

変分不等式の解の support の評価

神戸大・理 山田直記

1. 序

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を滑らかな境界 Γ を持つ有界領域とし, 次の変分不等式を考える.

$$\begin{aligned} & -\Delta u + \alpha u \leq f, \quad u \leq 0, \\ \text{(V.I.)} \quad & u(-\Delta u + \alpha u - f) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (\alpha \geq 0), \\ & u = \phi \quad \text{on } \Gamma. \end{aligned}$$

$f \in L^\infty(\Omega)$, $\phi \in W^{1,\infty}(\Gamma)$ に対して解 u が一意的に存在し u は Ω で連続になることが知られている (H. Brezis [3]). 以下考える変分不等式の解はすべて連続であるとする.

解 u によって, Ω は次の二つの領域に分割される:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \Omega \mid u(x) = 0\} \quad (\text{coincidence set}), \\ \Omega_2 &= \{x \in \Omega \mid -\Delta u + \alpha u = f\} \quad (\text{continuation set}). \end{aligned}$$

$S = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ とすると (V.I.) の解 u は形式的に次の自由境界問題をみる.

$$-\Delta u + \alpha u = f \quad \text{in } \Omega_2,$$

$$u(x) = \phi \quad \text{on } \Gamma \cap \partial\Omega_2,$$

$$u = \partial u / \partial n = 0 \quad \text{on } S,$$

ここで $\partial u / \partial n$ は u の外向法線方向の微分をあらわす。従って Ω_1 (もしくは Ω_2) を評価することにより、自由境界 S の評価が得られると考えられる。ここでは A. Bensoussan, H. Brezis and A. Friedman

[1] による次の定理を出発点としてこれを精密化すること、他の境界条件の下での評価および放物型変分不等式に対する類似の結果を紹介する。

定理 1. 正数 γ, δ に対して $f \geq \gamma$ in Ω , $\phi \geq -\delta$ on Γ が成立するならば

$$\{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \Gamma) \geq (2N\delta/\gamma)^{1/2}\} \subset \Omega_1.$$

2. Dirichlet 境界条件に対する結果.

定理 1 は次の様に精密化される.

定理 2. $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\gamma_1 \geq 0$ が存在して

$$(F) \quad \begin{aligned} f &\geq 0 && \text{in } \Omega \cap B(x_0, \gamma_1) \\ f &\geq \gamma && \text{in } \Omega \setminus B(x_0, \gamma_1) \end{aligned}$$

が成立するとする。ここで $B(x_0, \gamma_1) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x_0 - x| < \gamma_1\}$, $\gamma > 0$.

$\gamma_2 \geq 0$ が存在して

$$(D) \quad \begin{aligned} \phi &= 0 && \text{on } \Gamma \cap B(x_0, \gamma_2 + \text{dist}(x_0, \Gamma)), \\ \phi &\geq -\delta && \text{on } \Gamma \setminus B(x_0, \gamma_2 + \text{dist}(x_0, \Gamma)) \end{aligned}$$

がある $\delta > 0$ に対して成立するとする. このとき

$$y_1 \leq y_2 + \text{dist}(x_0, \Gamma) - (2N\delta/\gamma)^{1/2} (\equiv s_2)$$

ならば

$$u(x) = 0 \quad \text{in } \Omega \cap B(x_0, s_2)$$

が成立する.

注意. $y_1 = y_2 = 0$ とすると定理 1 が得られる.

3. 他の境界条件に対する結果.

一般の境界条件を持つ次の変分不等式を考える.

$$-\Delta u + \alpha u \leq f, \quad u \leq 0,$$

$$u(-\Delta u + \alpha u - f) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \psi \in \beta(-u|_F + \phi),$$

ここで $\beta \subset \mathbb{R}^2$ は $0 \in \beta(0)$ をみたす maximal monotone graph,

$\frac{\partial u}{\partial n}$ は外法線方向の微分, $\alpha > 0$ とする. 特に $\beta(y) =$

$]-\infty, +\infty[$, $y = 0$ のとき; $\beta(y) = \text{empty}$, $y \neq 0$ のとき; とすれば

Dirichlet 境界条件となり定理 2 が成立する. いくつかの β

に対しては類似の結果が成立する.

