

ジ-ゲル保型形式の標準L関数

東工大・理 水本信一郎 (Shin-ichiro Mizumoto)

1. Poles

$k, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$M_k^n := \left\{ \text{holomorphic modular forms of weight } k \right. \\ \left. \text{w.r.t. } Sp(n, \mathbb{Z}) \text{ (size } 2n) \right\},$$

$$S_k^n := \left\{ \text{cusp forms } \in M_k^n \right\}$$

とする。

$f \in M_k^n$ を eigenform (すなわち Hecke algebra の non-zero common eigenfunction) とすれば, 各素数 p に対し f の

Satake p -parameters

$$(\alpha_1(p), \dots, \alpha_n(p)) \in (\mathbb{C}^\times)^n$$

が Weyl 群の作用を除いて決まる。

ここで考える L 関数は次のとおりである:

$$L(s, f, \underline{St}) := \prod_{p: \text{素数}} \left\{ (1-p^{-s})^{-1} \prod_{j=1}^n (1-\alpha_j(p)p^{-s})^{-1} (1-\alpha_j(p)^{-1}p^{-s})^{-1} \right\}.$$

この右辺は $\operatorname{Re}(s) > n+k+1$ で ($f \in S_k^n$ ならば $\operatorname{Re}(s) > n+1$ で) 広義に絶対収束する。この $L(s, f, \underline{S}_t)$ は

${}^L S_{p_n}^\circ = \mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{C})$ の standard representation に対応する Langlands の意味の L 関数なるので、 f に付随した標準 L 関数とよぶ。

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$$

と L ,

$$\Lambda(s, f, \underline{S}_t) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\varepsilon) \prod_{j=1}^n \Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-j) \cdot L(s, f, \underline{S}_t)$$

とおく。ここで

$$\varepsilon := \begin{cases} 0 & (n \text{ even}), \\ 1 & (n \text{ odd}). \end{cases}$$

この関数について次のことが知られている (Andrianov / Kalinin [1] (special cases), Piatetski-Shapiro / Rallis [11], Böcherer [3]) :

$\Lambda(s, f, \underline{S}_t)$ は全 s 平面に meromorphic に解析接続され、関数等式

$$\Lambda(s, f, \underline{S}_t) = \Lambda(1-s, f, \underline{S}_t)$$

を満たす。

以下 $\Lambda(s, f, \underline{S}_t)$ の poles についての結果を述べるため記号の準備をする。

$m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と、 1 と t の ring R に対し

$$R^{(m,n)} := \{ m \times n \text{-matrix}, \forall \text{ entries} \in R \} \quad \text{とする。}$$

$\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$H_\nu(m, n) := \left\{ P : \mathbb{C}^{(m, n)} \rightarrow \mathbb{C} : \text{polynomial fcn} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } P(XA) = \det(A)^\nu P(X) \\ \quad (A \in GL(n, \mathbb{C}), X \in \mathbb{C}^{(m, n)}) \\ \text{(ii) } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{ij}^2} P(X) = 0 \quad (X = (x_{ij})) \end{array} \right\}$$

は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間である。

$$\mathcal{S}_m := \left\{ S \in GL(m, \mathbb{Z}) \mid \begin{array}{l} {}^t S = S > 0, \\ \forall \text{ diag. entries } \in 2\mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

とするとよく知られているように

$$\mathcal{S}_m \neq \emptyset \iff m \equiv 0 \pmod{8}$$

である。いま $m \equiv 0 \pmod{8}$ と仮定して

$$S \in \mathcal{S}_m, \quad P \in H_\nu(m, n),$$

$$Z \in \mathcal{H}_n := \text{Siegel upper half space of degree } n$$

に対して

$$\mathcal{I}_{S, P}(Z) := \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m, n)}} P(S^{1/2} G) \exp(\pi i \operatorname{trace}(S[G]Z))$$

$$(\text{但し } S[G] := {}^t G S G)$$

とすると $\mathcal{I}_{S, P} \in M_{\frac{m}{2} + \nu}^n$ となる。

$$k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq m/2 \quad \text{に対し}$$

$$B_k^n(m) := \{ \mathcal{V}_{S,P} \mid S \in \mathcal{S}_m, P \in H_{k-\frac{m}{2}}(m,n) \}$$

は M_k^n の, Hecke algebra の作用 τ stable τ -subspace とする (Freitag [7]).

