

IV 型領域上の正則保型形式と L 関数

村瀬篤 (Atsushi MURASE) (京都産業大学理学部)
菅野孝史 (Takashi SUGANO) (金沢大学理学部)

1. 設定と目標

$Q_1 \in M_{m+2}(\mathbf{Z})$ を符号 $(1, m+1)$ の even integral な対称行列とし, $Q_2 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & Q_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ とおく. Q_1, Q_2 の直交群をそれぞれ G_1, G_2 で表す ($\mathbf{Q}$ 上の代数群). G_2 の $\mathbf{R}$ 有理点の単位元成分 $G_{2,\infty}^0$ は IV 型対称領域

$$\mathcal{D} := \{Z \in \mathbf{C}^{m+2} \mid Q_1[\operatorname{Im} Z] > 0\}^0$$

に推移的に作用し, 作用 $Z \mapsto g\langle Z \rangle$ と $G_{2,\infty}^0 \times \mathcal{D}$ 上の正則保型因子 $J_{G_2}(g, Z)$ が

$$gZ^\sim = (g\langle Z \rangle)^\sim \cdot J_{G_2}(g, Z), \quad Z^\sim := \begin{pmatrix} -Q_1[Z]/2 \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる. $\mathcal{D}$ の一点 Z_0 の $G_{2,\infty}^0$ における固定化部分群を $K_{2,\infty}^*$ とおく ($SO(2) \times SO(m+2)$ に同型). 各素数 p に対し, G_2 の $\mathbf{Q}_p$ 有理点の群 $G_{2,p}$ の開コンパクト部分群 $K_{2,p}^*$ を

$$K_{2,p}^* := \{g \in G_{2,p} \mid (g-1)Q_2^{-1} \in M_{m+4}(\mathbf{Z}_p)\}$$

で定める ($K_{2,p} := G_{2,p} \cap GL_{m+4}(\mathbf{Z}_p)$ の指数有限正規部分群).

l を自然数とし, $K_{2,A}^* := \prod_{v \leq \infty} K_{2,v}^*$ に関する weight l の正則尖点形式の空間を $S_l(K_{2,A}^*)$ で表す. すなわち, G_2 のアデール群 $G_{2,A}$ 上の $\mathbf{C}$ 値有界関数 F で,

$$F(\gamma g k) = F(g) J_{G_2}(k_\infty, Z_0)^{-l} \quad (\gamma \in G_{2,\mathbf{Q}}, g \in G_{2,A}, k = k_\infty k_f \in K_{2,A}^*)$$

$$F(g_\infty g_f) J_{G_2}(g_\infty, Z_0)^l \text{ は } g_\infty \langle Z_0 \rangle \in \mathcal{D} \text{ の正則関数 } (g_\infty \in G_{2,\infty}^0, g_f \in G_{2,f})$$

を満たすものの全体である ($G_{2,f}$ は $G_{2,A}$ の有限部分).

以下, $L_2 := \mathbf{Z}^{m+4}$ が Q_2 に関して maximal integral lattice であると仮定する. これは, ${}^t g^{-1} Q_2 g^{-1}$ ($g \in M_{m+4}(\mathbf{Z}) \cap GL_{m+4}(\mathbf{Q})$) が even integral ならば $\det g = \pm 1$ であることを意味する. また, $L_1 := \mathbf{Z}^{m+2}$ が Q_1 に関して maximal integral lattice であることと同値.

$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}(G_{2,p}, K_{2,p}^*)$ を Hecke 環, 即ち $G_{2,p}$ 上の両側 $K_{2,p}^*$ 不変な台コンパクトな $\mathbf{C}$ 値関数のなす環 (積は convolution) とし, その中心を $\mathcal{H}_p^+$ で表す. 制限テンソル積 $\otimes'_{p < \infty} \mathcal{H}_p^+$ は $S_l(K_{2,A}^*)$ に convolution で (Petersson 内積に関して) 正規可換に作用する. $F \in S_l(K_{2,A}^*)$ を $\otimes'_{p < \infty} \mathcal{H}_p^+$ の同時固有関数とする:

$$F * \phi = \lambda_F(\phi) F \quad (\phi \in \otimes'_{p < \infty} \mathcal{H}_p^+).$$

このとき, F の standard L 関数が local standard L 関数の積

$$L(F; s) := \prod_{p < \infty} L_p(\lambda_F; s)$$

として定義される (cf. §2). さらに, ガンマ因子 $L_\infty(F; s)$ を

$$\left\{ \begin{array}{ll} |\det Q_2|^{s/2} & m : \text{even} \\ |2^{-1} \det Q_2|^{s/2} & m : \text{odd} \end{array} \right\} \cdot \Gamma_C(s + l - (m+2)/2) \prod_{j=0}^{[m/2]} \Gamma_C(s - j + m/2)$$

と定め,

$$\xi(F; s) := L_\infty(F; s) L(F; s)$$

とおく ($\Gamma_C(s) := (2\pi)^{1-s} \Gamma(s)$ である).

このノートの目的は, $\xi(F; s)$ の解析接続・関数等式を調べる 3 つの方法を紹介することにある.

第 1 の方法は, $SO(1, m+2)$ 上の Eisenstein 級数を用いた積分表示によるもので, Andrianov の $Sp(2, \mathbf{R}) \sim SO(2, 3)$ の場合の結果 [A] を起源とする (cf. [S1]). また, $SO(2, 1)$ 即ち elliptic modular の場合は, Fourier 係数の Mellin 変換という古典的なものに一致する. §4 Theorem 1 で L 関数の構成を与える.

第 2 の方法は, $SO(2, m+2)$ 上の Eisenstein 級数と theta lift を用いた積分表示によるもので, $Sp(2, \mathbf{R})$ の場合に Kohnen-Skoruppa [KS] が行った (cf. [MS3]). 記述に必要な言葉を用意した後, §6 Theorem 2 で結果を述べる.

第 3 の方法は, $SO(3, m+2)$ 上の Eisenstein 級数と新谷関数を用いた積分表示による. これは多くの古典群の場合に適用可能であり, 定値直交群の場合の結果 (Proposition 1, 2) もこの手法によっている (cf. [MS1], [MS2]). 直交群の正則保型形式に対しては, 無限素点での計算が完了していないため不十分な形であるが, §7 Theorem 3 に述べた.

