

Subnormal 作用素のスペクトルによる穴うめ問題

神奈川大 エ 泉池 敬司

ヒルベルト空間上の subnormal 作用素のスペクトルはその極小 normal 拡大のスペクトルの holes のいくつかをうめたものになる。そこで 1 つの normal 作用素を固定して、それを極小 normal 拡大にまつ subnormal 作用素のスペクトルによる holes のうまり方に関する問題を考えた。

§ 1. 準備

$\mathcal{H}$ を可分ヒルベルト空間とする。 N を $\mathcal{H}$ 上の normal 作用素 (作用素はすべて有界とする) とする。 N の不変部分空間で $\mathcal{H}$ を含む最小の N が N^* 不変部分空間が $\mathcal{H}$ と一致するものを $H \subset \mathcal{H}$ とする時、 N を H に制限した作用素を集めて $\mathcal{S}(N)$ と書くことにする。 すなわち

$$\mathcal{S}(N) = \{ N|_H ; H \text{ は } \mathcal{H} \text{ の性質をみたす} \}.$$

いえるように $\mathcal{S}(N)$ は N を極小 normal 拡大にまつ subnormal

作用素全体である。作用素のスペクトルを $\alpha(\cdot)$ で表す。

定理 (Bram, 1955). $S \in \mathcal{S}(N)$ に対して $\alpha(S)$ は $\alpha(N)$ とそのいくつかの holes を集めたものである。

この定理より $\mathcal{S}(N)$ に含まれる作用素のスペクトルに関していくつかの問題が自然に生ずる。ここでは以下の問題に関して述べてみたい。

問題 1. $\alpha(S)$ ($S \in \mathcal{S}(N)$) どのような holes の集まりか?

これは Conway and Olin によつて N の scalar spectral 尺度によつて決定されることが示された。そこで $\alpha(N)$ の holes を $\alpha(S)$ ($S \in \mathcal{S}(N)$) によつてどのような holes を $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ とする。つまり $\bigcup \{ \alpha(S); S \in \mathcal{S}(N) \} = \alpha(N) \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots$

問題 2. $\Lambda_{k_1}, \Lambda_{k_2}, \dots$ を指定した時 $\alpha(S) = \alpha(N) \cup \Lambda_{k_1} \cup \Lambda_{k_2} \cup \dots$ なる $S \in \mathcal{S}(N)$ はいつでも存在するか?

これは Olin and Thomson によつて反例が示された。それ程自由に穴をぬくことが出来ないわけである。そこで穴のうまり方に関して、逆のうまり方に関する問題が生ずる。

問題 3. $S \in \mathcal{S}(N)$ で $\alpha(S) \supset \Lambda_1$, $\alpha(S) \cap \Lambda_2 = \emptyset$ とする。この時 $\alpha(S') \cap \Lambda_1 = \emptyset$, $\alpha(S') \supset \Lambda_2$ なる $S' \in \mathcal{S}(N)$ は存在するか?

これは Thomson によつて反例が示された。

問題 4. holes が1つもうまうような $\alpha(S) = \alpha(N)$

$S \in \mathcal{S}(N)$, $S \neq N$ は存在するか?

問題 5. すべて Ω に μ を与える $S \in \mathcal{S}(N)$ が存在するか?

ここで中心的作用割をするのが Sarason による或る Hardy 空間の構造定理である。それを述べよう。 μ を複素平面上の有界 Borel 測度とする。 $P^\infty(\mu)$ を多項式の $L^\infty(\mu)$ の中で weak*-closure を表わすことにする。

定理 (Sarason, 1972). $P^\infty(\mu)$ は次の様に表現出来る。

$$P^\infty(\mu) = L^\infty(\mu - \tilde{\mu}) \oplus H^\infty(\text{int } \tilde{K}, \tilde{\mu})$$

ここで 1) $\tilde{\mu} \leq \mu$, $\tilde{\mu} \perp \mu - \tilde{\mu}$

2) $\tilde{K}$ は閉部分集合で $\tilde{\mu}$ の support を含み, $\partial \tilde{K}$ は $\tilde{\mu}$ の support に含まれる。

3) $H^\infty(\text{int } \tilde{K}, \tilde{\mu})$ は $\text{int } \tilde{K}$ で有界正則関数で $\tilde{\mu}$ に制限したものである。

4) $\tilde{\mu}|_{\partial \tilde{K}} \ll$ harmonic measure for $\tilde{K}$.