$8 \nmid m$ のとき $B_k^n(m) := \{0\}$ とする。

Theorem 1. $f \in S_k^n$ を eigenform, $k \geq n$ とする。

このとき $\Lambda(s, f, \underline{St})$ は $s=0$ と $s=1$ の possible simple poles を $t > 1$ 以上 holomorphic. $t > 1$ に $\Lambda(s, f, \underline{St})$ が $s=0$ の ($\Leftrightarrow s=1$ の) pole を $t > 1$ 以上の必要十分条件は $f \in B_k^n(2n) \cap S_k^n$ とするに等しい。

Cor. $k \geq n$, $4 \nmid n$ ならば $\Lambda(s, f, \underline{St})$ は entire.

Remarks. (i) Theorem 1 の後半 ($B_k^n(2n)$ に属する eigenform を $L(s, f, \underline{St})$ の $s=1$ のふるまいを特徴づけること) は Weissauer [13], Böcherer [4] の結果である。

(ii) $k > n$ ならば $B_k^n(2n) \subset S_k^n$.

(iii) $nk \equiv 0 \pmod{2}$ とおいて $k \rightarrow \infty$ とするとき,

ある $c_1, c_2 > 0$ があるとして

$$\dim B_k^n(2n) \leq c_1 k^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$\dim S_k^n \sim c_2 k^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

となる。すなわち

$\Lambda(s, f, \underline{St})$ は "generic" なる f に対して entire である。

(iv) $n=2$ のとき, 次の結果と比較されたい。

$f \in S_k^2$: eigenform に對し

$L(s, f, \text{spin})$: entire $\iff f \notin \text{Maass space}$

(Evdokimov [5], Oda [10]).

2. Residues

M_k^n は $\forall$ Fourier coefficients $\in \mathbb{Q}$ とする basis を t から

$\text{Aut}(\mathbb{C})$ が次のように作用する:

$$f(Z) = \sum_{T^{(n)} \geq 0} a(T) \exp(2\pi i \text{trace}(TZ)) \in M_k^n$$

と $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ に對し

$$f^\sigma(Z) := \sum_{T \geq 0} a(T)^\sigma \exp(2\pi i \text{trace}(TZ)) \in M_k^n.$$

$f \in M_k^n$ を eigenform とし, $\mathbb{Q}(f)$ を, $\mathbb{Q}$ 上の Hecke algebra の f への eigenvalues 全部に對し, $\mathbb{Q}$ 上生成される totally real number field (finite degree) とする。

Theorem 2. $k \geq n$ とし, さらに

$n \equiv 0 \pmod{4}$, $f \in B_k^n(2n) \cap S_k^n$: eigenform
(すなわち, Thm 1 によれば $\Lambda(s, f, St)$ が $s=0$ と $s=1$ で poles を持つ場合) とする。さらに, f の Fourier coefficients はすべて $\mathbb{Q}(f)$ に属すると仮定する。このとき

$$A(f) := \frac{\text{res}_{s=1} \Lambda(s, f, St)}{(f, f)}$$

(但し $(,)$ は Petersson 内積) に対して

$$A(f)^\sigma = A(f^\sigma) \quad \forall \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$$

が成り立つ。特に $A(f) \in \mathbb{Q}(f)$ である。

Remark. $B_k^n(z_n) \cap S_k^n$ は次のような orthogonal basis $\{f_j\}$ を持つ: 各 f_j は eigenform であり $\forall$ Fourier coefficients of $f_j \in \mathbb{Q}(f_j)$.

