれば空洞内での体積保存は要求されない。

参考文献

- [1] G.D.Crapper, N.Dombrowski and G.A.D.Pyott: J. Fluid Mech. **68**(1975)497.
- [2] M.V.Panchagnula, P.E.Sojka and: P.J.Santangelo Phys.Fluids **8**(1996)3300; see also the references therein.
- [3] J.M.Kendall: Phys.Fluids **29**(1986)2086.
- [4] P.J.Santangelo and P.E.Sojka: Atom.Sprays **5**(1995)137.
- [5] C.P.Lee and T.G.Wang: Phys.Fluids **29**(1986)2076.
- [6] C.P.Lee and T.G.Wang: Phys.Fluids **A1**(1989)967.
- [7] T.Yoshinaga and K.Kotani: J.Phys.Soc.Jpn **70**(2001)37.
- [8] T.Yoshinaga and M.Makino: Lect.RIMS, Kyoto Univ. **1092**(1999)42 [in Japanese].
- [9] C.Mehring and W.A.Sirignano: J. Fluid Mech. **388**(1999)69.