5) support μ の各 holes は $\tilde{K}$ に完全に含まれるか $\tilde{K}$ と disjoint.

注) $\text{int } \tilde{K}$ は $P^\infty(\mu)$ が正則に拡張出来る最大の開集合になる。

注) この定理の表わし方であり、与えられた μ より $\tilde{\mu}$, $\tilde{K}$ の作り方は、より「正しい」が、証明を見るとき具体的な測度 μ に対しては $\tilde{\mu}$, $\tilde{K}$ が具体的に示かり、これを利用することにより上げていた問題に属する例が作れる。

『以下 μ を N の $\mathcal{A}(N)$ 上の scalar spectral 測度とし, $\tilde{K}$ はこれに対応して定まるものとする』

4

N より生成される α -WOT closed algebra $\in \mathcal{OZ}(N)$, WOT closed algebra $\in \omega(N)$, von Neumann algebra $\in \omega^*(N)$ とする. $P^{\omega}(\mu) \simeq \mathcal{OZ}(N) = \omega(N) \subset \omega^*(N) \simeq L^{\infty}(\mu)$ である.

N が reductive の時 (N の不変部分空間は $N^{\perp} = \{0\}$ と同じ) $\mathcal{S}(N) = \{N\}$ である. $\mathcal{S}$ 以下 N が non reductive の時の取扱. ($L^{\infty}(\mu) \neq P^{\omega}(\mu)$ の時を扱う).

§ 2. 問題 1 について

定理 (Conway and Olin [3]).

$$\tilde{K} \setminus \alpha(N) = \bigcup \{ \alpha(S) \setminus \alpha(N) ; S \in \mathcal{S}(N) \}$$

証明. [$\supset$] $\lambda \notin \tilde{K} \cup \alpha(N)$ とする. $(z - \lambda)^{-1} \in P^{\omega}(\mu)$ かつ $(N - \lambda)^{-1} \in \omega(N)$. $\therefore \lambda \notin \alpha(S)$ ($\forall S \in \mathcal{S}(N)$) (Sarason 定理係用)

[$\subset$] $\lambda \in \alpha(S)$ ($\forall S \in \mathcal{S}(N)$) とする. $(N - \lambda)^{-1}$ は N の不変部分空間 S 不変にする. $\therefore$ S 別の Sarason 定理 ([6]) より $(N - \lambda)^{-1} \in \omega(N)$. $\therefore (z - \lambda)^{-1} \in P^{\omega}(\mu)$ $\therefore \lambda \notin \tilde{K}$.

例 1 (おべこの holes をうける例)

μ_1 : 単位円周 T 上の Lebesgue 測度 $\mathcal{H} = L^2(\mu_1)$

$N = M_2$ on $L^2(\mu_1)$ (z を乗ずる作用素)

すると $\alpha(N) = T$, $\mu = \mu_1$, $\tilde{K} =$ 単位円板, $\mu^{\perp} = \mu_1$, $\therefore$ z holes はおべこをうける (1つしかたないが).

例2 (うまうた holes があつ例).

$\lambda_n: \mathbb{P}$ 上 z dense z 可算部分集合

$$\mu_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta_{\lambda_n}, \quad \mathcal{H} = L^2(\mu_2), \quad N = M_2 \text{ on } L^2(\mu_2)$$

おると $\alpha(N) = \mathbb{P}$, $\mu = \mu_2$, $\hat{\mu} = 0$, $K = \emptyset$, うまうた holes あり.

§ 3. 問題2について.

定理 (Ollman and Thomson [4]). Λ_1, Λ_2 うまうた holes とする.
おつ同値である.