3.1. Neumann 境界条件.

β を, すべての $y \in \mathbb{R}$ に対して $\beta(y) = 0$, と選べば境界条件 $\frac{\partial u}{\partial n} = \psi$ となり Neumann 境界条件になる.

定理 3. 定理 2 の条件 (F) が成立するとする.

$l_3 \geq 0$ が存在して

$$(N) \quad \begin{aligned} \psi &= 0 && \text{on } \Gamma \cap B(x_0, l_3 + \text{dist}(x_0, \Gamma)), \\ \psi &\geq -\delta && \text{on } \Gamma \setminus B(x_0, l_3 + \text{dist}(x_0, \Gamma)) \end{aligned}$$

がある $\delta > 0$ に対して成立するとする.

$n(x)$ を $x \in \Gamma$ における外法線とし, 次の量を導入する.

$$\theta(x_0, l_3) = \begin{cases} \inf \{ \cos(n(x), x - x_0) \mid x \in \Gamma \}, & x_0 \in \Omega \text{ のとき,} \\ \inf \{ \cos(n(x), x - x_0) \mid x \in \Gamma, |x - x_0| \geq l_3 \}, & x_0 \in \Gamma \text{ のとき.} \end{cases}$$

$\theta(x_0, l_3) > 0$ と仮定する. 例えば $x_0 \in \Omega$ で Ω が凸ならば $\theta(x_0, l_3) > 0$, また $x_0 \in \Gamma$ で Ω が真に凸ならば $\theta(x_0, l_3) > 0$ とする.

以上の仮定の下で,

$$l_4 \equiv l_3 + \text{dist}(x_0, \Gamma) - N\delta / \gamma \theta(x_0, l_3) (\equiv s_3)$$

ならば

$$u(x) = 0 \quad \text{on } \Omega \cap B(x_0, s_3)$$

が成立する.

3.2. 混合境界条件

$k > 0$ とし $\beta(l) = kl$ とする. $\phi \equiv 0$ とすれば境界条件は $\partial u / \partial n + k u|_{\Gamma} = \psi$ とする.

定理4. 定理2の条件 (H) が $x_0 \in \bar{\Omega}$ と $l_1 \geq 0, \gamma > 0$ に対して成立し, 定理3の条件 (N) が $l_4 \geq 0$ と $\delta > 0$ につい

で成立つとする. $\theta \equiv \theta(x_0, \gamma_4) > 0$ と仮定する. このとき

$$\gamma_1 \leq \gamma_4 + \text{dist}(x_0, \Gamma) - \left(\frac{\theta^2}{k^2} + \frac{2N\delta}{\gamma k} \right)^{1/2} + \frac{\theta}{k} (\equiv S_4)$$

よらば

$$u(x) = 0 \quad \text{on } \Omega \cap B(x_0, S_4)$$

が成立する. 特に, $k \rightarrow 0$ とすれば $S_4 \rightarrow S_3$ となる.

3.3. Signorini 境界条件.

非線型の境界条件を考えよう. β を

$$\beta(\gamma) = \begin{cases} 0 & \gamma > 0 \text{ のとき,} \\]-\infty, 0[& \gamma = 0 \text{ のとき,} \\ \text{empty} & \gamma < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と選ぶ. 対応する境界条件は

$$u|_{\Gamma} \equiv \phi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \equiv \psi, \quad (\phi - u|_{\Gamma})(\psi - \frac{\partial u}{\partial n}) = 0$$

となる. この境界条件は Signorini 境界条件と呼ばれてゐる.

