

O-minimal 構造での仮想元消去

東海大学理学部数学科 米田郁生 (Ikuo Yoneda)
Department of mathematics, Tokai University

1 仮想元とは？

構造 $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ において

$$E((x, y), (u, v)) \equiv y \neq 0 \wedge v \neq 0 \wedge x \cdot v = y \cdot u$$

は、 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ に同値関係 E を与える。

明らかに $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ がこの同値関係の 1 クラスに対応する。

構造 M において、一階論理式で定められた同値関係 $E(\bar{x}, \bar{y})$ に対し $\bar{a} \in M$ の E -同値類 $\bar{a}_E$ と書く。このような $\bar{a}_E$ を元とみなし、“仮想元”と呼ぶ。仮想元全部を付加した構造を M^{eq} と書く。例： $\mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)^{\text{eq}}$ 。

【仮想元の働き】

definable set を coding する canonical parameter は仮想元で与えられる。

$X = \varphi(\bar{x}, \bar{a})^M$ とするとき、

$$E(\bar{y}, \bar{z}) \equiv \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{z}))$$

は definable な同値関係で

$\sigma \in \text{Aut}(M)$ に対し

$$\sigma(X) = X \Leftrightarrow \sigma(\bar{a}_E) = \bar{a}_E$$

が成立。この $\bar{a}_E$ が definable set X を coding する canonical parameter.

【仮想元消去】

仮想元消去とは、任意の definable set $X = \varphi(\bar{x}, \bar{a})^M$ に対する、先の $\bar{a}_E$ の代わりに、有限列 $\bar{b} \in M$ が存在し

$$\sigma(X) = X \Leftrightarrow \sigma(\bar{b}) = \bar{b}$$

となる場合である。

例えば、代数閉体において代数多様体は最小定義体を持つので、代数閉体は、仮想元消去を持つ。

正確な仮想元消去の定義: 「任意の $\bar{a}_E \in M^{\text{eq}}$ に対し、

$$\sigma(\bar{a}_E) = \bar{a}_E \Leftrightarrow \sigma(\bar{b}) = \bar{b} \ (\forall \sigma \in \text{Aut}(M))$$

となる有限列 $\bar{b} \in M$ が存在するとき」

2 O-minimal 構造の重要事項

- $M = (M, <, \dots)$ が O-minimal とは、
 $<$ が dense linear order, M は最小元、最大元を持たず, M の definable subset が点と开区間の有限和集合に限るとき。
- $C \subseteq M^n$: cell は n に関し inductive に定義される。
 $C \subseteq M$: cell $\Leftrightarrow C$ は一点、または开区間。
 $C \subseteq M^{n+1}$: cell $\Leftrightarrow C = \{(\bar{a}, f(\bar{a})) : \bar{a} \in D \subseteq M^n\}$ または $C = \{(\bar{a}, b) : f(\bar{a}) < b < g(\bar{a}), \bar{a} \in D \subseteq M^n\}$ の形。
 ここで $D \subseteq M^n$: cell で f, g は D 上の definable な連続関数。
 注: open box が開基底。
- (Cell decomposition)
 $X \subseteq M^n$: A-definable $\Leftrightarrow X$ は A-definable cells の有限 disjoint union.
- C : cell, X : definable で $X \subset C$ ならば、 X は C 内に境界点を持つ。
 (i.e. $\bar{a} \in C$ で、 $\bar{a}$ を含む任意の open box B に対し、 $(B \cap C) \cap X \neq \emptyset$ かつ $(B \cap C) - X \neq \emptyset$ を満たすものがある.)

Fact 2.1 O-minimal 構造 M での A-definable な同値関係で open set を含むクラスは A-definable で有限個。

$E(\bar{x}, \bar{y})$ を A -definable な同値関係とする。

X を「 $\bar{a} \in X \Leftrightarrow \bar{a}$ のある開近傍は一つの E -クラスに含まれる」で定まる A -definable set とする。

$X = \bigcup_i C_i$ と A 上 cell 分解する。 Y を open set を含む E -クラスとする。

$Y \cap X \neq \emptyset$ より

Claim 1 $Y \cap C_i \neq \emptyset$ ならば $C_i \subseteq Y$.