2. local standard L 関数

$S = (s_{ij}) \in M_n(\mathbf{Q}_p)$ を n 次 even integral な対称行列 (i.e. $s_{ij} \in \mathbf{Z}_p$, $s_{ii} \in 2\mathbf{Z}_p$) とする. S に関し $L = \mathbf{Z}_p^n$ が maximal $\mathbf{Z}_p$ integral lattice となると, S を maximal と略称する. これは, ${}^t g^{-1} S g^{-1}$ ($g \in M_n(\mathbf{Z}_p) \cap GL_n(\mathbf{Q}_p)$) が even integral となるのは $g \in GL_n(\mathbf{Z}_p)$ に限るというのと同じ条件である.

maximal な S を固定し,

$$\begin{aligned} H &= O(S) = \{h \in GL_n(\mathbf{Q}_p) \mid {}^t h S h = S\}, \\ U &= H \cap GL_n(\mathbf{Z}_p), \quad U^* := \{h \in H \mid (h-1)S^{-1} \in M_n(\mathbf{Z}_p)\} \end{aligned}$$

とおく. U は H の極大開コンパクト部分群, U^* は U の指数有限正規部分群となる. U/U^* は, 単位群, 位数 2 の群, あるいは位数 $2(p+1)$ の二面体群のいずれかになる (局所体上の maximal lattice の分類による).

H 上の両側 U^* 不変な台コンパクトな $\mathcal{C}$ 値関数全体 $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}(H, U^*)$ は, convolution により $\mathcal{C}$ -algebra をなす (Hecke 環). $\mathcal{H}_p$ 及びその中心 $\mathcal{H}_p^+$ の構造は, Satake 同型により記述される:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_p &\cong \mathcal{C}[U/U^*][X_1^{\pm 1}, \dots, X_\nu^{\pm 1}]^{W_\nu}, \\ \mathcal{H}_p^+ &\cong Z(\mathcal{C}[U/U^*])[X_1^{\pm 1}, \dots, X_\nu^{\pm 1}]^{W_\nu}.\end{aligned}$$

ここで, ν は S の Witt 指数, W_ν は, $X_1, \dots, X_\nu$ の置換と $X_i \mapsto X_i^{-1}$ で生成される位数 $2^\nu \nu!$ の群である (Weyl 群). $\mathcal{C}$ -algebra 準同型 $\lambda: \mathcal{H}_p^+ \rightarrow \mathcal{C}$ に対し, local standard L 関数 $L_p(\lambda; s)$ が上記同型を用いて定義される (cf. [MS2]). $S \in GL_n(\mathbf{Z}_p)$ のとき, $L_p(\lambda, s)^{-1}$ は p^{-s} の $2[n/2]$ 次多項式である.

3. 定値直交群

$S \in M_n(\mathbf{Z})$ を正定値, even integral な対称行列とし, 全ての有限素点で maximal と仮定する (即ち, ${}^t g^{-1} S g^{-1}$ が even integral となる $g \in M_n(\mathbf{Z}) \cap GL_n(\mathbf{Q})$ は $\det g = \pm 1$ に限る).

H を S の直交群 ($\mathbf{Q}$ 上の代数群) とし, H のアデル群を H_A で表す. 各素数 p について $H_p := H(\mathbf{Q}_p)$ の開コンパクト部分群 U_p^* を §2 と同様に定義し, U_∞^* を H_∞ の単位元成分, $U_A^* = \prod_{p < \infty} U_p^*$ とおく.

U_A^* に関する保型形式の空間を $S(U_A^*)$ で表す. 即ち,

$$S(U_A^*) := \{ \varphi: H_A \rightarrow \mathcal{C} \mid \varphi(\gamma h u) = \varphi(h) \quad \gamma \in H_{\mathbf{Q}}, h \in H_A, u \in U_A^* \}.$$

この空間には, Hecke 環 $\mathcal{H}_p := \mathcal{H}(H_p, U_p^*)$ が convolution で作用している. 特に, その中心 $\mathcal{H}_p^+$ の作用は (Petersson 内積に関して) 正規可換であり, $S(U_A^*)$ は制限テンソル積 $\otimes_p' \mathcal{H}_p^+$ の同時固有関数 (Hecke eigenform) からなる基底を持つ.

今 $\varphi \in S(U_A^*)$ が符号 $\sigma_\varphi (= \pm 1)$ の Hecke eigenform, 即ち,

$$\varphi * \phi = \lambda_\varphi(\phi) \varphi \quad (\phi \in \otimes_{p < \infty}' \mathcal{H}_p^+), \quad \varphi(h h_\infty) = \sigma_\varphi \varphi(h) \quad (h_\infty \in H_\infty - U_\infty^*)$$

であるとする. φ の (completed) global L 関数 $\xi(\varphi; s)$ を

$$\begin{aligned}\xi(\varphi; s) &:= L_\infty(\varphi; s) \prod_{p < \infty} L_p(\lambda_\varphi; s) \\ L_\infty(\varphi; s) &= \begin{cases} (\det S)^{s/2} & n: \text{even} \\ (2^{-1} \det S)^{s/2} & n: \text{odd} \end{cases} \prod_{j=1}^{[n/2]} \Gamma_{\mathcal{C}}(s - j + n/2)\end{aligned}$$

で定義する.

Proposition 1 $\varphi \in S(U_A^*)$ を符号 σ_φ の Hecke eigenform とする.

(1) $\xi(\varphi; s)$ は有理型関数として全 s 平面に解析接続され, 関数等式

$$\xi(\varphi; s) = \sigma_\varphi^n \xi(\varphi; 1 - s)$$

(2) $n = 1$ のとき, $\xi(\varphi; s)$ は entire で, $\xi(\varphi; 1/2) \neq 0$ となるのは, φ が定数関数の場合に限る.

(3) $n \geq 2$ のとき, $\xi(\varphi; s)$ は $s = n/2 - k$ ($0 \leq k \leq n-1$, $k \in \mathbf{Z}$) で高々 1 位の極を持つ以外は正則であり, $s = n/2$ で極を持つ必要十分条件は, φ が定数関数であることである.