定理 5. 条件 (F) が $x_0 \in \overline{\Omega}$ と $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma > 0$ について成立し, 条件 (D) が $\gamma_5 \geq 0$ と $\delta_1 > 0$ について, 条件 (N) が $\gamma_5 \geq 0$ と $\delta_2 > 0$ について各々成立してゐるとする. $\theta \equiv \theta(x_0, \gamma_5) > 0$ と仮定する. このとき,

$$\gamma_1 \leq \gamma_5 + \text{dist}(x_0, \Gamma) - \max \left\{ \left(\frac{2N\delta_1}{\gamma} \right)^{1/2}, \frac{N\delta_2}{\gamma\theta} \right\} (\equiv S_5)$$

よらば

$$u(x) = 0 \quad \text{on } \Omega \cap B(x_0, S_5)$$

である.

4. 証明の方針.

定理 1 - 5 を証明するには

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} 0 & |x-x_0| < s \text{ のとき} \\ -f(|x-x_0|-s) & |x-x_0| \geq s \text{ のとき} \end{cases}$$

なる形の比較関数を用いて, 比較定理を用いる. ここで f は適当な関数, s は適当な定数である. 上に述べた定理 1 - 5 の証明では $f(y) = (\gamma/2N)y^2$ と選べばよい.

もっと別の f を取って定理 1 - 5 の評価を精密にすることが出来る (T. Nagai [5], The author [7]). 今, その idea を述べる. $w(y)$ が x の半径 $y = |x|$ の関数であるとすると

$$-\Delta w + \alpha w = -w'' - ((N-1)/y)w' + \alpha w$$

であるから, $f(y)$ として初期値問題

$$w'' + ((N-1)/y)w' - \alpha w = \gamma,$$

$$w(0) = w'(0) = 0$$

の解を選べばよいことがわかる. この解は

$$w(y) = \frac{\gamma}{\alpha} \left\{ \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{\alpha}y}{2}\right)^{1-\frac{N}{2}} I_{\frac{N}{2}-1}(\sqrt{\alpha}y) - 1 \right\}$$

$$= \frac{\gamma}{\alpha} \left\{ \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma\left(\frac{N}{2}+m\right)} \left(\frac{\sqrt{\alpha}y}{2}\right)^{2m} - 1 \right\}$$

と表わされる, ここで I_ν は変形 Bessel 関数, $\Gamma(y)$ は gamma 関数である. この w について次の補題が成立する (T. Nagai [5]).

補題. 次の性質を持つ $R_\alpha > 0$ が存在する.

- (i) $w(R_\alpha) = \delta$,
- (ii) $R_\alpha < (2N\delta/\gamma)^{1/2}$,
- (iii) $R_\alpha \nearrow (2N\delta/\gamma)^{1/2}$, $\alpha \searrow 0$ のとき
- (iv) $R_\alpha \searrow 0$, $\alpha \nearrow \infty$ のとき.

この補題を用いて, 定理2が $(2N\delta/\gamma)^{1/2}$ を R_α に代えても成立することが証明できる. 定理3-5についても類似の補題を証明することができて, 定理を精密化することができ.

5. 定理2の別証明.

A. Bensoussan, H. Brezis and A. Friedman [1] は定理1を4節で述べたように比較定理を用いて証明したあと Remark としてこの定理が確率論的手法でも証明できると述べている. ここで, $\alpha = 0$ の場合に定理2の確率論的証明を述べておく.

$B(t)$ を N -次元 Brown 運動とし, 確率微分方程式

$$dy = \sqrt{2} dB(s), \quad y(0) = x \in \mathbb{R}^N$$

の解を y_x と表わす. T を y_x に関する Ω からの脱出時刻, τ を $\tau \leq T$ なる stopping time とし, cost function

$$J_x(\tau) = E \left[\int_0^\tau f(y_x(t)) dt + \chi_{\tau=T} \phi(y_x(T)) \right]$$

を考える, 仮定し $\chi_{\tau=T} = 1$, $\tau = T$ のとき; $= 0$, $\tau < T$ のとき.

A. Bensoussan et J. L. Lions [2] によって変分不等式 (V.I.)

の解 u は

$$u(x) = \inf_{\tau \leq T} J_x(\tau)$$

と与えられることが知られている ($\alpha = 0$ としている).