(a) $\alpha(S) \cap \Lambda_1 = \emptyset$, $S \in \mathcal{S}(N)$ ありお $\alpha(S) \cap \Lambda_2 = \emptyset$

(b) $K = \bigcup \{ \alpha(s) ; s \in \mathcal{S}(N) \} \setminus \Lambda_1$ とし, $R^{\infty}(\mu)$ z K の外に poles をもつ有理関数の $L^{\infty}(\mu)$ -closure とする. すると

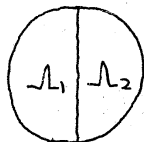
$$(z - a)^{-1} \in R^{\infty}(\mu) \quad \text{for some point } a \in \Lambda_2.$$

証明. (b) $\Rightarrow$ (a) (a) 成立しおとつ. $a \in \Lambda_2 \setminus \bigcup_{(1,2) \neq (2,1)} (N - a)^{-1}$ は $\{g(N); g \in R(K)\}$ より生成される weakly closed algebra $\mathcal{O}$ に含まれお. すると $(z - a)^{-1} \notin R^{\infty}(\mu)$. (a) $\Rightarrow$ (b). (b) 成立しおとつ. $(N - a)^{-1} \notin \mathcal{O}$ である.

Sarason 定理 ([6], Theorem 2) より $\mathcal{O}$ -invariant z $(N - a)^{-1}$ -invariant z あり部分空間 M がある. N を M を含む最小の N , N^* -invariant subspace とし $H = M \oplus (N \ominus M)$ とする. $S = N|_H \in \mathcal{S}(N)$ であり $\alpha(S) \cap \Lambda_1 = \emptyset$ かつ $\alpha(S) \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$ である.

よつ定理より問題2に反例が作られる.

例 3.

単位円板内の $-1 < y < 1$ の部分に可算 dense 点を λ_n とする。

$$\mu_3 = \mu_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta_{\lambda_n} \text{ とする。}$$

$$\mathcal{H} = L^2(\mu_3), \quad N = M_2 \text{ on } L^2(\mu_3) \text{ とする。}$$

$$\alpha(N) = \textcircled{1} \quad \mu = \mu_3, \quad \tilde{\mu} = \mu \text{ より } 2 \text{ holes は } \Omega_1, \Omega_2 \text{ の } 2 \text{ つ。}$$

$$\tilde{K} = \textcircled{\text{diagonal lines}} \text{ より } \Omega_1, \Omega_2 \text{ は } 2 \text{ つの holes である。定理の } R^w(\mu)$$

を見ると $R^w(\mu) = L^w(\mu)$ である。より (b) 成立する。より 2

$$\alpha(s) \cap \Omega_1 = \emptyset, \quad \alpha(s) \cap \Omega_2 \neq \emptyset \text{ なる } s \in \mathcal{S}(N) \text{ は存在しない。}$$

(この場合 Ω_2 だけ指定して Ω_2 だけ通る $s \in \mathcal{S}(N)$ はなし)

注) 指定した holes がすべて通るような例は多い。

たとえば例 3 において $-1 < y < 1$ の部分の Lebesgue 測度を μ'_4

とし、 $\mu_4 \equiv \mu_1 + \mu'_4$ を作り出す例を考えるとよい。

上の定理は次の形に拡張される。(証明は同じ)

定理. $\Omega_0, \Omega_{k_1}, \Omega_{k_2}, \dots$ は異なるような holes とする。

次は同値である。

$$(a) \quad \alpha(s) \cap \Omega_{k_i} = \emptyset \quad (i=1, 2, \dots), \quad s \in \mathcal{S}(N) \text{ ならば } \alpha(s) \cap \Omega_0 = \emptyset$$

$$(b) \quad K = \bigcup \{ \alpha(s) ; s \in \mathcal{S}(N) \} \setminus \bigcup \Omega_{k_i} \text{ とするとき}$$

$$(z-a)^T \in R^w(\mu) \text{ for some point } a \in \Omega_0$$

§ 4. 問題 3 について

§ 3 の定理 (a) をみたす Ω_1, Ω_2 に対して、逆に

「 $\alpha(s) \cap \Omega_2 = \emptyset, s \in \mathcal{S}(N)$ ならば $\alpha(s) \cap \Omega_1 = \emptyset$ 」が成り立つかという問題が生ずる。これが問題3である。肯定的な例は多く見つかると互例を示そう。