3. Outline of Proofs

$m, \kappa, N \in \mathbb{Z}_{>0}$, κ even, $Z \in \mathcal{H}_m$ に対して

$$E_\kappa^{(m)}(Z, s, N) := \det(I_m(Z))^s \sum_{M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} : \Delta_{m,0} | \Gamma_0^{(m)}(N)} \det(CZ+D)^{-\kappa} |\det(CZ+D)|^{-2s}$$

と定める。 $z = Z$

$$\Gamma_0^{(m)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ c & d \end{pmatrix} \in S_{p(m, \mathbb{Z})} \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$\Delta_{m,0} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in S_{p(m, \mathbb{Z})} \right\}.$$

右辺は $\text{Re}(s) > (m+1-\kappa)/2$, $Z \in \mathcal{H}_m$ に対し広義一様に絶対収束する。さらには $E_\kappa^{(m)}(Z, s, N)$ は全 s 平面に有理型に解析接続される。

$$E_\kappa^{(m)}(Z, s) := E_\kappa^{(m)}(Z, s, 1).$$

(Proof of Thm 1.) 簡単のため κ even とする。

Garrett - Böcherer の積分表示 [8, 3]:

$$\begin{aligned}
& \Lambda(s, f, \underline{St}) \cdot f(Z) \\
&= (\Gamma\text{-functions の 積}) \cdot (\text{Riemann zeta の 積}) \\
&\quad \cdot (f, E_k^{(2n)}((-\bar{Z}^{(n)} \ 0), \frac{s-k+n}{2})) \quad (1)
\end{aligned}$$

を用いる。 $z = z''$

$$E_k^{(m)}(Z, s) = \text{Tr}_\eta^N (E_k^{(m)}(*, s, N) \Big|_{\eta_m})(Z) \quad (2)$$

とある。 19L

$$\eta_m := \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix};$$

$$g: \mathbb{H}_m \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{と} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(m, \mathbb{Z}) \quad \text{に 対し}$$

$$(g|_k M)(Z) := g((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) \det(CZ+D)^{-k};$$

$$\text{さらに } g \text{ なら } g|_k \eta_m^{-1} \Gamma_0^{(m)}(N) \eta_m = g \quad \text{と かつ } k \text{ と } k'$$

$$\text{Tr}_\eta^N(g) := \sum_{\gamma: \eta_m^{-1} \Gamma_0^{(m)}(N) \eta_m \backslash Sp(m, \mathbb{Z})} g|_k \gamma$$

とある。

$$\text{— かつ, Feit [6] に 対し, } E_k^{(m)}(*, s, N) \Big|_{\eta_m}$$

(N even) の possible poles の 様子が 分かる。とある。

これは (2) と (1) を 使う。

$$\Lambda(s, f, \underline{St}) \text{ は } \text{Re}(s) > 0 \text{ かつ } s = 1 \text{ での } \frac{1}{s-1}$$

simple pole を 除く $s > 1$ は holomorphic.

とある。とある。 (さらに n なら odd かつ $s = 1$ での holomorphic とある。とある。)

これと Weissauer の結果 [13] を使って、関数等式とあわせれば

Thm 1 が得られる。

(Proof of Thm 2.) 上の Garrett - Böcherer の積分表示

(を少し modify (1) を使う) から次の式が出る:

$$\begin{aligned} \text{res}_{s=1} \Lambda(s, f, \underline{S}_t) \cdot f(Z) \\ = (\text{rational number}) \cdot (f, (DE_n^{(2n)}) \begin{pmatrix} -\bar{Z} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

ここで $\mathbb{D}$ は、ある differential operator であり、holomorphy と Fourier coefficients の rationality を保つものとしてある。また

$$E_n^{(2n)}(Z) := E_n^{(2n)}(Z, 0)$$

は、 $4 \mid n$ ならば holomorphic modular form であり、 $\forall$ Fourier coefficients $\in \mathbb{Q}$ であり (Weissauer [13])。これから Thm 2 が得られる。