補題 $B(t)$ を N 次元 Brown 運動, τ を $\tau \geq t$ なる $B(t)$ に関する stopping time とするならば

$$E|B(\tau) - B(t)|^2 = NE[\tau - t].$$

証明. $B(t)$ が 1 次元 Brown 運動ならば A. Friedman [4]

定理 4.4.2. によって

$$\begin{aligned} E|B(\tau) - B(t)|^2 &= E\left[\int_t^\tau 1 \, dB(s)\right]^2 = E\int_t^\tau 1^2 \, ds \\ &= E[\tau - t]. \end{aligned}$$

次に $B(t) = (B_1(t), \dots, B_N(t))$ を N 次元 Brown 運動とする.

$$\begin{aligned} E|B(\tau) - B(t)|^2 &= \sum_{i=1}^N E|B_i(\tau) - B_i(t)|^2 \\ &= NE[\tau - t]. \end{aligned} \quad (\text{Q.E.D.})$$

$\mathcal{F}^t$ を $\{B(s); 0 \leq s \leq t\}$ を可測にする最小の σ -field,

$\mathcal{F}^\tau$ を; $A \in \mathcal{F}^\tau \Leftrightarrow A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}^t, \forall t \geq 0$; と定義される σ -field,

$$p(x, A, t) = \int_A \frac{1}{(4\pi)^{N/2} t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x-\lambda|^2}{4t}\right) d\lambda$$

を $p_x(t)$ の推移確率関数とする.

定理 2 の証明. $x \in \Omega \cap B(x_0, s_2)$ とする. 任意の

stopping time τ に対して $J_x(\tau) \geq 0$ を示せば $u(x) \leq 0$

と合わせて定理が証明できる.

仮定から

$$f(x) \geq \gamma \chi_{B^c(x_0, \gamma_1)}(x),$$

$$\phi(x) \geq -\delta \chi_{B^c(x_0, \gamma)}, \quad \gamma \equiv \gamma_2 + \text{dist}(x_0, \Gamma)$$

であるから

$$J_x(\tau) \geq \gamma E \int_0^\tau \chi_{B^c(x_0, \gamma_1)}(y_x(t)) dt - \delta E[\chi_{\tau=T} \cdot \chi_{B^c(x_0, \gamma)}(y_x(T))],$$

ここで, $\chi_{B^c(x_0, \gamma)}$ は $B^c(x_0, \gamma)$ の定義関数. $\hat{\tau}_1$ は $y_x(t)$ に関する $B^c(x_0, \gamma_1)$ の脱出時刻とする. $\gamma_1 < \gamma$ であるから

$$\begin{aligned} J_x(\tau) &\geq \gamma E \left[\int_0^{\tau \wedge \hat{\tau}_1} 1 dt \right] - \delta E[\chi_{\tau \wedge \hat{\tau}_1 = T} \cdot \chi_{B^c(x_0, \gamma)}(y_x(T))] \\ &= \gamma E[\tau \wedge \hat{\tau}_1] - \delta E[\chi_{\tau \wedge \hat{\tau}_1 = T} \cdot \chi_{B^c(x_0, \gamma)}(y_x(T))]. \end{aligned}$$

ただし, $\tau \wedge \hat{\tau}_1 = \min\{\tau, \hat{\tau}_1\}$. 右辺第2項を計算する.

$$\begin{aligned} &E[\chi_{\tau \wedge \hat{\tau}_1 = T} \cdot \chi_{B^c(x_0, \gamma)}(y_x(T))] \\ &= E[E[\chi_{\tau \wedge \hat{\tau}_1 = T} \cdot \chi_{B^c(x_0, \gamma)}(y_x(T)) | \mathcal{F}^{\tau \wedge \hat{\tau}_1}]] \\ &= E[P(\tau \wedge \hat{\tau}_1 = T, |y_x(T) - x_0| \geq \gamma | \mathcal{F}^{\tau \wedge \hat{\tau}_1})] \\ &= E[P(y(\tau \wedge \hat{\tau}_1) \in \Omega^c, |y_x(T) - x_0| \geq \gamma | \mathcal{F}^{\tau \wedge \hat{\tau}_1})] \\ &= E[p(x, \Omega^c \cap B^c(x_0, \gamma), \tau \wedge \hat{\tau}_1)] \\ &= \int dP(\omega) p(x, \Omega^c \cap B^c(x_0, \gamma), \tau \wedge \hat{\tau}_1) \cdot \chi_{B^c(x_0, \gamma - s_2)}(y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1)) \\ &\quad + E[\chi_{B(x_0, \gamma - s_2)}(y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1)) \cdot p(x, \Omega^c \cap B^c(x_0, \gamma), \tau \wedge \hat{\tau}_1)] \end{aligned}$$

