

遺伝的アルゴリズムの制御への応用

Applications of the genetic algorithm for control problems

北海道大学 工学部 島 公脩・山下 裕

Faculty of Engineering, Hokkaido Univ.

M.Shima, Y.Yamashita

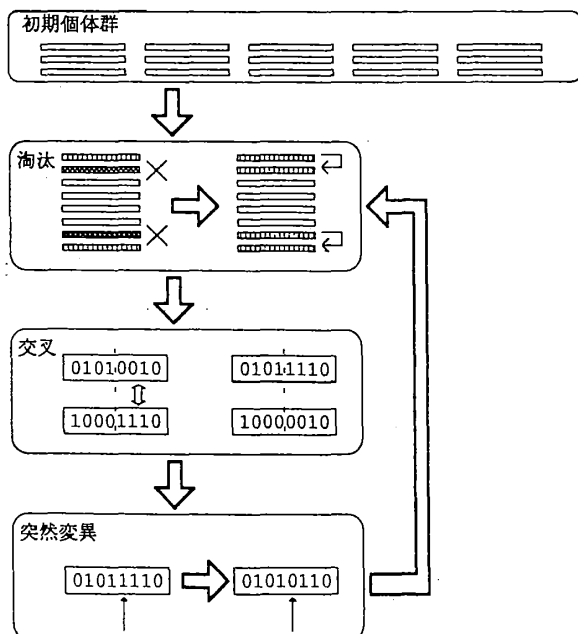
1. はじめに

本報告では、遺伝的アルゴリズムを各種の制御問題に応用した結果を示す。

2. GA の概要

GA(Genetic Algorithm, 遺伝的アルゴリズム)は工学の立場から見れば、単なる最適化の数値計算の1つであり、 $F(x) \rightarrow \min$ となる x を求める問題である。GA が有利な点は勾配 $\partial F(x)/\partial x$ などの関数 $F(x)$ そのものの性質を知っている必要はなく、 $F(x)$ は単なるブラックボックスでよいということである。また、 $F(x)$ が多峰性でも解が求まる場合が多い点もあげられる。一方、欠点としては真の解に収束する証明が何も得られていないことがある。

GA では、 x を遺伝子にコーディングし、その遺伝子を進化させることで準最適解を得る。たとえば、探索すべき空間を $\mathcal{R}$ とし、 $x = \text{col.}(x_1, \dots, x_n)$ とおく、 x を通常の2進数表現あるいは Gray コード表現で0, 1のビット列で表現したものが遺伝子となる。



このような遺伝子を複数個ランダムに用意し、次に

$F(x)$ の値によって淘汰・複製が行われる。その後に、ランダムに選んだ2個体同士を交叉させ、さらに突然変異によって遺伝子パターンの一部を変化させる。これが1世代で、そのあとは、再び淘汰・複製の手順に戻る。決められた世代数が経過すると、その時点で一番評価値のよい個体が準最適解である。

3. 最適制御問題

制御対象は、

$$\dot{x} = f(x, u)$$

なる微分方程式で表されるものとする。ここで、 $x \in \mathcal{R}^n$ は系の状態で $x(t_0) = x_0 (\text{const.})$ 、 $u(t) \in \Omega$ (Ω は $\mathcal{R}^m$ の compact and convex set) は系への入力である。この系にたいし、Mayer 型の評価規範、

$$J = F(x(t_1)) \rightarrow \min$$

による最適制御問題を考える。この問題はある条件下では最大原理により最適解が示される。(実際に解けるかは別問題であるが...) すなわち、随伴変数を $p = \text{row.}(p_1, \dots, p_n)$ とおき、Hamiltonian を、

$$H(x, u, p) = \langle p, f(x, u) \rangle$$

とおくと、 x と p の挙動は正準方程式、

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H(x, p, u)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial x_i}$$

および境界条件、

$$x(t_0) = x_0, \quad p(t_1) = -\frac{\partial F(x(t_1))}{\partial x}$$

によって決定される。

最大原理 もし、ある許容入力 $u(\cdot)$ が区間 $[t_0, t_1]$ 上で J を最小にするならば、 $u(\cdot)$ および境界条件により定まる、正準方程式、

の解に沿って、

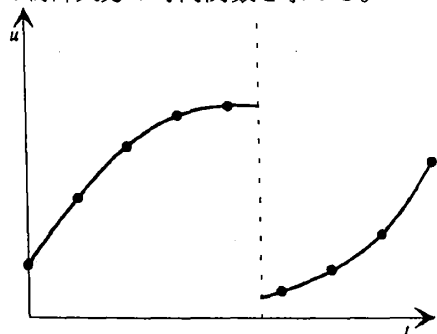
$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{u \in \Omega} H(x(t), p(t), u)$$