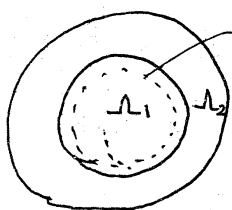
例4 (Thomson, 1978). Δ を 0 中心の半径 $\frac{1}{2}$ の円内板とする。Rubel and Shields [5] により Δ の中に疎な可算点列 λ_n として

$$\sup_{\lambda \in \Delta} |f(\lambda)| = \sup_n |f(\lambda_n)| \quad \forall f \in H(\Delta)$$

なるものが取れる。

$$\mu_5 = \mu_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta_{\lambda_n} \quad \mathcal{H} = L^2(\mu_5), \quad N = M_2 \text{ on } L^2(\mu_5)$$

とする。 $\alpha(N) = \Gamma \cup \overline{\{\lambda_n\}}$, $\mu = \mu_5$, $\tilde{\mu} = \mu_5$, $\tilde{K}$ = 単位円板



うける holes は Ω_1 と Ω_2 である。

$$K_1 = \text{単位円板} \setminus \Omega_1 \text{ とすると } R^w(\mu) = L^w(\mu)$$

$$K_2 = \text{単位円板} \setminus \Omega_2 \text{ とすると,}$$

$$R^w(\mu) = L^w(\mu_1) \oplus \mathcal{P}^w(\sum (\frac{1}{2})^n \delta_{\lambda_n}) \cong L^w(\mu_1) \oplus H^w(\Delta)$$

よって §3 の定理より

$$\begin{cases} \alpha(s) \cap \Omega_1 = \emptyset, s \in \mathcal{S}(N) \text{ ならば } \alpha(s) \cap \Omega_2 = \emptyset \\ \alpha(s) \cap \Omega_2 = \emptyset, \alpha(s) \cap \Omega_1, s \in \mathcal{S}(N) \text{ なる } s \text{ が存在する} \end{cases}$$

§5 問題4について

問題4が成り立つ例も (正しい例も) すぐに見つかる。例1は成り立たない例である。成り立つ例として、 $\frac{1}{2} < |z| < 1$ 上の平面測度を μ と ($\mathcal{H} = L^2(\mu)$, $N = M_2$ on $L^2(\mu)$) を考えたとする。そこで

ここで α は成立するための必要条件を与える。

定理. $\alpha(N) = \alpha(S)$, $S \neq N$, $S \in \mathcal{S}(N)$ ある。

$$\iff L^\infty(\mu) \neq R^\infty(\alpha(N)) \quad (= \alpha(N) \text{ の外に poles をもつ 有理関数 } R(\alpha(N)) \text{ の } L^\infty(\mu)\text{-}w^*\text{-closure})$$

証明. $(\Rightarrow)$ $S \in \mathcal{S}(N)$, $\alpha(N) = \alpha(S)$ とする。 $S = N|_M$, $M \subset \mathcal{H}$ と表わせる。 $r \in R(\alpha(N))$ には $r(N)M \subset M$ より, もし $L^\infty(\mu) = R^\infty(\alpha(N))$ ならば M は N の reducing subspace となり, 2173 より $S = N$ に矛盾。 $(\Leftarrow)$ 条件より $\exists \varphi \in L^\infty(\mu) \setminus R^\infty(\alpha(N))$. Sarason 定理 [6] より $\mathcal{H}$ の部分空間 M_0 が $\varphi(N)$ -invariant であり, $\psi(N)$ -invariant ($\forall \psi \in R^\infty(\alpha(N))$) なるものが存在する。 $\tilde{M}_0$ が M_0 を含む最小の N, N^* -invariant 部分空間とすれば, $S = N|_M$, $M = (\mathcal{H} \ominus \tilde{M}_0) \oplus M_0$, は条件を満たす。

§ 6 問題 5 について。

$\mathcal{S}(N)$ の中の pure なものを集めて $\mathcal{S}_p(N)$ と書くことにする。

$\mathcal{S}(N)$ が S が pure であるとは, S の不変部分空間が N, N^* -不変となるものは $\{0\}$ だけになるものをいう。

定理 $\bigcup \{ \alpha(S) ; S \in \mathcal{S}(N) \} = \alpha(S_0)$ となる $S_0 \in \mathcal{S}(N)$ が存在する。