ここで, $\chi_{B^c(x_0, \gamma - s_2)}(y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1)) = 1$ は $|y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1) - x| < \gamma - s$ と同値

で, $|x - x_0| \leq s_2$ であるから $|y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1) - x_0| < \gamma$ である.

このとき,

$$p(x, \Omega^c \cap B^c(x_0, \gamma), \tau \wedge \hat{\tau}_1) = P(y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1) \in \Omega^c \cap B^c(x_0, \gamma)) = 0.$$

ゆえに, 上式の右辺第2項 = 0 とする.

$$y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1) - x = \sqrt{2} B(\tau \wedge \hat{\tau}_1)$$

であるから, 補題を用いて

$$E[|y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1) - x|^2] = 2 E[|B(\tau \wedge \hat{\tau}_1)|^2] = 2N E[\tau \wedge \hat{\tau}_1].$$

ゆえに

$$\begin{aligned} & \int dP(\omega) p(x, \Omega^c \cap B^c(x_0, \gamma), \tau \wedge \hat{\tau}_1) \cdot \chi_{B^c(x_0, \gamma - s_2)}(y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1)) \\ & \leq \int dP(\omega) \chi_{B^c(x_0, \gamma - s_2)}(y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1)) \\ & = P(|y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1) - x| \geq \gamma - s_2) \\ & \leq \frac{1}{(\gamma - s_2)^2} E[|y_x(\tau \wedge \hat{\tau}_1) - x|^2] \\ & = \frac{2N}{(\gamma - s_2)^2} E[\tau \wedge \hat{\tau}_1]. \end{aligned}$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned} J_x(\tau) & \geq \left(\gamma - \frac{2N\delta}{(\gamma - s_2)^2} \right) E[\tau \wedge \hat{\tau}_1] \\ & = 0 \end{aligned}$$

を得る.

(Q.E.D.)

6. 放物型変分不等式

放物型変分不等式の解の support についても類似の評価が成立する. 次の放物型変分不等式を考える.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq f, \quad u \leq 0$$

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \times]0, T[,$$

$$u(x, t) = \phi(x, t) \quad \text{on } \Gamma \times]0, T[,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{on } \Omega.$$

この解 u に対して, 次の評価が成立する.

定理 6. 次の条件を仮定する:

(1) $\gamma > 0$ が存在して $f \geq \gamma$ in $\Omega \times]0, T[$.

(2) $\delta > 0$ が存在して $u_0 \geq -\delta$ on Ω .

(3) $t_0 \in]\delta/\gamma, T[, \varepsilon \geq 0$ が存在して $\Gamma \times]0, t_0[$ 上で

$$\phi(x, t) \geq -\varepsilon c(t) + \frac{\delta}{t_0}(t - t_0)$$

が成立する. ここで, $c(t)$ は

$$0 \leq c(t) \leq \frac{1}{2N}(\gamma - \frac{\delta}{t_0}), \quad c'(t) \geq 0 \quad t \in]0, t_0[$$

をみたす C^1 -級関数である.

このとき, $\text{dist}(x_0, \Gamma) \geq \sqrt{\varepsilon}$ ならば $u(x_0, t_0) = 0$ が成立する.