4. Special values (supplementary to Harris [9], Sturm [12], Böcherer [2]).

Theorem 3. $f \in S_k^n$ を eigenform, $k > n$ とする。さらに f の Fourier coefficients はすべて $\mathbb{Q}(f)$ に属するものとする。

$$1 \leq m \leq k-n, \quad m \equiv n \pmod{2}$$

をみたす $m \in \mathbb{Z}$ をとる。但し

$$(\star) \quad m=1 \text{ ならば } n \equiv 3 \pmod{4} \text{ または } n=1$$

と仮定する。

$$B(f) := \frac{L(m, f, \underline{S}_t)}{\pi^{d(m)}(f, f)},$$

$$d(m) := m(n+1) + nk - \frac{n(n+1)}{2}$$

とすると

$$B(f)^\sigma = B(f^\sigma) \quad \forall \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$$

が成り立つ。特に

$$B(f) \in \mathbb{Q}(f).$$

Remarks. (i) $m \leq n$ の場合が、これより知られてゐるから、
 以下に思われる。

(ii) $L(s, f, \underline{S}_t)$ の, Deligne の意味の critical points
 (の右半分)は

$$\left\{ m \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq m \leq k-n, \quad m \equiv n \pmod{2} \right\}$$

である (特に $k \leq n$ は critical point はない)。従つて

仮定(*) は

$$m=1 \quad \text{ならば} \quad n: \text{odd}$$

とこの仮定で済まされたいと思われる。しかし今のときは

$n \equiv 1 \pmod{4}$, $n \geq 5$ の cases にはこの仮定は成り立たない。

Proof は Thm 2 のときと同様である。このときは

$E_{m+n}^{(2n)}$ が問題となる。上の Remark (ii) との関連でこのとき

$n \equiv 1 \pmod{4}$, $n \geq 5$ のとき $E_{n+1}^{(2n)}$ の性質が今のときは

よくわからぬ (多分 non-holomorphic modular form である)

から、仮定(*) をつけたい。

References

1. Andrianov, A.N., Kalinin, V.L.: On the analytic properties of standard zeta functions of Siegel modular forms. Math. USSR Sbornik, 35, 1-17 (1979). (English transl.)
2. Böcherer, S.: Über die Fourier - Jacobi - Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II. Math. Z., 189, 81-110 (1985).
3. Böcherer, S.: Über die Funktionalgleichung automorphen L -Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe. J. reine angew. Math., 362, 146-168 (1985).
4. Böcherer, S.: Siegel modular forms and theta series. AMS Research Institute "Theta Functions", Bowdoin College, 1987
5. Evdokimov, S.A.: A characterization of the Maass space of Siegel modular forms of second degree. Math. USSR Sbornik, 40, 125-133 (1981).
6. Feit, P.: Poles and residues of Eisenstein series for symplectic and unitary groups. Mem. Amer. Math. Soc., 61, no. 346 (1986)

7. Freitag, E.: Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten zur Siegelschen Modulgruppe. Math. Ann., 254, 27 - 51 (1980).
8. Garrett, P. B.: Pullbacks of Eisenstein series: applications. Automorphic Forms of Several Variables. Taniguchi Symposium, Katata, 1983: Birkhäuser 1984.
9. Harris, M.: Special values of zeta functions attached to Siegel modular forms. Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 14, 77 - 120 (1981).
10. Oda, T.: On the poles of Andrianov L-functions. Math. Ann., 256, 323 - 340 (1981).
11. Piatetski-Shapiro, I., Rallis, S.: L-functions for the classical groups. In: Lect. Notes in Math., 1254: Springer 1987.
12. Sturm, J.: The critical values of zeta functions associated to the symplectic group. Duke Math. J., 48, 327 - 350 (1981).
13. Weissauer, R.: Stabile Modulformen und Eisensteinreihen. Lect. Notes in Math., 1219: Springer 1986.