

不変式論に現れるある combinatorics

都立大 中島晴久

Haruhisa Nakajima

0. H を代数閉体 k 上の affine 代数群. $Y \in H$ が有理的に作用する, affine k -variety とする. H は Y の座標環 $k[Y]$ に k -algebra 自己同型として作用するが, $\equiv$ の作用によって不変な元の全体の作る k -subalgebra を $k[Y]^H$ とかく.

(0.1) Problem. $k[Y]^H$ はいつ k 上有限生成な algebra か?

この問題は Hilbert のオ14問題の一般化された形になっているが, 次が知られている.

(0.2) Popov (cf. [11]). H が "reductive" $\iff$ すべての affine H -variety について $k[Y]^H$ が有限生成

周知の通り「 $\implies$ 」は k の標数が 0 の場合には古典的である.

正標数のときには Mumford 予想の解決から得られる ([5, 6]).

又, 「 $\impliedby$ 」は (0.1) に対する 永田先生の反例 ([6]) の系である. 一斉, 個別的な Y については

(0.3) Weitzenböck (cf. [6]). $\text{char}(k)=0$, $H = \mathbb{G}_a$, Y が有限次元 rational $\mathbb{G}_a$ -module のときには $k[Y]^H$ は k 上有

有限生成。

が古典的である。 $n=3$ で $\text{char}(k)=0$ の場合、Seshadri が指摘しているように ([6])、1次元巾単群 G_a を SL_2 の閉部分群とすると共に、 G_a の有理表現は SL_2 のそれの制限として得られる。従って (0.3) は実質的に次の結果に含まれる。

(0.4) Hochschild-Mostow-Grosshans ([4])。 G を reductive 代数群、 Y を有限次元 rational G -module、 H を G の parabolic 部分群の unipotent radical とすると、 $k[Y]^H$ は k 上有限生成。

reductive 代数群 G に対し、 G のある極大 torus を normalize される部分群を regular な部分群という。Popov と Pommerening による次の予想は (0.4) の一般化を目指している。

(0.5) Conjecture。 G を reductive 代数群、 Y を有限次元有理 G -module、 H を G の regular 部分群とする。このとき $k[Y]^H$ は k 上有限生成か？

H の unipotent radical を考えることにより、 H は unipotent な regular 部分群の場合に限定してよい。この小文では、 $G = GL_n$ に関し (0.5) が実は巾単部分群 H の定める root 系の組合せ論的性質に依存しているという Pommerening の仕事 [10] を中心に紹介する。これは discrete な場合の coregular 表現の分類 [7, 8] に関係のある対象でもある (実際、可約な coregular な部分群は discrete な意味での regularity を要請している)。

$Y = G$ に G は left translation の作用させる。

(0.6) Mumford. reductive 群 G の閉部分群 H について $k[G]^H$ が k 上有限生成ならば、任意の affine G -variety Y について $k[Y]^H$ は k 上有限生成。

実際 $G \times H \ni (g, h)(g', y) = (hg'g^{-1}, hy)$ により作用させる $k[G \times Y]^{G \times H} \cong k[G/H \times Y]^G$ であり、 $Y \ni y \mapsto (e, y) \in G \times Y$ は $k[G \times Y]^G \cong k[Y]$ を示すから、 $k[G/H \times Y]^G \cong k[Y]^H$ 。つまり、(0.6) のこの証明は、より強く、たとえば G が半単純の場合には $k[G]^H$ の生成系が構成できれば $k[Y]^H$ の生成系も構成できることを主張してあり、構成的不変式論の立場から、 $k[G]^H$ の生成系の具体的構成は universal な意味をもつ。[10] では (0.5) に動機づけられておるが、Rota [2] による straightening law を GL_n の regular な中単部分群の不変式環へ制限し、それが成立する判定条件を中単群の生成元のつくり出す半順序集合の言葉で記述している。