$C_i \not\subseteq Y$ ならば $C_i \cap Y \neq C_i$. C_i は cell より Y との境界点 $\bar{a} \in C_i$ を持つので、 $\bar{a}$ の任意の開近傍 U に対し $U \cap Y$ と $U - Y$ は共に空でない。しかしこれは $\bar{a} \in X$ に反す。

Claim 2 Y は A -definable.

$C_i \cap Y \neq \emptyset$ のとき “ $\bar{a} \in Y \Leftrightarrow \exists \bar{x} \in C_i (E(\bar{x}, \bar{a}))$ ” と Y が A 上 definable になる。

□

3 O-minimal 構造での Closure

$a \in M, A \subseteq M$ に対し

- $a \in \text{dcl}(A) \Leftrightarrow |\{\sigma(a) : \sigma \in \text{Aut}(M/A)\}| = 1$.
dcl...definable closure.
- $a \in \text{acl}(A) \Leftrightarrow |\{\sigma(a) : \sigma \in \text{Aut}(M/A)\}| < \aleph_0$.
acl...algebraic closure.
- $(M, <, \dots)$ で “ $<$ ” が linear order ならば
「orbit 有限のとき何番目の元か特定できる」ので $\text{acl}(*) = \text{dcl}(*)$.

4 O-minimal 構造での次元

次元を Cell, definable set, type の順に与える。

- $C \subseteq M$: cell に対し
 $\dim(C) = 1 \Leftrightarrow C$: open interval
 $\dim(C) = 0 \Leftrightarrow C$: 一点

- $C \subseteq M^{n+1}$:cell に対し
 $C = \{(\bar{a}, f(\bar{a})) : \bar{a} \in D \subseteq M^n\}$ のとき、

$$\dim(C) = \dim(D).$$

- $C = \{(\bar{a}, b) : \bar{a} \in D \subseteq M^n, f(\bar{a}) < b < g(\bar{a})\}$ のとき、

$$\dim(C) = \dim(D) + 1.$$

- X :definable set に対し
 $\dim(X) := \max\{\dim(C) : C \text{ は } X \text{ の cell 分解で出てくる cell}\}.$
- $\bar{a} \in M, A \subset M^{\text{eq}}$ に対し、 A 上の $\bar{a}$ の type の次元を
 $\dim(\bar{a}/A) := \min\{\dim(X) : \bar{a} \in X \text{ is } A\text{-definable}\}$ と定める。
 注: A 上の $\bar{a}$ の type とは、 $\text{tp}(\bar{a}/A) = \{X : X \text{ is } A\text{-definable and } \bar{a} \in X\}.$

Fact 4.1 $\dim(a_1, a_2, \dots, a_n/A) = m (\leq n)$ のとき、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ を並べかえて以下のようにできる。

- $a_i \notin \text{dcl}(Aa_1, \dots, a_{i-1})$ ($i \leq m$)
- $a_j \in \text{dcl}(Aa_1, \dots, a_m)$ ($j > m$)

5 O-minimal 構造での独立関係

$\bar{a} \in M$ と $A, B \subset M^{\text{eq}}$ に対し $\dim(\bar{a}/AB) = \dim(\bar{a}/A)$ のとき

$$\bar{a} \underset{A}{\perp} B$$

と書き、「 $\bar{a}$ と B は A 上独立である」という。

Fact 5.1 $\bar{a}, \bar{b} \in M$ と $A, B, C \subset M^{\text{eq}}$ に対し

- (1) $\bar{a} \underset{A}{\perp} \bar{b} \Leftrightarrow \bar{b} \underset{A}{\perp} \bar{a}.$
- (2) $\bar{a} \underset{A}{\perp} BC \Leftrightarrow \bar{a} \underset{A}{\perp} B, \bar{a} \underset{AB}{\perp} C.$
- (3) $\bar{a}$ と $A \subset B$ に対し $\sigma(\bar{a}) \underset{A}{\perp} B$ となる $\sigma \in \text{Aut}(M/A)$ がある。
- (4) $\bar{a} \underset{A}{\perp} \bar{a}$ ならば $\bar{a} \subseteq \text{dcl}(A).$