(4) $\sigma_\varphi = -1$ ならば, $\xi(\varphi; s)$ は entire である.

符号 $(1, n+1)$ の対称行列 $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & -S & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ の直交群を H_1 とする. $H_{1,\infty}$ の単位元成分 $H_{1,\infty}^0$ は,

$$\mathcal{X} := \{X = (r, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \mid x > 0\}$$

に推移的に作用し, 作用 $X \mapsto h\langle X \rangle$ と $H_{1,\infty}^0 \times \mathcal{X}$ 上の保型因子 $J_{H_1}(h, X)$ が

$$hX^\sim = (h\langle X \rangle)^\sim \cdot J_{H_1}(h, X), \quad (r, x)^\sim := \begin{pmatrix} r + S[x]/2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる. $X_0 = (r_0, 0) \in \mathcal{X}$ の固定化部分群を $U_{1,\infty}^*$, $H_{1,p}$ の開コンパクト部分群 $U_{1,p}^*$ を §2 と同様に定め, $U_{1,A}^* = \prod_{v \leq \infty} U_{1,v}^*$ とおく.

P_1 を G_1 の上三角極大放物部分群で, Levi part が $GL_1 \times H$ となるものとする:

$$P_1 := \left\{ \begin{pmatrix} t & * & * \\ & h & * \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} \mid t \in GL_1, h \in H \right\}.$$

岩澤分解 $H_{1,A} = P_{1,A} U_{1,A}^*$ により, $h \in H_{1,A}$ は

$$h = \begin{pmatrix} t(h) & * & * \\ & \beta(h) & * \\ & & t(h)^{-1} \end{pmatrix} u(h), \quad t(h) \in \mathbf{Q}_A^\times, \beta(h) \in H_A, u(h) \in U_{1,A}^*$$

の形に書かれる. $\varphi \in S(U_A^*)$, $s \in \mathbf{C}$ に対し, $H_{1,A}$ 上の Eisenstein 級数を

$$E_{H_1}(h, \varphi; s) := \sum_{\gamma \in P_{1,\mathbf{Q}} \backslash H_{1,\mathbf{Q}}} \varphi(\beta(\gamma h)) |t(\gamma h)|_A^{s+n/2}$$

で定義する (右辺の級数は, $\operatorname{Re}(s) > n/2$ で広義一様絶対収束). $\varphi \in S(U_A^*)$ が Hecke eigenform のとき,

$$E_{H_1}^*(h, \varphi; s) := r_0^{s/2} \xi(\varphi; s+1) \begin{cases} 1 & n : \text{even} \\ \xi(2s+1) & n : \text{odd} \end{cases} E_{H_1}(h, \varphi; s)$$

とおく. ここで, $\xi(s) = \Gamma_{\mathbf{R}}(s) \zeta(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$ である.

Proposition 2 $\varphi \in S(U_A^*)$ を符号 σ_φ の Hecke eigenform とする.

(1) $E_{H_1}^*(h, \varphi; s)$ は s の有理型関数として全 s 平面に解析接続され, 関数等式

$$E_{H_1}^*(h, \varphi; s) = \sigma_\varphi^{n+1} E_{H_1}^*(h, \varphi; -s)$$

を満たす.

(2) $E_{H_1}^*(h, \varphi; s)$ は $s = n/2 - k$ ($0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}$) のみで, 高々 1 位の極をもつ以外は正則である. φ が定数関数でなければ $s = n/2$ で正則で, φ が定数関数のときは, $s = n/2$ での留数は (0 でない) 定数となる.

(3) $\sigma_\varphi = -1$ ならば, $E_{H_1}^*(h, \varphi; s)$ は entire である.

Remark Proposition 1 と Proposition 2 は, 新谷関数を介して交互に証明されていく (cf. [MS2]). 概略を述べておこう. Proposition 1 for m で得られた $\xi(\varphi; s)$ の極の情報・関数等式から, $E_{H_1}^*(h, \varphi; s)$ の constant term のそれらが分かり, (Eisenstein 級数の一般論を用いて) Proposition 2 for m が得られる. 次に, $m+1$ 次定値直交群 H' 上の保型形式 φ' について調べる. 一つのベクトルの H' における固定化部分群として H を定め, H' を H_1 の部分群とみなす. H 上の保型形式 φ をとり, φ' と $E_{H_1}^*(h, \varphi; s - 1/2)$ との H' 上の内積を考える (極の情報・関数等式は Proposition 2 for m で既知). 一方 unfold すると, これは新谷関数

$$W_{\varphi', \varphi}(h') := \int_{H_Q \backslash H_A} \varphi'(hh') \varphi(h) dh$$

を用いた $H_A \backslash H'_A$ 上の積分で表される. Hecke eigenforms φ, φ' に対してその積分を実行することによって $\xi(\varphi'; s)$ の表示が得られ, Proposition 1 for $m+1$ が示される.

4. Andrianov の方法

符号 $(1, m+1)$ の maximal 対称行列 Q_1 が与えられているという §1 の状況に戻る. $L_1 := \mathbb{Z}^{m+2}$, $L_1^* = Q_1^{-1} L_1$ とし, L_1^* の primitive element η で $i\eta \in \mathcal{D}$ なるものを一つとる. このとき, η の直交補空間 $\eta^\perp$ の Q_1 への制限は負定値であり, それを R で表す ($m+1$ 次の対称行列). R に関し, $L_1 \cap \eta^\perp$ が maximal $\mathbb{Z}$ -integral lattice であると仮定する. この状況を η が reduced であると呼ぶことにする.

$R_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ R & \end{pmatrix}$ とし, R, R_1 の直交群をそれぞれ H, H_1 で表す. H は G_1 にお

ける η の固定化部分群, H_1 は G_2 における $\bar{\eta} := {}^i(0, {}^i\eta, 0)$ の固定化部分群に他ならない. §3 で見たように, $H_{1,\infty}^0$ は $\mathcal{X} = \mathbf{R}_+^x \times \mathbf{R}^{m+1}$ に推移的に作用している. $\mathcal{X}$ の原点として $X_0 = (r_0, 0)$, $r_0 = Q_1[\eta]/2$ をとり, $H_{1,A}$ のコンパクト部分群 $U_{1,A}^*$ を定める. $g_\eta \in G_{2,\infty}^0$ を $g_\eta \langle Z_0 \rangle = i\eta$ となるように選んでおく.