証明. まず特殊な場合に上の定理が成立することを示し, 後に一般に成立することを示そう。

[I] $\Gamma_N = M_z$ on $L^2(\mu)$, $p^\infty(\mu)$ は L^∞ -part を持つとはいいとす。
 3. a 時 $\bigcup \{ \alpha(S); S \in \mathcal{S}(N) \} = \alpha(S_0)$ なる $S_0 \in \mathcal{S}_p(N)$ が存在する。
 (i) Conway and Olin ([3], Prop. 9.6) より 次を満たす $f_0 \in L^2(\mu)$ が存在する。
 $|f_0| > 0$ a.e. $d\mu$

$H =$ norm closure of $\{ pf_0; p \text{ は多項式} \} \subset L^2(\mu)$ は L^2 -part とな
 すと $H \ni pf_0 \rightarrow p \in H^2(|f_0|^2\mu)$ は isometry, linear onto
 2' $H^2(|f_0|^2\mu)$ は L^2 -part を持つとはいい。こゝで $H^2(\cdot)$ は多項式
 の $L^2(\cdot)$ -closure を表す。 $|f_0|^2\mu$ と μ は互いに絶対連続である。
 3. $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots$ 2' $\alpha(N)$ の 3 個の holes とする。Conway and Olin
 の定理より M_z -不変部分空間 $H_n \subset L^2(\mu)$ 2', $S_n = M_z$ on H_n
 は $\mathcal{S}(N)$ に含まれ $\alpha(S_n) \supset \mathcal{L}_n$ となるものが存在する。こゝで
 $\lambda_n \in \mathcal{L}_n$ とすると $(z - \lambda_n)H_n$ は H_n の proper 部分空間となる。
 $f_n \in H_n (f_n \neq 0)$, $f_n \perp (z - \lambda_n)H_n$ 2' $\{ pf_n; p \text{ は多項式} \}$
 の $L^2(\mu)$ -closure を L_n とおく。 $(z - \lambda_n)L_n \subsetneq L_n$ 2' であるか
 ら $S'_n = M_z$ on L_n は subnormal 作用素 2' $\alpha(S'_n) \ni \lambda_n$ 2'
 である。 $S''_n = M_z$ on $H^2(|f_n|^2\mu)$ 2' すると, $\alpha(S''_n) = \alpha(S'_n)$
 2' λ_n 2' であるから $(z - \lambda_n)^{-1} \notin H^2(|f_n|^2\mu)$ 2' である。こゝで
 $\nu \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n |f_n|^2\mu$ とおく, a_n は正 2' ν の norm が有界 1 となる
 ようにとる。 $H^2(\nu) \not\subset (z - \lambda_n)^{-1}$ $n=1, 2, \dots$ 2' である。 $H^2(\nu)$ は作り
 方より L^2 -part を持つとはいい。 $S'_0 = M_z$ on $H^2(\nu)$ 2' すると,
 $\alpha(S'_0) \ni \lambda_n (n=1, 2, \dots)$ 2' であるから $\alpha(S'_0) \supset \mathcal{L}_n (n=1, 2, \dots)$

とある。 $\nu = g\mu$, $g \in L^1(\mu)$ ($g \geq 0$) とする。

$$\Phi: H^2(\nu) \ni f \longrightarrow g^{\frac{1}{2}}f \in L^2(\mu)$$

は isometry into linear とあり $\Phi(H^2(\nu))$ は N -不変である。

又 $\Phi(H^2(\nu))$ は L^2 -part を持たない。 $S_0 = M_2$ on $\Phi(H^2(\nu))$

とおく。と始めの条件をみたす。

[II] 次に $N = M_2$ on $L^2(\mu)$ の時に示そう。 Sarason 定理より

$$p^\infty(\mu) = L^\infty(\nu_1) \oplus H^\infty(\text{int } \mathbb{R}, \nu_2), \mu = \nu_1 + \nu_2, \nu_1 \perp \nu_2$$

と表わされる。すると $N = N_1 \oplus N_2$ on $L^2(\nu_1) \oplus L^2(\nu_2)$, $N_i = M_2$

on $L^2(\nu_i)$ ($i=1, 2$) とある。 [I] より $S_2 \in \mathcal{S}_p(N_2)$ と

$$\cup \{ \alpha(s); s \in \mathcal{S}(N_2) \} = \alpha(S_2) \text{ を満たすものが存在する。}$$