注意. 定理 6 から, 形式的な議論ではあるが, 定理 1 を導くことができる: $t_0 \geq \delta/\gamma, \varepsilon_0 > 0, p \geq 1$ に対して

$$(*) \quad \phi(x, t) \geq -\varepsilon_0 t^p + \frac{\delta}{t_0}(t - t_0)$$

が成り立っているとする. このとき, 定理によれば,

$$(**) \quad \text{dist}(x_0, \Gamma) \geq (2N t_0^{p+1} \varepsilon_0 / (\gamma t_0 - \delta))^{1/2}$$

ならば $u(x_0, t_0) = 0$ である. 実際,

$$c(t) = \frac{\gamma t_0 - \delta}{2N t_0^{p+1}} t^p, \quad \varepsilon = \frac{2N t_0^{p+1} \varepsilon_0}{\gamma t_0 - \delta}$$

ととればよい.

特別な場合として, ϕ が今, t に依らまるとする.
 $t=0$ の時の変分不等式の両立条件と u_0 に対する仮定
 によって $\phi(x) \geq -\delta$ on Γ が成立するが, これは (*)
 において $\varepsilon_0 = \delta/t_0$, $p=1$ とおけば得られる.

(**) において $\varepsilon_0 = \delta/t_0$, $p=1$ とおき, 形式的に
 $t_0 \rightarrow \infty$ とすると

$\text{dist}(x_0, \Gamma) \geq (2N\delta/\gamma)^{1/2}$ ならば $u(x_0, \cdot) = 0$
 が得られる.

7. Stefan問題への応用

前節に述べた放物型変分不等式の解の support の評価の
 idea は一次元一相 Stefan問題の自由境界の評価に応用できる.

補題. Stefan問題

$$\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2 \quad (0 < x < s(t), 0 < t)$$

$$u(0, t) = M > 0 \quad (0 < t)$$

$$u(s(t), t) = 0 \quad (0 < t)$$

$$\dot{s}(t) = -u_x(s(t), t) \quad (0 < t)$$

$$s(0) = 0$$

の解 $(s(t), u(x, t))$ に対して

$$0 < s(t) \leq (2Mt)^{1/2} \quad (0 \leq t)$$

が成立する。

証明. 補題の Stefan 問題は, 変換

$$\theta(x, t) = \int_0^t \tilde{u}(x, \tau) d\tau$$

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & 0 < x < s(t), \quad 0 < t \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

によって, 次の変分不等式に変換される:

$$\theta_t - \theta_{xx} + 1 \geq 0, \quad \theta \geq 0,$$

$$\theta(\theta_t - \theta_{xx} + 1) = 0 \quad 0 < x, \quad 0 < t,$$

$$\theta(0, t) = Mt \quad 0 < t,$$

$$\theta(x, 0) = 0 \quad 0 < x.$$

補題の結論を示すには, $x \geq (2Mt)^{1/2}$ に対して $\theta = 0$ が示されればよい. 比較関数 $w(x, t)$ を

$$w(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sqrt{2Mt} - x)^2 & x < \sqrt{2Mt} \text{ のとき,} \\ 0 & x \geq \sqrt{2Mt} \text{ のとき} \end{cases}$$

と選んで, 比較定理を適用すればよい.

(Q.E.D.)

次の Stefan 問題を考える:

$$\partial v / \partial t - \partial^2 v / \partial x^2 = 0 \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$v(0, t) = g(t) \quad 0 < t \leq T,$$

$$v(y(t), 0) = 0 \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad 0 < x < l,$$

$$\dot{y}(t) = -v_x(y(t), t) \quad 0 < t < T,$$

$$y(0) = l.$$

この Stefan 問題の解に対して, 次の評価が成立する.

$$\tilde{v}(x, t) = \begin{cases} v(x, t) & 0 < x < s(t), \quad 0 < t \leq T \text{ のとき,} \\ 0 & s(t) \leq x, \quad 0 < t \leq T \text{ のとき} \end{cases}$$

とする.

定理 7. 正数 μ, ν が存在して

$$g(t) \leq \mu \quad 0 < t \leq T,$$

$$v_0(x) \leq \nu \quad 0 < x < l$$

が成り立つとする. このとき,

$$(i) \quad \tilde{v}(x, t) = 0 \quad x \geq l + (2t \max\{\mu, \nu\})^{1/2}, \quad 0 < t \leq T$$

(ii) $\mu > \nu$ のとき

$$\tilde{v}(x, t) = 0 \quad x \geq l + (2t\nu)^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq \frac{l^2\nu}{2(\mu-\nu)^2}$$

が成立する.