$F \in S_1(K_{2,A}^*)$ 及び $\varphi \in S(U_A^*)$ に対し, 大域的 Whittaker-Shintani 関数を

$$W_{F,\varphi}(g) := \int_{H_Q \backslash H_A} F_\eta \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & h & \\ & & 1 \end{pmatrix} g \right) \varphi(h) dh \quad (g \in G_{2,A}),$$

$$F_\eta(g) := \int_{V_{1,Q} \setminus V_{1,A}} F(n(x)g) \psi(-Q_1(\eta, x)) dx,$$

$$n(x) = \begin{pmatrix} 1 & -{}^t x Q_1 & -Q_1[x]/2 \\ & 1_{m+2} & x \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (x \in V_1)$$

で定義する. ここで, $V_{1,Q} = \mathbf{Q}^{m+2}$ であり, $\psi(x) = e[x] := e^{2\pi i x}$ ($x \in \mathbf{R}$) なる $\mathbf{Q} \setminus A$ の指標を ψ で表した. $W_{F,\varphi}$ は, F の Fourier 係数 F_η の φ による重み付き平均に他ならない.

Theorem 1 $F \in S_l(K_{2,A}^*)$, $\varphi \in S(U_A^*)$ がともに Hecke eigenform のとき, 次が成立する.

$$\begin{aligned} Z_{F,\varphi}^*(s) &:= \int_{H_{1,Q} \setminus H_{1,A}} F(hg_\eta) E_{H_1}^*(h, \varphi; s - 1/2) dh \\ &= (Q[\eta]/2)^{(s-1/2)/2} \xi(\varphi; s + 1/2) \begin{cases} 1 & m : \text{odd} \\ \xi(2s) & m : \text{even} \end{cases} \\ &\quad \times \int_{\mathbf{Q}_A^\times} W_{F,\varphi} \left(\begin{pmatrix} t & & \\ & 1_{m+2} & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta \right) |t|_A^{s-(m+2)/2} d^\times t \\ &= c \cdot W_{F,\varphi}(g_\eta) \cdot \xi(F; s) \quad (c \neq 0). \end{aligned}$$

[sketch] Theorem 1 の最初の等式 (basic identity) を見ておく.

$$\begin{aligned} Z_{F,\varphi}(s) &:= \int_{H_{1,Q} \setminus H_{1,A}} F(hg_\eta) E_{H_1}(h, \varphi; s - 1/2) dh \\ &= \int_{H_{1,Q} \setminus H_{1,A}} F(hg_\eta) \sum_{\gamma \in P_{1,Q} \setminus H_{1,Q}} \varphi(\beta(\gamma h)) |t(\gamma h)|_A^{s-1/2+(m+1)/2} dh \\ &= \int_{P_{1,Q} \setminus P_{1,A}} F(n(x)) \begin{pmatrix} t & & \\ & \beta & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta \varphi(\beta) |t|_A^{s+m/2} |t|_A^{-(m+1)} dx d^\times t d\beta \\ &= \int_{V_Q' \setminus V_A'} \int_{\mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_A^\times} \int_{H_Q \setminus H_A} F(n(x)) \begin{pmatrix} t & & \\ & \beta & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta \varphi(\beta) |t|_A^{s-(m+2)/2} dx d^\times t d\beta \\ &= \int_{V_Q' \setminus V_A'} \int_{\mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_A^\times} \int_{H_Q \setminus H_A} \sum_{\xi \in V_{1,Q}} F_\xi \left(\begin{pmatrix} t & & \\ & \beta & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta \right) \psi(Q_1(\xi, x)) \\ &\quad \varphi(\beta) |t|_A^{s-(m+2)/2} dx d^\times t d\beta \end{aligned}$$

ここで, V' で V_1 における η の直交補空間 $\eta^\perp$ を表した.

$$\int_{V_Q' \setminus V_A'} \psi(Q_1(\xi, x)) dx \neq 0 \iff \xi \in \mathbf{Q} \cdot \eta$$

より,

$$Z_{F,\varphi}(s) = \int_{\mathbf{Q}^\times \setminus \mathbf{Q}_A^\times} \int_{H_Q \setminus H_A} \sum_{a \in \mathbf{Q}^\times} F_{a\eta} \left(\begin{pmatrix} t & & \\ & \beta & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta \right) \varphi(\beta) |t|_A^{s-(m+2)/2} d^\times t d\beta$$

$$= \int_{Q_A^\times} W_{F,\varphi} \left(\begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} g_\eta \right) |t|_A^{s-(m+2)/2} d^\times t$$

が得られる (F は尖点形式ゆえ $F_0 = 0$ となることに注意) .

次に、イデール群上の積分が F の L 関数を表すことを見る. 各有限素点 p において, $\mathcal{H}^+(H_p, U_p^*)$ の指標 λ , $\mathcal{H}^+(G_{2,p}, K_{2,p}^*)$ の指標 Λ に対し, 局所 Whittaker-Shintani 関数の空間を

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_p(\lambda, \Lambda) &:= \left\{ W : U_p^* \backslash G_{2,p} / K_{2,p}^* \longrightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{(i), (ii)} \end{array} \right\} \\ \text{(i)} \quad &W(n(x)g) = \psi(Q_1(\eta, x))W(g) \quad (x \in V_{1,p}) \\ \text{(ii)} \quad &\phi * W * \Phi = \lambda(\phi)\Lambda(\Phi)W(g) \quad (\phi \in \mathcal{H}^+(H_p, U_p^*), \Phi \in \mathcal{H}^+(G_{2,p}, K_{2,p}^*)) \end{aligned}$$

で定義する. ここで,

$$(\phi * W * \Phi)(g) := \int_{H_p} \int_{G_{2,p}} \phi(x) W(xgy) \Phi(y^{-1}) dx dy$$