$S = N_1 \oplus S_2$ は求める作用素になる

[III] N を任意の normal 作用素とすると $N = \bigoplus_{n=1}^\infty N_n$ と表

わされる。 $\mu_1 = \mu$, $\mu_{n+1} \ll \mu_n$, $N_n = M_2$ on $L^2(\mu_n)$ と

ある。 [I] より $\cup \{ \alpha(s); s \in \mathcal{S}(N_1) \} = \alpha(T_1)$ と $T_1 \in \mathcal{S}(N_1)$

が存在する。 $T_1 = M_2|_R$, $R \subset L^2(\mu_1)$ とある。

$S = T_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus \dots$ on $R \oplus L^2(\mu_2) \oplus L^2(\mu_3) \oplus \dots$ とおくと、

S が求める作用素である。

§ 7 $\mathcal{S}_p(N)$ のスペクトルによる穴うめ問題

問題 1-5 を $\mathcal{S}_p(N)$ に属するスペクトル ν で置き換えた場合について考えてみる。一般に N は次の様に表わされる。

$$\begin{cases} N = M_2^1 \oplus M_2^2 \oplus \dots & \text{on } L^2(\mu_1) \oplus L^2(\mu_2) \oplus \dots \\ M_2^m = M_2 & \text{on } L^2(\mu_m), \quad \mu_1 = \mu, \quad \mu_m \ll \mu_{m-1} \end{cases}$$

∴ $N = M_2$ on $L^2(\mu)$ の場合 Conway and Olin の結果

『 $\mathcal{S}_p(N) \neq \emptyset \iff P^0(\mu)$ は L^∞ -part ではない』 に注意して 3 つの
場合に分ける。

- 1) $N = M_2$ on $L^2(\mu)$ かつ $P^0(\mu)$ は L^∞ -part ではない
- 2) $N = \Sigma \oplus M_2^m$ on $\Sigma \oplus L^2(\mu_m)$ かつ $P^0(\mu_m)$ は L^∞ -part ではない (μ_m)
- 3) $N = \Sigma \oplus M_2^m$ on $\Sigma \oplus L^2(\mu_m)$ かつ $P^0(\mu_m)$ は L^∞ -part あり
(ある k に 対して)

1) の場合

問題 5 は § 6 の定理の [I] より 成立する。よって 2 問題 1 も成立する (Conway and Olin と同様)。問題 2 の 反例も例 3 でよい。問題 3 も例 4 を少し変えるとこの場合の 反例になる。問題 4 について 2 は同様に次の形で表される。

$$\text{『 } \alpha(N) = \alpha(S), S \neq N, S \in \mathcal{S}_p(N) \text{ あり }$$

$$\iff R^0(\alpha(N)) \text{ は } L^\infty\text{-part ではない } \text{』}$$

2) の場合

問題 1 と問題 5 はそのまま成立する。(この場合には $\mathcal{S}_p(N) \neq \emptyset$ は必ずしも成り立たない)。問題 3 と 2 は存在しない例が作られる。同様に問題 4 が成立、条件が求められる。

3) の場合

$\mathcal{S}_p(N) \neq \mathcal{C}$ とする ための条件が十分にわかっている。また $\mathcal{S}_p(N) \neq \mathcal{C}$ の時間問題 1-5 がどの様になるかわかっている。

参考文献

1. Ball, Olin and Thomson, Weakly closed algebras of subnormal operators, Ill. J. Math. 22 (1978), 315-326.
2. Bram, Subnormal operators, Duke Math. 22 (1955), 75-98.
3. Conway and Olin, A functional calculus for subnormal operators II, Memo. Amer. Math. Soc. 184 (1977).
4. Olin and Thomson, The spectrum of a normal operator and the problem of filling in holes, Indiana Math. Jour., 26 (1977), 581-584.
5. Rubel and Shields, The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966) 235-277.
6. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math., 17 (1966), 511-517.
7. Sarason, Weak-star density of polynomials, J. Reine Angew. Math., 252 (1972), 1-15.