証明.

$$\theta(x, t) = \int_0^t \tilde{v}(x, \tau) d\tau$$

と変換すれば, θ は変分不等式

$$\theta_t - \theta_{xx} + \theta_0(x) \geq 0, \quad \theta \geq 0,$$

$$\theta(\theta_t - \theta_{xx} + \theta_0(x)) = 0 \quad 0 < x, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad 0 < x,$$

$$\theta(0, t) = \int_0^t g(s) ds, \quad 0 < t \leq T,$$

をみたす. ただし,

$$\theta_0(x) = \begin{cases} v_0(x) & 0 < x < l, \\ -1 & l \leq x. \end{cases}$$

(i) の証明. $s(T) < L$ なる $L > 0$ をとって $Q =]0, L[\times]0, T[$ と考える. $M = \max\{\mu, \nu\}$ とし, $w_1(x, t) = Mt$ とおく.

w_1 は Q 上で比較定理の条件をみたすことがわかるから

$$w_1 \geq \theta \quad \text{in } Q$$

を得る. 特に $x = l$ のとき $Mt \geq \theta(l, t)$ を得る.

変分不等式を $]l, L[\times]0, T[$ に制限して補題を用いると

$$\theta = 0 \quad x \geq l + \sqrt{2Mt} \quad \text{のとき}$$

を得る.

(ii) の証明. $s(t)$ は真に単調増加で, $t \rightarrow \infty$ のとき $s(t) \rightarrow \infty$ だから, $Q_0 = lv / \mu - v$ とし $s(T_0) - l = Q_0$ となる T_0 をとる.

$$w_2(x, t) = -\frac{\mu - \nu}{l} \cdot xt + \mu t$$

とすると, w_2 は $]0, Q_0[\times]0, T_0[$ 上で比較定理の条件をみたす. 従って, $w_2 \geq \theta$. 特に $x = l$ とすると

$$\theta(l, t) \leq \nu t, \quad 0 < t \leq T_0$$

であり, 補題を $]l, L[\times]0, T_0[$ で適用して

$$(*) \quad s(t) \leq l + \sqrt{2\nu t} \quad 0 < t \leq T_0$$

を得る.

最後に T_0 を評価する. T_0' を

$$(l + \sqrt{2\nu T_0'}) - l = Q_0$$

なるものとする。すなわち

$$T_0' = l^2 \nu / 2(\mu - \nu)^2.$$

(*)より $T_0 \geq T_0'$ であるから結論を得る。 (Q.E.D.)

付記. 定理7は, 四ッ谷晶二氏の御教示によるものである。[8], Theorem 4.1の改良になっている。

References

- [1] A. Bensoussan, H. Brezis and A. Friedman, Estimates on the free boundary for quasi variational inequalities, Comm. Partial Differential Equations, 2 (1977), 297 - 321.
- [2] A. Bensoussan et J. L. Lions, Problèmes de temps d'arrêt optimal et inequations variationnelles paraboliques, Applicable Anal., 3 (1973), 267 - 294.
- [3] H. Brezis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51 (1972), 1 - 168.
- [4] A. Friedman, Stochastic differential equations and applications, Vol. 1, Academic Press, 1975.
- [5] T. Nagai, Estimates for the coincidence sets of solutions of elliptic variational inequalities, Hiroshima Math. J., 9 (1979), 335 - 346.
- [6] N. Yamada, Estimates on the support of solutions of elliptic variational inequalities in bounded domains, Hiroshima Math., J., 9 (1979), 7 - 16.

- [7] _____, Estimates on the support of solutions of elliptic variational inequalities in bounded domains II, Funkcial. Ekvac., 22 (1979), 339 - 350.
- [8] _____, Estimates on the support of solutions of parabolic variational inequalities in bounded cylindrical domains, Hiroshima Math. J., 10 (1980), 337 - 349.