とおいた. $W \in \mathcal{W}(\lambda, \Lambda)$ に対し,

$$\int_{Q_p^\times} W \left(\begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & \\ & & t^{-1} \end{pmatrix} \right) |t|_A^{s-(m+2)/2} d^\times t = \frac{L_p(\Lambda; s)}{L_p(\lambda; s+1/2)} \begin{cases} 1 & m : \text{odd} \\ 1 - p^{-2s} & m : \text{even} \end{cases} W(1)$$

となることが, Hecke 環の構造の (Witt 指数に関する) 帰納的な性質を用いて示される (cf. [S1]). この局所的な結果より, Theorem 1 の証明が完了する. ■

Remark $G_{2,p}, H_p$ が共に分解型のとき, 局所 Whittaker-Shintani 関数の空間 $\mathcal{W}_p(\lambda, \Lambda)$ は 1 次元で, その明示公式も求められている (cf. [KMS]). 従って大域的 Whittaker-Shintani 関数は, 上述のようにイデール群上の積分値が Euler 積となるだけでなく, 関数自身が (有限個の素点を除き) 各素点での局所 Whittaker-Shintani 関数の積となる.

Proposition 2 より, $\xi(F; s)$ についての結果が得られる.

Corollary $F \in S_l(K_{2,A}^*)$ を Hecke eigenform とする. reduced な $\eta \in V_{1,Q}$ と符号 σ_φ の Hecke eigenform $\varphi \in S(U_A^*)$ で, $W_{F,\varphi}(g_\eta) \neq 0$ なるものが存在すると仮定する. このとき, $\xi(F; s)$ は有理型関数として全 s 平面に解析接続され, 関数等式 $\xi(F; s) = \sigma_\varphi^m \xi(F; 1-s)$ を満たす. また, possible pole は, $s = (m+2)/2 - k$ ($0 \leq k \leq m+1$, $k \in \mathbb{Z}$) で高々 1 位のみである.

Remark Corollary の仮定のもと, 関数等式は

$$\xi(F; s) = \begin{cases} 1 & m : \text{even} \\ (-1)^l \prod_p \sigma_p(F) & m : \text{odd} \end{cases} \xi(F; 1-s)$$

と書かれる. ここで, $\sigma_p(F) = \pm 1$ を $F(g(-1)_p) = \sigma_p(F)F(g)$ で定めた.

5. theta lift

S を正定値, even integral, maximal な m 次対称行列とし, $Q_1 := \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -S & \\ 1 & & \end{pmatrix}$ とする. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2$, $h = [\xi, \eta, \zeta] \in V \times V \times G_a$ ($V_Q = Q^m$) を

$$hg = \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^t\eta S & S(\xi, \eta) - \zeta & S[\eta]/2 \\ & 1 & {}^t\xi S & S[\xi]/2 & \zeta \\ & & 1_m & \xi & \eta \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & & & \\ -c & d & & & \\ & & 1_m & & \\ & & & a & b \\ & & & c & d \end{pmatrix}$$

により, G_2 に埋め込む. この像を G^J で表し, Jacobi 群と呼ぶ.

G_∞^J は $\mathfrak{h} \times C^m$ に推移的に作用する:

$$(hg)\langle(z, w)\rangle = (g\langle z\rangle, wj(g, z)^{-1} + \xi \cdot g\langle z\rangle + \eta).$$

ここで, $SL_2(\mathbf{R})$ の上半平面への作用および保型因子は

$$g\langle z\rangle = (az + b)/(cz + d), \quad j(g, z) = cz + d$$

なる通常のものである. l, N を自然数とし, weight l , index $N \cdot S$ の正則保型因子を

$$J_{l,N}(hg, (z, w)) := j(g, z)^l e[N \left\{ -\zeta + \frac{c}{2} S[w]j(g, z)^{-1} - S(\xi, w)j(g, z)^{-1} - g\langle z\rangle S[\xi]/2 \right\}]$$

で定義する. $\Gamma^J := G^J \cap SL_{m+4}(\mathbf{Z})$ とおく. $\mathfrak{h} \times C^m$ 上の正則関数 f で,

$$\begin{aligned} f(\gamma\langle(z, w)\rangle) &= J_{l,N}(\gamma, (z, w)) f(z, w) \quad (\gamma \in \Gamma^J), \\ f(z, w) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}, \alpha \in L^*, 2nN - S[\alpha] > 0} a_f(n, \alpha) e[nz - S(\alpha, w)] \end{aligned}$$

を満たすものを, weight l , index $N \cdot S$ の Jacobi 尖点形式と呼び, その全体を $\mathfrak{S}_{l,N}(\Gamma^J)$ で表す.

index S の Jacobi 尖点形式の空間 $\mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ には Jacobi Hecke 環 $\mathcal{H}_p^J$ が作用する. その中心 $\mathcal{H}_p^{J,+}$ の指標 $\lambda: \mathcal{H}_p^{J,+} \rightarrow \mathbf{C}$ に対し, local standard L 関数 $L_p(\lambda; s)$ が定義される. $S \in GL_m(\mathbf{Z}_p)$ のとき, m が偶数 [resp. 奇数] ならば $L_p(\lambda; s)^{-1}$ は p^{-s} の 3 次 [resp. 2 次] 多項式である (cf. [S3]).

$\mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ が $\mathcal{H}_p^{J,+}$ の同時固有関数 (固有値 λ_f) のとき, $L(f; s) := \prod_{p < \infty} L_p(\lambda_f; s)$ を global standard L 関数と呼ぶ. ガンマ因子を

$$L_\infty(f; s) = \begin{cases} (\det S)^{s/2} \Gamma_{\mathbf{C}}(s + l - (m + 2)/2) \Gamma_{\mathbf{R}}(s + a) & m : \text{even} \\ (2^{-1} \det S)^{s/2} \Gamma_{\mathbf{C}}(s + l - (m + 2)/2) & m : \text{odd} \end{cases}$$

で定める. ここで, $m \equiv 0 \pmod{4}$ のとき $a = 1$ とし, $m \equiv 2 \pmod{4}$ のとき $a = 0$ とおいた.

Proposition 3 $f \in \mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ を Hecke eigenform とする. $\xi(f; s) := L_\infty(f; s) L(f; s)$ は有理型関数として全 s 平面に解析接続され, 関数等式

$$\xi(f; s) = \begin{cases} -1 & m \equiv 1, 3 \pmod{8} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \xi(f; 1-s)$$

を満たす. また, $s = 0, 1$ が高々 1 位の possible pole である他では正則.

