

p -進 Chevalley 群の極大 K -トラスのある共役類について

尾道短大

刈山 和俊
Kariyama Kazutoshi

宏大・理

土井 英雄
Doi Hideo

記号 K : ある p -進体 i.e. $\mathbb{Q}_p$ の有限次代数拡大体.

G : ある連結, 単純, 単連結な K 上の Chevalley 群.

A : K 上分解するある極大 K -トラス.

N : A の G における正規化部分群.

$W = N/A$: Weyl 群.

$w_0 \in W$ を次のように取る:

G が A_n, F_4, G_2 -型の時,

w_0 はある Coxeter 元.

G が B_n, C_n -型の時,

$$w_0 = (1 \cdots r_1)^-(r_1+1 \cdots r_1+r_2)^- \cdots (r_1+\cdots+r_{s-1}+1 \cdots n)^-$$

$$\text{但し, } n = r_1 + r_2 + \cdots + r_{s-1} + r_s.$$

B_n, C_n -型の Weyl 群は vector space V の基底

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 上符号変換と置換との半直積であ

る。例えば

$$(12 \dots r_1)^{-1}: e_1 \mapsto e_2 \mapsto \dots \mapsto e_{r_1} \mapsto -e_1$$

$m: w_0$ の位数

以上の記号の下に次の問題を考える。

問題 G の極大 K -トーラスの K 上共役類を分類せよ。特に anisotropic 極大 K -トーラスの K 上共役類を分類せよ。

それらは $G(K)$ のコンパクト Cartan 部分群の K 上共役類を与える。但し、 $G(K)$ は G の K 上有理点よりなる群。

T を G のある極大 K -トーラスとすると、 $T = gAg^{-1}$, L/K は有限次 Galois 拡大となる $G(L)$ の元 g が取れる。この時、 T を「 L 上分解する」と呼ぶ。今後、 L/K を次数 m のある巡回 Galois 拡大とし、 σ を L/K の Galois 群 $\Gamma = \text{Gal}(L/K)$ のある生成元としよう。更に、 $N(L)$ の元 $g^{-1}\sigma g$ の $W = N(L)/A(L)$ への標準像 $\overline{g^{-1}\sigma g}$ が w_0 に等しくなるような K -トーラス T (もし存在すれば) を、仮に「 w_0 に付随するトーラス」と呼ぶ。上の問題を次のように制限しよう。

問題 L 上分解し、 w_0 に付随する極大 K -トーラスの K 上共役類はどのくらい存在するのか。

上の K -トーラスは K 上 anisotropic である。この問題を Galois cohomology の言葉で定式化する。

G の極大 K -トーラスの K 上共役類と $H^1(\text{Gal}(K_s/k), N(K_s))$ との間の一対一対応が存在する。但し、 K_s は K のある分離閉包。これより L 上分解する極大 K -トーラスの K 上共役類と $H^1(\text{Gal}(L/k), N(L))$ との一対一対応が導かれる。そして、標準写像 $N(L) \rightarrow W = N(L)/A(L)$ より

$$f_L: H^1(\text{Gal}(L/k), N(L)) \rightarrow H^1(\text{Gal}(L/k), W)$$

が導かれる。次に $C(w_0)$ を 1-cocycle $\sigma \mapsto w_0$:

$\Gamma \rightarrow W$ (よって $H^1(\text{Gal}(L/k), W)$ の元である。) とすると、 $C(w_0)$ の f_L による逆像 $f_L^{-1}(C(w_0))$ は先程の対応により、 L 上分解し、 w_0 に付随する極大 K -トーラスの K 上共役類と一対一対応が導かれる。

$$H^1(\text{Gal}(K_s/k), N(K_s))$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \\ H^1(\text{Gal}(L/k), N(L)) & \xrightarrow{f_L} & H^1(\text{Gal}(L/k), W) \\ \uparrow & & \downarrow \\ f_L^{-1}(C(w_0)) & \rightarrow & C(w_0) \end{array}$$

したがって、我々は次の問題を考えればよい。

問題 $H^1_L(C_{(w_0)})$ の構造を調べよ。

$N(K)$ の元 n_0 を w_0 のある代表元とする。 Tate-Nakayama の定理を使うと、 1-cocycle $\sigma \mapsto n_{w_0} : \Gamma \rightarrow N(L)$ で $n_{w_0} = t_0 n_0$, $t_0 \in A(L)$ となるものが存在する。 今後それを固定する。 $A(L)$ 上に新しい Γ -加群を

$$\sigma a = \sigma(w_0 a) \quad , \quad a \in A(L)$$

で定義し、それを $w_0 A(L)$ と表わす。 この Γ -加群に対して

$H^1(\Gamma, w_0 A(L))$ 上 w_0 の W における中心化群 $Z_W(w_0)$ の作用を次で定義する； 任意の $w \in Z_W(w_0)$ と、 1-cocycle