Definition 5.2 *O-minimal* 構造 M が

共通部分上の独立性を持つ (IND/I) とは任意の $\bar{a}, A, B \subset M$ に対し

$$\bar{a} \downarrow_A B, \bar{a} \downarrow_B A \Rightarrow \bar{a} \downarrow_{\text{dcl}(A) \cap \text{dcl}(B)} AB$$

が成立するとき。

Theorem 5.3 *O-minimal* 構造 M が IND/I を持つならば、 M は $E.I.$ を持つ。

Proof. $e = \bar{a}_E \in M^{\text{eq}}$ とする。 $\sigma, \tau \in \text{Aut}(M/e)$ を $\sigma(\bar{a}) \downarrow_e \bar{a}, \tau(\bar{a}) \downarrow_e \bar{a}, \sigma(\bar{a})$ となるようにとれる。以下、簡単のため $\bar{b} := \sigma(\bar{a}), \bar{c} := \tau(\bar{a})$ と書く。 $\bar{a} \downarrow_{\bar{b}} \bar{c}, \bar{a} \downarrow_{\bar{c}} \bar{b}$ と IND/I から $\bar{a} \downarrow_A \bar{b}, \bar{c}$ ($A := \text{dcl}(\bar{b}) \cap \text{dcl}(\bar{c})$)。

$e \in \text{dcl}^{\text{eq}}(\bar{a}) \cap \text{dcl}^{\text{eq}}(\bar{b})$ より $e \downarrow_A e$. 従って $e \in \text{dcl}^{\text{eq}}(A)$.

一方、 $\bar{b} \downarrow_e \bar{c}$ より $A \subset \text{dcl}(e)$. 従って $\text{dcl}^{\text{eq}}(e) = \text{dcl}^{\text{eq}}(A)$.

□

仮想元消去を導く条件として次も知られている。 [P]

Fact 5.4 任意の $A \subset M$ に対し

$\text{dcl}(A)$ が M の部分モデルならば M は $E.I.$ を持つ。

Example 5.5 (1) $(\mathbb{Q}, <), (\mathbb{Q}, <, +)$ は IND/I より $E.I.$ が分る。

(2) $(\mathbb{Q}, <, +, 1)$, RCF は上の *Fact* から $E.I.$ が分る。

(3) $+$ を言語として加えずに

$$E((x, y), (u, v)) \equiv x + y = u + v$$

として E を解釈する構造 $(\mathbb{Q}, <, E)$ は $E.I.$ なし。

Proof. (3): $a, b, c \in \mathbb{Q}$ は独立とする。 $E((a, b), (c, d)), d \in \mathbb{Q}$ とするとき、 (a, b) の E -class は ab -definable かつ cd -definable. もし $E.I.$ があつたならば、 (a, b) の E -class は $\text{dcl}(ab) \cap \text{dcl}(cd)$ -definable. しかし、 $\text{dcl}(ab) \cap \text{dcl}(cd) = \emptyset$ より矛盾。

□

Question 5.6 *O-minimal* 構造で、 $E.I. \Rightarrow IND/I$?

6 Canonical base

$\bar{a} \subset M$ と $A \subset M^{\text{eq}}$ に対し

$$\dim(\bar{a}/A) = \dim(\bar{a}/A_0)$$

となる最小の $A_0 = \text{dcl}^{\text{eq}}(A_0)$ を $\text{tp}(\bar{a}/A)$ の Canonical base と呼び

$$\text{Cb}(\bar{a}/A) = A_0$$

と書く。Canonical base が常に存在するとは限らない。(Example 6.3)

Remark 6.1 *O-minimal* 構造 M に対し

$E.I +$ 常に Canonical base を持つ $\Rightarrow IND/I$.

Proof. $\bar{a} \perp_A B, \bar{a} \perp_B A, A = \text{dcl}(A), B = \text{dcl}(B)$ とする。 $A_0 := \text{Cb}(\bar{a}/AB)$ の最小性から、 $A_0 \subseteq A \cap B$. 従って $\dim(\bar{a}/AB) = \dim(\bar{a}/A \cap B)$.