が $[t_0, t_1]$ のほとんどいたるところで成り立っていない

ければならない。■

しかし、最適軌道に沿って Hamiltonian に全く u の影響が現れずに、最大の u を決定できない場合もあり得る。そのような場合は実際多くみられ、最適特異制御問題と呼ばれており、30 年間未解決な問題であった。最適特異制御問題に対しては有効な数値計算法すら知られていなかった。

ここでは、その最適特異制御問題に対し GA を適用し準最適解を求める。まず、入力を時間に沿って $N-1$ 分割し、 N 個のノードに対し、その時点での入力の値・次のノードまでの制御入力の不連続になるか否か・不連続になるならばどの時点であるのか、の 3 つの情報をコーディングした遺伝子を N 個並べて 1 つの個体とする。連続な区間は 3 次 spline 補間を用いて制御入力の時間関数を求める。



例題 槽型流通反応系(1 原料 1 製品)

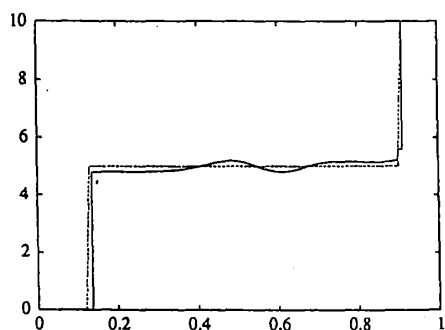
無次元化した制御対象は、

$$\dot{x} = -kx + \frac{1}{V}(\alpha - x)u$$

である。ただし、 $0 \leq u \leq F_m$ とする。評価規範は、

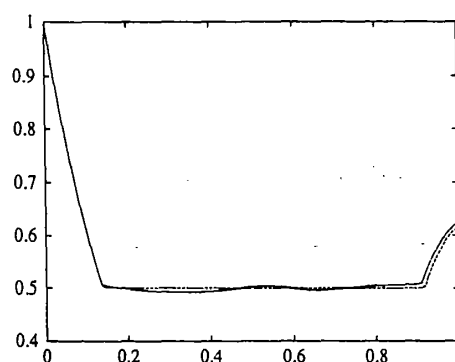
$$J = \int_0^T [-aux + \alpha(a - a')u] dt$$

とする。 $T=1$, $k=5$, $V=1$, $\alpha=1$, $F_m=10$, $a=4$, $a'=1$, $x(0)=10$ のときの結果を下に示す。



制御入力 u

この問題においては解析解がすでに得られているので、その場合と比較した。実線が GA による解・破線が解析解である。またこのときの状態量 x の応答を下に示す。



状態量 x の応答

4. Hamilton-Jacobi(-Issacs)偏微分方程式と遺伝的アルゴリズム

Hamilton-Jacobi(-Issacs)偏微分方程式は非線形最適レギュレータ及び非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題と深い関係がある。

非線形最適レギュレータ問題 制御対象を、

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u^i(t), \quad x(t) \in \mathcal{N}^n, u(t) \in \mathcal{N}^m$$

とする。また、評価規範を、

$$J = \int_0^\infty L(x, u) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty l(x) + u^T R u dt,$$

$$l(x) > 0, \quad R > 0$$

とし、 J を最小とする最適入力 $u(t) = \alpha(x(t))$ を決定する問題である。この問題は、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式、

$$\frac{1}{2} l(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) R^{-1} g^T(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = 0$$

が解 $V(x) > 0$ を持てば可解であり、最適入力は、

$$u = -R^{-1} g^T(x) \frac{\partial V^T}{\partial x}$$

によって決められる。またこのとき $V(x)$ は Lyapunov 関数となり、閉ループ系は安定化される。

非線形 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題 制御対象を、

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + k(x)w$$

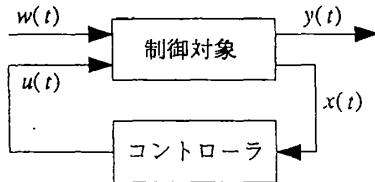
$$y = h(x)$$

とする。ただし、 $f(0)=0$, $h(0)=0$ とする。

$w \rightarrow y$ の $\mathcal{L}_2$ -ゲイン、

$$\sup_{\substack{w(t) \\ T > 0}} \frac{\int_0^T \|y(t)\|^2 dt}{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt}, \quad x(0) = 0$$

を予め決められた値 γ 以下とするフィードバック $u = \alpha(x)$ を求める問題である。これは、 u を制御入力、 y を制御すべき出力、 w を系に加わる外乱であるとし、 γ を小さく選ぶことができれば、系の出力に表れる外乱の影響を小さくすることに相当する。