$f \in \mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ に対し, IV 型領域 $\mathcal{D}$ 上の正則関数 $I(f)$ を

$$I(f)(Z) := \sum_{\eta \in L_1^*, i\eta \in \mathcal{D}} a_{I(f)}(\eta) e[Q_1(\eta, Z)] \quad (Z \in \mathcal{D}),$$

$$a_{I(f)}\left(\begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ b \end{pmatrix}\right) := \sum_{r|a, b, \alpha} r^{l-1} a_f(abr^{-2}, \alpha r^{-1}) \quad (a, b \in \mathbf{Z}, \alpha \in L^*)$$

により定義する. $I(f)$ は $\Gamma_2^* := G_{2,\mathbf{Q}} \cap G_{2,\infty}^0 \prod_{p<\infty} K_{2,p}^*$ に関する weight l の正則尖点形式となる. $G_{2,A} = G_{2,\mathbf{Q}} G_{2,\infty}^0 K_{2,A}^*$ ゆえ, これは $S_l(K_{2,A}^*)$ の元を定める. $I: \mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J) \rightarrow S_l(K_{2,A}^*)$ を theta lift と呼ぶ.

Remark $\mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ は, $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する weight $l-m$ の (ベクトル値) 正則保型形式の空間とみなされる. 上記の theta lift I は, Oda [O1] の構成の Jacobi 形式版である. この定式化の一つのメリットは, I の単射性にある. Siegel modular 形式の場合 ($m=1$) に, Zagier [Z] により導入されたもので, Saito-Kurokawa 予想の解決に用いられた.

Proposition 4 $f \in \mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ を Hecke eigenform とする. このとき, $I(f) \in S_l(K_{2,A}^*)$ も Hecke eigenform で, 次が成立する.

$$L(I(f); s) = L(f; s) \prod_{j=0}^m \zeta(s-j+m/2).$$

Remark Proposition 3, 4 より, theta lift の像 (old forms) については, standard L 関数 $\xi(I(f); s)$ の解析接続・関数等式及び $s = (m+2)/2$ で極を持つことが分かる. 更に, $s = (m+2)/2$ での極の存在は, old form を特徴付けられると思われる. $\xi(F; s)$ についての (条件なしの) 結果が得られている場合には, これは確かめられている (cf. [O2], [S2]).

6. Kohnen-Skoruppa の方法

G_2 上の weight 0 の Eisenstein 級数について復習しておく. 定値直交群 $G = O(S)$ 上の保型形式の空間 $S(K_A^*)$ を §3 と同様に定める. P_2 を G_2 の上三角極大放物部分群で, Levi part が $GL_2 \times G$ となるものとする:

$$P_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ & \beta & * \\ & & \alpha' \end{pmatrix} \mid \alpha \in GL_2, \beta \in G \right\}, \quad \alpha' = J^{-1t} \alpha^{-1} J.$$

岩澤分解 $G_{2,A} = P_{2,A} K_{2,A}^*$ により, $g \in G_{2,A}$ は

$$g = \begin{pmatrix} \alpha(g) & * & * \\ & \beta(g) & * \\ & & \alpha(g)^{-1} \end{pmatrix} k(g), \quad \alpha(g) \in GL_2(\mathbf{Q}_A), \beta(g) \in G_A, k(g) \in K_{2,A}^*$$

の形に書かれる. $\varphi \in S(K_A^*)$, $s \in \mathbf{C}$ に対し, $G_{2,A}$ 上の Eisenstein 級数を

$$E_{G_2}(g, \varphi; s) := \sum_{\gamma \in P_{2,\mathbf{Q}} \backslash G_{2,\mathbf{Q}}} \varphi(\beta(\gamma g)) |\det \alpha(\gamma g)|_A^{s+(m+1)/2}$$

で定義する. 右辺は, $\operatorname{Re}(s) > (m+1)/2$ で広義一様絶対収束する. $\varphi \in S(K_A^*)$ が Hecke eigenform のとき,

$$E_{G_2}^*(g, \varphi; s) := \xi(\varphi; s+3/2) \begin{cases} \xi(2s+1) & m: \text{even} \\ \xi(2s+2) & m: \text{odd} \end{cases} E_{G_2}(g, \varphi; s)$$

とおく.

Proposition 5 $\varphi \in S(K_A^*)$ を符号 σ_φ の Hecke eigenform とする.

(1) $E_{G_2}^*(g, \varphi; s)$ は有理型関数として全 s 平面に解析接続され, 関数等式

$$E_{G_2}^*(g, \varphi; s) = \sigma_\varphi^m E_{G_2}^*(g, \varphi; -s)$$

を満たす.

(2) $E_{G_2}^*(g, \varphi; s)$ は $s = (m+1)/2 - k$ ($0 \leq k \leq m+1$, $k \in \mathbf{Z}$) で高々 1 位の極を持つ以外は正則である. $s = (m+1)/2$ で極を持つ必要十分条件は, φ が定数関数であることであり, このとき留数は定数となる.

(3) $\sigma_\varphi = -1$ ならば, $E_{G_2}^*(g, \varphi; s)$ は entire である.

P_2 の unipotent radical を N_2 とし, P_2 の部分群 G を

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ & \beta & * \\ & & \alpha' \end{pmatrix} \in G_2 \mid \alpha \in SL_2, \beta \in G \right\} = (SL_2 \times G) \cdot N_2$$

で定める. G は

$$Z := \{z(\zeta) \mid \zeta \in \mathbf{G}_a\}, \quad z(\zeta) := n\left(\begin{pmatrix} \zeta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

を中心とする非簡約群で, Jacobi 群 G^J と $G = O(S)$ との半直積となる.