1. 集合 $\{1, \dots, n\}$ を $[1, n]$, $[1, n] \times [1, n]$ を $[1, n]^2$ で表わす。Young 図式とは $(i, j) \in \sigma$, $i' \leq i$, $j' \leq j \Rightarrow (i', j') \in \sigma$ を満たすような $\mathbb{N} \times [1, n]$ の有限部分集合である。この σ を shape とする tableau T は、 $T: \sigma \rightarrow [1, n]$ なる写像とし、各 $(i, j), (i, j+1) \in \sigma$ について $T(i, j) < T(i, j+1)$ を満たすとする (この仮定は本質的な意味をもたない)。tableau T は

$$T = \begin{pmatrix} T(1,1), T(1,2), \dots \\ T(2,1), T(2,2), \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

のように表示され、この行及び列の概念を自然に定義できる。各列の成分が下へ向けて単調に非減少のときは、 T は標準的といわれる。又、tableau T の各列を、その成分を並べかえることにより下へ向けて単調に非減少となるようにした新しい tableau のことを T の標準化といい T^s であらわす（これは本質的に [1] で出現）。同じ Young 図式 λ の shape とする 2 つの tableau S, T を並べた組 $(S|T)$ を bitableau という。

一対 root 系 Φ は $(i, j) \in \Phi \Rightarrow i < j, (i, j) \in \Phi$ かつ $(j, l) \in \Phi \Rightarrow (i, l) \in \Phi$ をみたす $[1, n]^2$ の部分集合とする。半順序構造を $i \succ j \Leftrightarrow (i, j) \in \Phi$ で定義された半順序集合 (poset と略す) $[1, n]$ を $\Omega(\Phi)$ であらわす。tableau T の各行 $(i_1, \dots, i_m)$ について $(i_r, l) \in \Phi \Rightarrow l \in \{i_{r+1}, \dots, i_m\}$ をみたすとき、 T は Φ -tableau といわれる。 Φ -tableau が、1 行であれば Φ -minor という。更に $\text{bitableau}(S|T)$ については S が Φ -tableau Q とともに Φ -bitableau という。 Φ -tableau T の T^s は Φ -tableau になるとは限らない。これが常に成立するとき、root 系 Φ は標準化条件をみたすといわれる。

$\text{card } \Omega = n$ とする poset Ω の許容数量化とは $e: [1, n] \rightarrow \Omega$

なる双射 $e^{-1}: \Omega \rightarrow [1, n]$ が逆転順序準同型となるものを
 いう。組 (Ω, e) は数量化した poset と呼ばれるが $\mathfrak{P}(\Omega, e)$
 $\equiv \{(i, j) \in [1, n]^2 \mid e(i) > e(j)\}$ とおくとき、これは root 系に
 なる。 $\mathfrak{P}(\Omega, e)$ が標準化条件を満たすような許容数量化 e を
 もつとき、poset Ω は標準化条件を満たすといわれる。もち
 ろし、そのようなときでも、別の許容数量化 e' について $\mathfrak{P}(\Omega,$
 $e')$ が標準化条件を満たすとは限らない。 $\Omega \ni x$ について
 $\Omega(x) \equiv \{y \in \Omega \mid y < x\}$ と x の切片をいう。 $x, y \in \Omega$
 が切片同値 $x \sim y$ であるとは $\Omega(x) = \Omega(y)$ を満たすことと
 あり、 $\sim$ による Ω の同値類を切片類という。明らかに
 (1.1) Ω において切片同士が包含関係について比較可能なら
 ば Ω の切片類への分割 $\Omega = M_1 \cup \dots \cup M_r$ において $x \in M_i,$
 $y \in M_{i+1} \Rightarrow \Omega(y) \subset \Omega(x)$ となるように番号 i を各切片類 M_i
 につけることができる。

次の主張の [10] における証明には誤りがある。

(1.2) (Ω, e) を数量化した poset $\mathcal{P}$ 、 $\mathfrak{P}(\Omega, e)$ が標準
 化条件を満たすとき、 $\Omega_i \equiv \Omega(e(i))$ とおくとき、 $\Omega \supset$
 $\Omega_1 \supset \dots \supset \Omega_n = \emptyset$ 。