□

以下は [P1] の結果

$\text{tp}(\bar{a}/M)$ に対し $\bar{a} = \bar{a}\bar{b}, \dim(\bar{a}/M) = \dim(\bar{a}/M) = |\bar{a}|, \bar{b} \subset \text{dcl}(M\bar{a})$ と仮定してよい。(Fact 6.2 の証明で $\bar{a} \perp M$ をしばしば用いる)
 $f(\bar{x}, \bar{y})$ を $f(\bar{a}, \bar{m}) = \bar{b} (\bar{m} \subset M)$ となる $\emptyset$ -definable (partial) function とする。

$E_{f, \bar{a}}(\bar{m}_1, \bar{m}_2) \Leftrightarrow$ 「 $\bar{a}$ の或る開近傍 U で $f(\bar{x}, \bar{m}_1), f(\bar{x}, \bar{m}_2)$ は共に定義され U 上で等しい」 または 「 $\bar{a}$ の或る開近傍で $f(\bar{x}, \bar{m}_1), f(\bar{x}, \bar{m}_2)$ は共に定義されていない」と定める。 $E_{f, \bar{a}}$ は $\bar{a}$ -definable な同値関係。

Fact 6.2 $d = \text{dcl}(d) \subset M$ に対して

$$d = \text{Cb}(\bar{a}\bar{b}/M) \Leftrightarrow \text{dcl}(d, \bar{a}) = \text{dcl}(\bar{m}_{E_{f, \bar{a}}}, \bar{a}).$$

注意 : $\bar{m} \subset M$ だが、 $\bar{m}_{E_{f, \bar{a}}} \subset M$ とは限らないので $\text{dcl}(d, \bar{a}) = \text{dcl}(\bar{m}_{E_{f, \bar{a}}}, \bar{a})$ となる $d = \text{dcl}(d) \subset M$ が存在するとは限らない。

Proof. ($\Rightarrow$): $d = \text{Cb}(\bar{a}, \bar{b}/M) \subset M, \dim(\bar{a}) = \dim(\bar{a}/M) = |\bar{a}|, \bar{b} \subset \text{dcl}(M\bar{a})$ とする。 f, g を $f(\bar{a}, \bar{m}) = \bar{b}, g(\bar{a}, d) = \bar{b}$ となる $\emptyset$ -definable function とする。

Claim 3 $\bar{m}_{E_{f, \bar{a}}} \in \text{dcl}(\bar{a}, d)$.

$\bar{a} \perp \bar{m}, d$ かつ $f(\bar{a}, \bar{m}) = \bar{b} = g(\bar{a}, d)$ より $\bar{a}$ の開近傍 U 上で $f(\bar{x}, \bar{m}) = g(\bar{x}, d)$.
 $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{M}/\bar{a}, d)$ とすると $\sigma(U)$ 上でも $f(\bar{x}, \sigma(\bar{m})) = g(\bar{x}, d)$. 従って $\bar{a}$ の開近傍 $U \cap \sigma(U)$ 上で $f(\bar{x}, \bar{m}) = f(\bar{x}, \sigma(\bar{m}))$ より $\bar{m}_{E_f, \bar{a}} = \sigma(\bar{m})_{E_f, \bar{a}}$.

Claim 4 $d \in \text{dcl}(\bar{a}, \bar{m}_{E_f, \bar{a}})$.

$\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{M}/\bar{a}, \bar{m}_{E_f, \bar{a}})$ とする。 $\bar{a}$ の或る近傍 U 上で $f(\bar{x}, \bar{m}) = f(\bar{x}, \sigma(\bar{m}))$.
 $\bar{a}$ の近傍 U' を $U' \subseteq U \cap \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/\bar{m}, d) \cap \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/\sigma(\bar{m}), \sigma(d))$ とし、 $\bar{a}' \in U'$ を $\dim(\bar{a}'/\bar{m}, d, \sigma(\bar{m}), \sigma(d)) = |\bar{a}'|$ となるものをとる。 $\bar{a}' \in U$ より $\bar{e} := f(\bar{a}', \bar{m}) = f(\bar{a}', \sigma(\bar{m}))$ とすると $\text{Cb}(\bar{a}, \bar{b}/M) = \text{Cb}(\bar{a}, \bar{b}/d) = d = \text{Cb}(\bar{a}', \bar{e}/d)$ かつ $\sigma(d) = \text{Cb}(\bar{a}', \bar{e}/\sigma(d))$.