$K_A^* := G_A \cap K_{2,A}^*$ に関する weight l , index $N \cdot S$ の Jacobi 尖点形式が §5 と同様に定義される. その全体を $\mathfrak{S}_{l,N}(K_A^*)$ で表す. (領域上の Jacobi 尖点形式の空間の, 類数 $|G_{\mathbf{Q}} \backslash G_A / K_A^*|$ 個の直積と同型となる). $f, f' \in \mathfrak{S}_{l,N}(K_A^*)$ の (Petersson) 内積を

$$\langle f, f' \rangle_N := \int_{Z_A G_{\mathbf{Q}} \backslash G_A} f(g) \overline{f'(g)} dg$$

で定義する. また, この空間に $S(K_A^*)$ を

$$(f \otimes \varphi)(g) := f(g) \varphi(\beta(g)) \quad (f \in \mathfrak{S}_{l,N}(K_A^*), \varphi \in S(K_A^*))$$

と作用させる.

$F \in S_l(K_{2,A}^*)$ の N -th Fourier-Jacobi 係数 F_N を

$$F_N(g) := \int_{Q \backslash Q_A} F(z(\zeta)g) \psi(-N\zeta) d\zeta$$

で定める. 定義より, F_N の G_A への制限は $\mathfrak{S}_{l,N}(K_A^*)$ の元を定める. 特に, $F \in S_l(K_{2,A}^*)$ と $f \in \mathfrak{S}_{l,1}(K_A^*)$ に対し, 大域的 Whittaker-Shintani 関数を

$$W_{F,f}(g) := \int_{Z_A G_Q \backslash G_A} F_1(g_1 g) \overline{f(g_1)} dg_1$$

で定義する. $W_{F,f}(1) = \langle F_1|_{G_A}, f \rangle_1$ である.

Theorem 2 $F \in S_l(K_{2,A}^*)$ を Hecke eigenform, $\varphi \in S(K_{0,A}^*)$ を Hecke eigenform とする. Jacobi 尖点形式 $f \in \mathfrak{S}_{l,1}(I^V)$ の theta lift $I(f)$ の G_A への制限を $\mathbf{f}$ で表す. このとき, 次が成立する.

$$\begin{aligned} Z_{F,\varphi,f}^*(s) &:= \int_{G_2, Q \backslash G_{2,A}} F(g) E_{G_2}^*(g, \varphi; s-1/2) \overline{I(f)(g)} dg \\ &= c' \cdot 2^{-s} \Gamma_C(s+l-(m+2)/2) \xi(\varphi; s+1) \times \begin{cases} \xi(2s) & m: \text{even} \\ \xi(2s+1) & m: \text{odd} \end{cases} \\ &\quad \times \int_{GL_2(Q_{A,f}) \cap M_2(Z_{A,f})} W_{F,f \otimes \varphi} \left(\begin{pmatrix} g & & \\ & 1_m & \\ & & g' \end{pmatrix} \right) |\det g|_A^{s-m/2} dg \\ &= c \cdot W_{F,f \otimes \varphi}(1) \cdot \xi(F; s). \end{aligned}$$

ここで, $Q_{A,f}$ は Q_A の有限部分, $Z_{A,f} = \prod_{p < \infty} Z_p$ である.

[sketch] Theorem 2 の最初の等式をまず見る. 標準的な unfolding により, 任意の $F, F' \in S_l(K_{2,A}^*)$ に対し,

$$\begin{aligned} &\int_{G_2, Q \backslash G_{2,A}} F(g) E_{G_2}(g, \varphi; s-1/2) \overline{F'(g)} dg \\ &= c_1 2^{-s} \Gamma_C(s+l-\frac{m+2}{2}) \sum_{N=1}^{\infty} N^{-(s+l-(m+2)/2)} e^{4\pi N} \langle F_N|_{G_A} \otimes \varphi, F'|_{G_A} \rangle_N. \end{aligned}$$

一方, shift operator $V_N: \mathfrak{S}_{l,1}(K_A^*) \rightarrow \mathfrak{S}_{l,N}(K_A^*)$ を用いて Whittaker-Shintani 関数の積分を計算することにより, $F \in S_l(K_{2,A}^*)$, $f \in \mathfrak{S}_{l,1}(K_A^*)$, $\varphi \in S(K_A^*)$ に対して,

$$\begin{aligned} &\int_{GL_2(Q_{A,f}) \cap M_2(Z_{A,f})} W_{F,f \otimes \varphi} \left(\begin{pmatrix} g & & \\ & 1_m & \\ & & g' \end{pmatrix} \right) |\det g|_A^{s-m/2} dg \\ &= c_2 \sum_{N=1}^{\infty} N^{-(s+l-(m+2)/2)} e^{2\pi N} \langle F_N|_{G_A} \otimes \varphi, V_N \mathbf{f} \rangle_N \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. $V_N(I(f)_1|_{G_A}) = e^{2\pi(N-1)} \cdot I(f)_N|_{G_A}$ であることに注意して, basic identity を得る.

Euler 積への分解は,

$$\mathcal{W}_p := \left\{ W : \mathbf{K}_p \backslash G_{2,p} / K_{2,p}^* \longrightarrow \mathbf{C} \mid W(z(\zeta)g) = \psi(z)W(g) \quad \zeta \in \mathbf{Q}_p \right\}$$

への Hecke 環 $\mathcal{H}(G_{2,p}, K_{2,p}^*)$ の作用を詳しく見ることに基づく. $W \in \mathcal{W}_p$ が

$$W * \Phi = \Lambda(\Phi) W \quad (\Phi \in \mathcal{H}^+(G_{2,p}, K_{2,p}^*)), \quad \phi * W(1) = \lambda(\phi)W(1) \quad (\phi \in \mathcal{H}^+(G_p, K_p^*))$$

を満たすとき, 適当な付加条件の下で,

$$\begin{aligned} & \int_{GL_2(\mathbf{Q}_p) \cap M_2(\mathbf{Z}_p)} W\left(\begin{pmatrix} g & & \\ & 1_m & \\ & & g' \end{pmatrix}\right) |\det g|_p^{s-m/2} dg \\ &= W(1) L_p(\Lambda; s) L_p(\lambda; s)^{-1} \begin{cases} 1 - p^{-2s} & m : \text{even} \\ 1 - p^{-(2s+1)} & m : \text{odd} \end{cases} \end{aligned}$$

の成り立つことが示され, Euler 積への分解を得る. ■

Remark $F_1|_{G_A} \neq 0$ ならば, $\varphi \in S(K_A^*)$, $f \in \mathfrak{S}_{l,1}(\Gamma^J)$ で $W_{F,f \otimes \varphi}(1) \neq 0$ なるものが存在する. 従って, Proposition 5 より $\xi(F; s)$ の解析接続・関数等式が得られる.