$$\sigma \mapsto a : \Gamma \rightarrow w_0 A(L) \quad \text{に対して,}$$

$$1\text{-cocycle } \sigma \mapsto (w a (t_0^{-1} w_0 t_0)) \cdot (n_w n_0 n_w^{-1} n_0^{-1})$$

$$: \Gamma \rightarrow w_0 A(L).$$

但し、 n_w は $N(K)$ における w のある代表元。 ここで写像

$$H^1_L(C_{(w_0)}) \rightarrow H^1(\Gamma, w_0 A(L))$$

1-cocycle $\sigma \mapsto n : \Gamma \rightarrow N(L)$ に対して、 1-cocycle

$$\sigma \mapsto n n_{w_0}^{-1} : \Gamma \rightarrow w_0 A(L) \quad \text{を対応させる。}$$

補題 上の写像が 一対一対応

$$H^1_L(C_{(w_0)}) \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma, w_0 A(L)) / Z_W(w_0)$$

を与える。 但し、右辺は、前に定義した作用に関する

orbit 類。

したがって、 $H^1(\Gamma, w_0 A(L)) / Z_W(w_0)$ の構造を調べればよい。
 ます、 $H^1(\Gamma, w_0 A(L))$ の構造に関して次の定理が得られる。

定理 1 各 G の型に対して、 $H^1(\Gamma, w_0 A(L))$ と次の群との間に同型が与えられる：

$$(A_n\text{-型}) \quad K^* / N_{L/K}(L^*) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(L/K)$$

但し、 $N_{L/K} : L \rightarrow K$: ノルム写像

$$(B_n, C_n\text{-型}) \quad \prod_{i=1}^s (K_{r_i} \cap N_{L/K_{2r_i}}(L^*) / N_{L/K_{r_i}}(L^*)) \\ \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^s \text{Gal}(L/F_i)$$

但し、 $K_r = \{x \in L \mid \sigma^r x = x\}$ 、 $F_i = K_{r_i}$ または L 。

$$(F_4, G_2\text{-型}) \quad \{0\} \quad (\text{trivial})$$

最後に、 $H^1(\Gamma, w_0 A(L)) / Z_W(w_0)$ の構造に関して次の定理が得られる。

定理 2 各 G の型に対して、 $H^1(\Gamma, w_0 A(L)) / Z_W(w_0)$ は次の群との間に一対一対応が与えられる：

$$(A_n\text{-型}) \quad K^\times / (N_{L/K}(L^\times) \cup (-1)^n N_{L/K}(L^\times))$$

(B_n, C_n -型) $r_1, r_2, \dots, r_s$ のうち相異なる整数を $d_1, d_2, \dots, d_s$ とすると、

$$\prod_{i=1}^s \left\{ (K_{d_i} \cap N_{L/K_{2d_i}}(L^\times)) / (N_{L/K_{d_i}}(L^\times) \cup r_i N_{L/K_{d_i}}(L^\times)) \right\}$$

但し、 r_i について $r_i^2 \equiv 1 \pmod{N_{L/K_{d_i}}(L^\times)}$ であるが、

B_n -型の場合; $\lfloor \frac{d_i+1}{2} \rfloor$ が偶数のときは、 $r_i = 1$ 。

$\lfloor \frac{d_i+1}{2} \rfloor$, d_i 共に奇数のときは、 $r_i = -1$ 。

$\lfloor \frac{d_i+1}{2} \rfloor$ が奇数かつ d_i が偶数のときは、

$$r_i \equiv 1 \pmod{N_{L/K_{d_i}}(L^\times)} \quad \text{となるための必要十分}$$

条件は $z^{-1} \sigma z = -1$ かつ $z^{-1} \sigma z \in N_{L/K_{d_i}}(L^\times)$ となる

$N_{L/K_{2d_i}}(L^\times)$ の元 z が取れる。特に L/K が不分岐拡大のときは $r_i = 1$ 。但し $[,]$ は Gauss 記号。

C_n -型の場合: $m = 2m'$ と書ける。 $\frac{m'}{d_i}$ が偶数のときは、 $r_i = 1$ 。 $\frac{m'}{d_i}$, d_i 共に奇数のときは、 $r_i = -1$ 。

$\frac{m'}{d_i}$ が奇数かつ d_i が偶数のときは、 B_n -型の $\lfloor \frac{d_i+1}{2} \rfloor$ が奇数、 d_i が偶数の場合と同じ。

$$(F_4, G_2\text{-型}) \quad \{0\} \quad (\text{trivial})$$