一方、 $\dim(\bar{a}', \bar{e}/d, \sigma(d)) = |\bar{a}'|$ より $d = \text{Cb}(\bar{a}', \bar{e}/d) = \text{Cb}(\bar{a}', \bar{e}/d, \sigma(d)) = \text{Cb}(\bar{a}', \bar{e}/\sigma(d)) = \sigma(d)$.

($\Leftarrow$): $e \in M, \dim(\bar{a}, \bar{b}/e) = \dim(\bar{a}, \bar{b}/M)$ ならば $d \in \text{dcl}(e)$ を示せばよい。

Claim 5 $\bar{m}_{E_f, \bar{a}} \in \text{dcl}(\bar{a}, e)$.

$b \in \text{dcl}(\bar{a}, e)$ より、任意の $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{M}/\bar{a}, e)$ に対し、 $f(\bar{a}, \bar{m}) = b = \sigma(b) = f(\bar{a}, \sigma(\bar{m}))$ と $\bar{a} \perp \bar{m}, \bar{a} \perp \sigma(\bar{m})$ より $\bar{m}_{E_f, \bar{a}} = \sigma(\bar{m})_{E_f, \bar{a}}$.

仮定より $d \in \text{dcl}(\bar{a}, e)$. ここで $d \perp_e \bar{a}$ より $d \in \text{dcl}(e)$ が分る。

□

Example 6.3 $\alpha \in \mathbb{R} - \overline{\mathbb{Q}}$ とする。 $(\mathbb{R}, +, 0, 1, \alpha(*))|(-1, 1)$ では *canonical base* を持たない *type* がある。

Proof. Big model $\mathcal{M}' \succeq (\mathbb{R}, +, 0, 1, \alpha(*))$ に対し、 $\alpha(*)$ の定義域を $(-1, 1)$ に制限した reduct model を $\mathcal{M}$ と書く。

$a, b, c \in \mathcal{M}' > \mathbb{R}$ を $|a - b| < 1, |c - \alpha(b)| < 1, \dim'(a, b, c) = 3$ と取る。

$$d := \alpha(a - b) + c$$

とおくと $\dim'(a, d/b, c) = \dim(a, d/b, c) = 1$.

また $c - \alpha(b) = d - \alpha(a) = \text{Cb}'(a, d/b, c)$ が分る。

$(f(x, y, z) = z + \alpha(x - y))$ とすると $d = f(a, b, c)$ と $\text{dcl}((b, c)_{E_f, a}) = \text{dcl}(c - \alpha(b))$ より分る)

Claim 6 $\text{Cb}(a, d/b, c)$ は存在しない。

$\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{M}/a, d)$ に対し

$\alpha(a - b) + c = d = \sigma(d) = \alpha(a - \sigma(b)) + \sigma(c)$ より

$E_{f,a}((b, c), (\sigma(b), \sigma(c)))$. もし $D := \text{Cb}(a, d/b, c)$ が存在したならば $\text{dcl}(D, a) = \text{dcl}((b, c)_{E_{f,a}}, a) \subset \text{dcl}(a, d)$.

また $\text{Cb}'(a, d/b, c) \subseteq \text{dcl}'(D)$ より $c - \alpha(b) \in \text{dcl}'(a, d)$. ここで $|c - \alpha(b)| < 1$ より $\text{dcl}(c - \alpha(b)) = \text{dcl}'(c - \alpha(b)) \subseteq \text{dcl}'(a, d)$ となり、 $d - \alpha(a) = c - \alpha(b) \in \text{dcl}(a, d)$. 特に

$$\alpha(a) \in \text{dcl}(a, d).$$

$a \perp' d$ より $\alpha(a) \perp'_a d$. よって $\mathcal{M}$ で $\alpha(a) \perp'_a d$ より $\alpha(a) \in \text{dcl}(a)$ となり矛盾。

□

参考文献

- [P] A. Pillay, Some remarks on definable equivalence relations in O-minimal structures, JSL, 51, 1986, pp.709-714
- [P1] A. Pillay, Canonical bases in O-minimal and related structures, 2006, preprint.
- [Y] Ikuro Yoneda, Forking and some eliminations of imaginaries, 2006, submitted.