7. 新谷関数による方法

Proposition 1, 2 の証明においては, 新谷関数の利用が鍵を担った (§3 Remark 参照). この手法は (原理的には) 対称行列の符号にはよらないので, 正則保型形式の場合にも適用可能である (但し無限素点での計算は易しくないと思われる).

L_1^* の primitive element ξ を $Q_1[\xi] < 0$ にとり, Q_1 の $\xi^\perp$ への制限を R_1 とおく. R_1 の符号は $(1, m)$ である. 以下, R_1 に関して $M_1 := L_1 \cap \xi^\perp$ が maximal であると仮定する.

$$R_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & R_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & R_2 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

とし, R_i の直交群を H_i ($i = 2, 3$) とおく. L_2 の基底を取り替え,

$$Q_1 = \begin{pmatrix} R_1 & -R_1\alpha \\ -{}^t\alpha R_1 & -2a \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}, \quad \Delta = 2a + R_1[\alpha]$$

とすると, H_2 は G_2 における $\tilde{\xi}$ の, G_2 は H_3 における η の固定化部分群となる. ここで,

$$\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^t\eta = (a, 0, {}^t\alpha, 0, 1)$$

H_3 の上三角極大放物部分群 P_3 で, Levi part が $GL_1 \times H_2$ なるものを表す. $H_{3,\infty}$ の極大コンパクト群 $U_{3,\infty}^* \cong SO(3) \times SO(m+2)$ を $U_{3,\infty}^* \cap G_{2,\infty} = K_{2,\infty}^*$ となるように選んでおく. $SO(3)$ の highest weight l の既約表現 (π_l, V_l) を, $(SO(m+2)$ 上 trivial として) $U_{3,\infty}^*$ の表現とみなす.

岩澤分解 $H_{3,A} = P_{3,A} U_{3,A}^*$ により, $h \in H_{3,A}$ は

$$h = \begin{pmatrix} t(h) & * & * \\ & \beta(h) & * \\ & & t(h)^{-1} \end{pmatrix} k(g), \quad t(h) \in \mathbf{Q}_A^\times, \beta(h) \in H_{2,A}, u(h) \in U_{3,A}^*$$

の形に書かれる. $H_{2,A}$ 上の weight l の正則尖点形式 $f \in S_l(U_{2,A}^*)$ に対し, $H_{3,A}$ 上の Eisenstein 級数を

$$E_{H_3}(h, \bar{f}; s) := \sum_{\gamma \in P_{3,Q} \backslash H_{3,Q}} \overline{f(\beta(\gamma h))} |t(\gamma h)|_A^{s+(m+3)/2} \tau_l(u(h)_\infty^{-1}) v_l$$

で導入する ($v_l \in V_l$ は highest weight vector) .

Theorem 3 $F \in S_l(K_{2,A}^*)$, $f \in S_l(U_{2,A}^*)$ を共に Hecke eigenform とする. このとき, 次が成立する.

$$\begin{aligned} Z_{F,f}(s) &:= \int_{G_{2,Q} \backslash G_{2,A}} F(g) E_{H_3}(g, \bar{f}; s-1/2) dg \\ &= \int_{H_{2,A} \backslash G_{2,A}} W_{F,f}(\beta(g)^{-1}g) |t(g)|_A^{s+(m+2)/2} dg v_l \\ &= Z_{F,f,\infty}(s) \frac{L(F; s)}{L(\bar{f}; s+1/2)} \left\{ \begin{array}{cc} 1 & m : \text{odd} \\ \zeta(2s)^{-1} & m : \text{even} \end{array} \right\} v_l. \end{aligned}$$

ここで $W_{F,f}$ は大域的新谷関数

$$W_{F,f}(g) := \int_{H_{2,Q} \backslash H_{2,A}} F(hg) \overline{f(h)} dh$$

であり, $Z_{F,f,\infty}(s)$ は無限素点での積分を表す.

Remark Theorem 3 の basic identity を示す際, unfolding において様々な orbit が現れる. F の cuspidality により, main orbit 以外の積分が消え, アデール上の積分に書き直される (cf. [MS 1]).

References

- [A] Andrianov, A.N. : Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2, Russian Math. Surveys 29 (1974), 45 – 116.

- [KMS] Kato, S., Murase, A. and Sugano, T. : Whittaker-Shintani functions for orthogonal groups, *Tohoku Math. J.* 55 (2003), 1 – 64.
- [KS] Kohnen, W. and Skoruppa, N.-P. : A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two, *Invent. Math.* 95 (1989), 541 – 558.
- [MS1] Murase, A. and Sugano, T. : Shintani functions and its application to automorphic L -functions for classical groups, I. The case of orthogonal groups. *Math. Ann.* 299 (1994), 17 – 56.
- [MS2] Murase, A. and Sugano, T. : On standard L -functions attached to automorphic forms on definite orthogonal groups, *Nagoya Mat. J.* 152 (1998), 57 – 96.
- [MS3] Murase, A. and Sugano, T. : On standard L -functions associated with holomorphic cusp forms on $O(2, m + 2)$, preprint.
- [O1] Oda, T. : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n - 2)$, *Math. Ann.* 231 (1977), 97 – 144.
- [O2] Oda, T. : On the poles of Andrianov L -functions, *Math. Ann.* 256 (1981), 323 – 340.
- [S1] Sugano, T. : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on $SO(2, q)$, *Advanced Studies in Pure Math.* 7 (1985), 333 – 362.
- [S2] Sugano, T. : On the L -functions associated with hermitian modular forms of genus 2, *Bull. Fac. Educ. Mie Univ.* 42 (1991), 1 – 28.
- [S3] Sugano, T. : Jacobi forms and the theta liftings, *Commentarii Mathematici Univ. St. Pauli* 44 (1995), 1 – 58.
- [Z] Zagier, D. : Sur les conjectures de Saito-Kurokawa (d'après H. Maass), *Seminaire Delange-Pisot-Poitou 1979 – 1980, Progress in Math.* 5 (1980), Birkhauser, 371 –