また、線形系では、 $\mathcal{L}_2$ -ゲインは良く知られた $\mathcal{H}_\infty$ -ノルムと一致する。

この問題は定数 c に対して

$$J = \int_0^T \|y(t)\|^2 + c^2 \|u(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 dt \leq 0$$

とすることによって解かれる。可解性の十分条件は、この J に対する Hamilton-Jacobi-Issacs 偏微分方程式(不等式)、

$$\frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma^2} k k^T - \frac{1}{c^2} g g^T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T h \leq 0$$

の解 $V(x) > 0 (x \neq 0)$, $V(0) = 0$ が存在することであり、

$$u = -\frac{1}{c^2} g^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}$$

によって目的を達成するフィードバック則が得られる。また、制御対象が zero-state observable ならば、系の安定性も保証される。

しかし、この 2 つの問題において、Hamilton-Jacobi(-Issacs)偏微分方程式(不等式)を解くことは困難である。そこで、遺伝的アルゴリズムによってこの方程式(不等式)を解くことを考える。まず、複数のサンプル点 $x_1, \dots, x_N$ を用意する。

$$p(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x)$$

とし、Hamilton-Jacobi(-Issacs)方程式の左辺を $I(x, p)$ とおくと、

$$J_{GA} = \max_i |I(x_i, p(x_i))|$$

を最小化するように $V(x)$ を選ぶこととする。Strage function $V(x)$ の遺伝子へのコーディング法である

が、まず、

$$V(x) = x^T P_2 x + P_3 x^{[3]} + P_4 x^{[4]} + \dots + P_M x^{[M]}$$

と M 次の多項式にして表現する。ここで P_2 は Riccati 代数方程式(Hamilton-Jacobi 方程式の 2 次の項を取り出すと得られる)の唯一の正定解であり、 $x^{[n]}$ は n 次の同次式のベクトルである。残った $P_3, \dots, P_M$ の係数をコーディングして 1 つの個体とする。

例題 最適レギュレータの例題を示す。制御対象は、

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 - x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2^2 + 3x_1^3 + 3u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2 - 3x_2^3 + x_1^2 x_2^2 + u$$

で与えられる 2 次系である。評価規範は、

$$J = \int_0^\infty x^T(t)x(t) + u(t)^2 dt$$

とする。この問題を、上記の手順に沿って GA で解く。 $M=6$ 、サンプリングの領域を $-1 \leq x^1 \leq 1$, $-1 \leq x^2 \leq 1$ として解くと、

$$p_1(x) = 0.297x_1^3 + 0.0341x_1^5 + 0.250x_1 + 0.203x_2$$

$$+ 0.00458x_1x_2 - 0.0683x_1^2x_2 + 0.00163x_1^3x_2$$

$$- 0.0142x_1^4x_2 - 0.0377x_1x_2^2 - 0.0302x_1^2x_2^2$$

$$+ 0.107x_1^3x_2^2 + 0.0281x_2^3 - 0.00446x_1x_2^3$$

$$+ 0.000492x_1^2x_2^3 - 0.0244x_2^4 + 0.149x_1^2x_2^4$$

$$+ 7.29 \times 10^{-7}x_2^5$$

$$p_2(x) = 0.203x_1 + 0.00229x_1^2 + 0.0227x_1^3$$

$$+ 0.000409x_1^4 - 0.00285x_1^5 + 1.65x_2$$

$$- 0.0377x_1^2x_2 - 0.0201x_1^3x_2 + 0.0537x_1^4x_2$$

$$+ 0.0844x_1x_2^2 - 0.00670x_1^2x_2^2 + 0.000492x_1^3x_2^2$$

$$- 1.43x_2^3 - 0.0978x_1x_2^3 + 0.2980x_1^2x_2^3$$

$$- 6.69 \times 10^{-6}x_2^4 + 3.64 \times 10^{-6}x_1x_2^4 - 0.0321x_2^5$$

なる解が得られた。

5. ファジイルールの GA による学習

ファジイ推論においては、if-then 型のファジイルールを人間の経験に基づいて予め与えておくことが前提となっている。しかし、このようなルールを決めることが難しい問題も数多くある。そこで、ここではファジイ制御問題に対し、ある評価規範を小さくするようにファジイルールを GA によって学習させることを目的とする。