証明 ある i について $\Omega_i \not\supset \Omega_{i+1}$ とする。 $m \in [1, n]$ を $e(m) \in$
 $\Omega_{i+1} \setminus \Omega_i$ と定め、 $\{i+2, \dots, m-1\} \cap \Omega_i = \{j_1, \dots, j_k\}, j_1$
 $< \dots < j_k$ とする。

$$T = \begin{pmatrix} i+1 & i+2 & i+3 & \cdots & m-1 & m & \cdots & n-1 & n \\ i & j_1 & j_2 & \cdots & j_\lambda & m+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{F}$ -tableau だが T は $\mathbb{F}$ -tableau ではない。 //

Ω の切片類 Λ の分割 $\Omega = M_1 \cup \cdots \cup M_r$ に対し $\Omega_i \equiv \Omega(x_i)$ ($x_i \in M_i$) とおき次の二つの条件を記述する。

(*) $\Omega_i \subseteq M_{i+1} \cup \cdots \cup M_r$ かつ $\Omega > \Omega_1 > \cdots > \Omega_r = \emptyset$

(**) $1 \leq i < j < r$ について $\text{card}((M_{i+1} \cup \cdots \cup M_j) \setminus \Omega_i) > 1 \Rightarrow M_i \ni x$ は $M_{j+1} \cup \cdots \cup M_r$ の中に順序について隣接する元をもたない。

一般 Ω において切片同士が比較可能ということと、(1.2) の結論部分があったような Ω の許容数量化が存在する $z = z'$ は同値である。従って (1.1) と (1.2) から、

(1.3) Ω が標準化条件を満たすならば (*) が成立する。

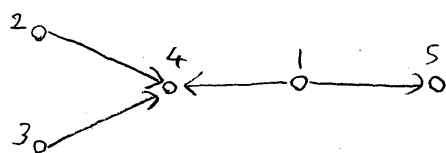
条件 (*) と (**) が成立するとき、poset Ω は good であるといわれる。次が poset に関する [10] の主定理である。

(1.4) Theorem (cf. [10]) poset Ω について Ω が標準化条件を満たす $\Leftrightarrow \Omega$ は good.

明らかな "good" の概念の代わりに poset によって調べられること、この結果は有用である。 $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ が (directed) arrow $\Leftrightarrow x > y$ かつ x と y とは隣接する。よって Ω は (directed) graph にあらわせる。又 Ω の許容数量化は次の

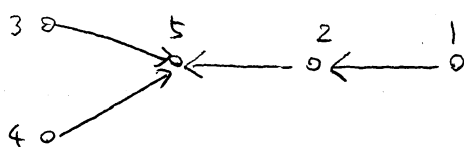
graph に 1 から n までの数字を "direction" と compatible に書えることにより表示される。

例 ①



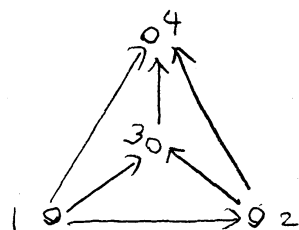
: not good

②



: good

③



: good

④



: not good

2. GL_n の regular な中単部分群 U について, $k[GL_n]^U$ の k 上の生成系を構成することは考えているのであるが, $M_n = k^{n^2}$ は $n \times n$ 型 matrix のなす affine 空間とすると $SL_n \supset U$ なので, 代わりに $k[M_n]^U$ を考察すればよい。変数 $\{x_{ij}\}$ をとり $k[M_n] = k[x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ とする。bitableau $(S|T)$ の bideterminant とは $k[M_n]$ における次の多項式:

$$\prod_i (\text{matrix } (x_{ij}) \text{ の } S(i,1), S(i,2), \dots \text{ 行} \times T(i,1), T(i,2), \dots \text{ の列からなる小行列式})$$

以下, bitableau と bideterminant とを同一視する。 S, T が標準的となるとき, $\text{bitableau}(S|T)$ も標準的という。次が基本的。

(2.1) Doubilet, Rota - Stein (cf. [2]). 標準的な bitableaux は $k[M_n]$ の k -basis になる。

