

blockwise m -dependent 確率変数列の

大数の強法則について

宮教入 吾妻一興 (Kazuoki Azuma)

$\{X_k\}$ を確率変数列とし, $E(X_k) = 0$, $E(X_k^2) = \sigma_k^2 < \infty$ とする。

$\{X_k\}$ が blockwise m -dependent であるという。すなわち,

十分大なる $p \in \mathbb{N}$ に対して, $2^{p-1} < k < l \leq 2^p$, $l - k > m$ ならば,

2^p の集合 $\{X_{2^{p-1}+1}, \dots, X_k\}$ と $\{X_l, X_{l+1}, \dots, X_{2^p}\}$

が独立であることである。

$\{X_k\}$ が blockwise quasi-orthogonal という。すなわち,

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists f_p(j)$, $j = 0, 1, \dots, 2^{p-1} - 1$;

$$\begin{cases} |E(X_k X_l)| \leq \sigma_k \sigma_l f_p(|k-l|), & 2^{p-1} < k, l \leq 2^p \\ \sum_{j=0}^{2^{p-1}-1} f_p(j) \leq C \end{cases}$$

が成り立つことと定義する。

これらに關する F. Móricz の結果を紹介する。

定理 1 $\{X_k\}$ が blockwise m -dependent ならば

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow 0 \quad \text{a.s.} \quad (n \rightarrow \infty)$$

定理 2 $\{x_k\}$ が blockwise quasi-orthogonal ならば

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 [\log(k+1)]^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ conv. a.s. } (n \rightarrow \infty)$$

従って, Kronecker の lemma を用いて,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} [\log(k+1)]^2 < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow 0 \text{ a.s. } (n \rightarrow \infty)$$

定理 1 の証明は, 定義より, $\exists p, t \in \mathcal{N}; 2^{p-1} < k_1 < k_2 < \dots < k_t$
 $\leq 2^p$, $k_{\tau+1} - k_{\tau} > m$ ($\tau = 1, 2, \dots, t-1; t \geq 2$) ならば, 確率変数
 列 $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_t}$ が互いに独立であることと,

モーメント不等式

$$E \left(\sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} x_k \right)^2 \leq C_1 \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} \sigma_k^2$$

が成り立つことによる。

定理 2 の証明は, $a, n \in \mathcal{N}$ $a+1, a+n$ の同じ dyadic block
 に属するもの, 即ち $\exists p \geq 1; 2^{p-1} < a+1 \leq a+n \leq 2^p$ として

モーメント不等式

$$E \left(\sum_{k=a+1}^{a+n} x_k \right)^2 \leq C_2 \sum_{k=a+1}^{a+n} \sigma_k^2$$

が成り立つことによる。

つまり, blockwise m -dependent の場合にも成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty \text{ ならば } \sum x_k \text{ conv. a.s. であることが示される。}$$

参考文献

1. F. Móricz, Strong limit theorems for blockwise m -dependent and blockwise quasiorthogonal sequences of random variables, Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987), 709-715.
2. F. Móricz, Moment inequalities and the strong laws of large numbers, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 35 (1976), 299-314.