ファジイ推論の前件部を $x_1, x_2, \dots$ 、後件部を y とする。ただし、

NB→0, NS→1, ZO→2, PS→3, PB→4

と数値化されているものとする。ここでは、

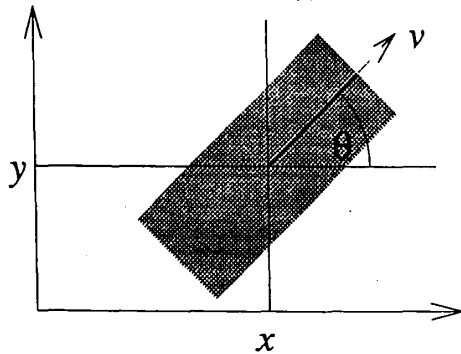
$$y = A[x_1, x_2, \dots]$$

の関数 A をコーディングする。すなわち、前件部の取りうる全ての組み合わせに対して、その後件部を並べて遺伝子、

$$A[0,0,\dots,0], A[0,0,\dots,1], \dots, A[0,\dots,4], A[0,\dots,1,0], \dots$$

を作る。

例題 車両の障害物回避制御に応用する。固定された障害物及び目標点が与えられ、障害物を避けつつ目標点に最短で到達することを目的とする。



制御対象は、

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= u_1 \\ \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{v} &= u_2\end{aligned}$$

で表されている、non-holonomic 拘束を持つ系である。この系に対し非線形補償の予備フィードバック、

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{v} \sin \theta & \frac{1}{v} \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{T}(v \cos \theta - \dot{x}_D) \\ -\frac{1}{T}(v \sin \theta - \dot{y}_D) \end{pmatrix}$$

を適用する。ただし、 $T > 0$ 。新しい入力は $(\dot{x}_D, \dot{y}_D)$ である。すると、

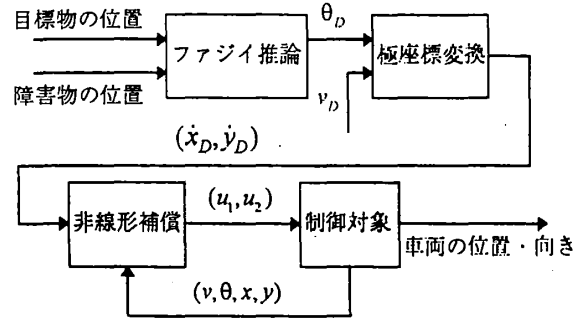
$$\ddot{x} = -\frac{1}{T}(\dot{x} - \dot{x}_D), \quad \ddot{y} = -\frac{1}{T}(\dot{y} - \dot{y}_D)$$

となるので、 $(\dot{x}_D, \dot{y}_D)$ は $(\dot{x}, \dot{y})$ の目標値である。

$(\dot{x}_D, \dot{y}_D)$ を極座標表現し、

$$\dot{x}_D = v_D \cos \theta_D, \quad \dot{y}_D = v_D \sin \theta_D$$

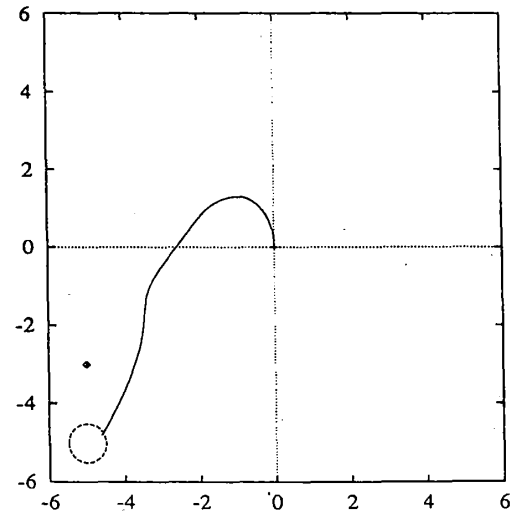
とする。簡単のため、 v_D は定数とし、 θ_D のみをファジィ推論で求めることとする。ファジィ推論における前件部は目標物・障害物までの距離・車両から見た角度、後件部は θ_D である。



GA に与える評価関数は、ランダムに与えた初期状態に対する 20 回の試行における、

$$J_{GA} = T + \frac{w}{R^2 + \alpha}$$

を合計したものである。ここで、 T は到達時間、 R は障害物までの最接近距離、 w は重み係数、 α は分母を 0 にしないための定数である。世代毎にテストパターンが変化するように設定した。スタート時のスピードは 1.0、 $v_D = 1.0$ 、 $T = 2.0$ 、 $w = 5$ 、 $\alpha = 0.001$ 、目標物に 0.5 以内の距離まで近づいた時に「到達」したものと判定した。15 秒後に未到達ならば到達時間として 60 秒のペナルティを科した。GA のパラメータは、個体数 100、世代数 100、突然変異確率 5% とした。結果の一部を下に示した。



車両の回避運動

6. おわりに

GA の各種制御問題への応用の幾つかを示した。ここで述べた問題以外にも、GA を制御問題に応用している研究は多く発表されている。今後、ますます発展する分野であろう。