この内容は straightening law として知られているが、[1]で更に詳しい検討がなされており、それが [10]で有用である。

root系 Φ が "straightening law" を満たすとは、任意の Φ -bitableau が 標準的な Φ -bitableaux の k -線形結合で表わされることにいう。たとえば bitableau T を標準的な bitableaux の線形結合でかくとき T^s はその係数が非零の項としてあらわれる (cf. [1])。従って Φ -bitableau T が 標準的な Φ -bitableaux の線形結合になつていければ、(2.1)により、 T^s も Φ -bitableaux になる。実は次が成立する。

(2.2) Proposition (cf. [10]). root系 Φ について、 Φ が 標準化条件を満たす $\iff \Phi$ が "straightening law" を満たす。

$U(\Phi)$ を次の行列 $u = (u_{ij})$ からなる GL_n の部分群とする：

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ k\text{の任意の元} & \text{if } (i,j) \in \Phi \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$U(\Phi)$ は GL_n の regular な単部分群であり、この群について $k[M_n]^{U(\Phi)}$ の生成元を調べられたい。

(2.3) Conjecture (Pommerehne). $k[M_n]^{U(\Phi)}$ は Φ -minor 達によつて k 上 algebra として生成される？

この root 系 Φ から作られる poset $\Omega(\Phi)$ (cf. p4) が "good

であるとき、 $U(\Phi)$ も good であるという。明らかに Φ -bitableaux は $U(\Phi)$ で不変である。従って $k[M_n]^{U(\Phi)}$ は標準的な Φ -bitableaux を k -basis とする。また、 Φ が "straightening law" を満たすことにより、(2.2), (1.4) を用いて $U(\Phi)$ が good であることが示された。この逆も成立し、次の [10] の主定理である。

(2.4) Theorem (cf. [10]) root 系 Φ について $U(\Phi)$ が good $\iff$ 標準的な Φ -bitableaux は $k[M_n]^{U(\Phi)}$ の k -basis.

$n \leq 4$ については not good な poset は 1 つ (part ④ の例) しかない。しかし $n=5$ の not good な poset から作られる単群の不変式環は $k[M_2]^{\mathfrak{S}_2} \otimes k[M_2]^{\mathfrak{S}_2}$ に同型であり容易 ([9])。つまり $G = GL_n$ ($n \leq 4$) について不変式環の生成系を原理的に構成できるという強い意味において (0.5) は解けている。なお (0.5) に対する全く異なる視点として Grosshans [3] が基本的かつ有用である。これは多分 Seshadri の仕事に触発されている。

REFERENCES

1. C. De Concini - D. Eisenbud - C. Procesi, Young diagrams and determinantal varieties, Invent. Math. 56 (1980), 129-165.
2. P. Doubilet - G. C. Rota - J. Stein, Combinatorial methods in invariant theory, Stud. Appl. Math. 53 (1974), 185-216.

3. F. Grosshans, Observable groups and Hilbert's fourteenth problem, Amer. J. Math. 95 (1973), 229-253.
4. ———, Invariants of unipotent radicals of parabolic subgroups, Invent. Math. 73 (1983), 1-9.
5. D. Mumford, Geometric Invariant Theory, 2nd ed., Springer-Verlag, 1985.
6. M. Nagata, Lectures on the fourteenth problem of Hilbert, Tata Institute, 1965.
7. H. Nakajima, Regular rings of unipotent groups, J. Algebra 85 (1983), 253-286.
8. ———, Modular representations with free covariants, in preparation.
9. K. Pommerening, Invarianten unipotenter Gruppen, Math. Z. 176 (1981), 359-374.
10. ———, Ordered sets with the standardizing property and straightening law for algebras of invariants, Advances in Math. 63 (1987), 271-290.
11. V. L. Popov, Hilbert's theorem on invariants, Soviet Math. Dokl. 21 (1979), 1318-1322.

(補足) $u^{-1} = (x_{ij}) \in U(\mathbb{F})$ の $k[M_n]$ への action は次式で与えられる。

$$u(x_{ij}) = x_{ij} + \sum_{(i,0) \in \mathbb{F}} u_{i,0} x_{0j}.$$

10