

ストークス現象

慶応義塾大 およびミネソタ大

渋谷 泰隆

1. 記号と約束:

- (i) $\mathcal{D}(R) = \{x \in \mathbb{C}; |x| > R\}$, ここに R は正の数;
- (ii) $\mathcal{S}(R) = \{x \in \mathcal{S}; |x| > R\}$, ここに $\mathcal{S}$ は複素平面における角領域;
- (iii) n 次の正方行列 $T(x)$ を $T(x) = x^q \sum_{h=0}^{\infty} T_h x^{-h}$ のように書いた時は, 右辺の級数は形式的なべき級数であって, q は整数 (正でもかまわない), T_h は n 次の定数行列である; また, このような場合に $T(x)$ を 形式的な行列 とよぶ;
- (iv) 各成分が或る $\mathcal{S}(R)$ において正則であるような n 次の行列 $F(x)$ に対して, $A_{sp}(F) = x^q \sum_{h=0}^{\infty} T_h x^{-h}$ と書いた時は, $A_{sp}(F)$ は x が $\mathcal{S}(R)$ において ∞ に近づく場合の F の漸近展開を表わす; つまり, すべての自然数 N に対して, $\mathcal{S}(R)$ において不等式 $|F(x) - x^q \sum_{h=0}^{\infty} T_h x^{-h}| \leq K_N |x|^{q-N-1}$ が成り立つような正の数 K_N が存在する;

(V) n 次の行列 $F(x)$ が下に述べる三つの条件を満足する場合に $F(x) \in A(\mathcal{S}(R))$ と書く:

- (a) $F(x)$ の各成分は $\mathcal{S}(R)$ において正則である;
- (b) $\det F(x) \neq 0 \quad (x \in \mathcal{S}(R))$;
- (c) x が $\mathcal{S}(R)$ において ∞ に近づく時, F と F^{-1} はそれぞれ漸近展開 $A_{sp}(F), A_{sp}(F^{-1})$ をもつ.

2. 主要な問題:

線形常微分方程式

$$(E_1) \quad \frac{dy}{dx} = A_1(x)y \quad \text{と} \quad (E_2) \quad \frac{du}{dx} = A_2(x)u$$

を考える. ここに, y と u は n 次元のベクトル, A_1 と A_2 は n 次の行列であって, 各成分はそれぞれ $\mathcal{O}(R_1)$ と $\mathcal{O}(R_2)$ において正則, $x = \infty$ において有理型である.

定義 2.1: 下に述べる二つの条件を満足する n 次の形式的な行列 $T(x)$ が存在する時に, (E_1) と (E_2) は 形式的に同値 であるという:

- (a) $\det T(x) \neq 0$ (形式的なべき級数として);
- (b) 変換 $u = T(x)y$ により (E_1) は形式的に (E_2) になる.

定義 2.2: 下に述べる三つの条件を満足する n 次の行列 $T(x)$ が存在する時に, (E_1) と (E_2) は 有理型的に同値 であるという:

- (a) $T(x)$ の各成分は $\mathcal{O}(R_3)$ において正則, $x = \infty$ において有理型である;
- (b) $\det T(x) \neq 0 \quad (x \in \mathcal{O}(R_3))$;
- (c) 変換 $u = T(x)y$ により (E_1) は (E_2) になる.

注意 2.3: $x = \infty$ が不確定特異点である場合には, (E_1) と (E_2) が形式的に同値であっても, 必ずしも有理型的に同値とは限らない.

主要問題: 形式的な同値関係による同値類のひとっを与え, それを有理型的な同値関係によって分類し, 各同値類の特徴付けを与える. このようにすれば, ストークス現象の果たす重要な役割りのひとっを明らかにすることができる.

3. 基本的な準備:

有限 N の角領域 $\mathcal{S}_j = \{x \in \mathbb{C}; a_j < \arg x < b_j\}$, $j = 1, \dots, N$, を固定する. $\{\mathcal{S}_j\}$ は下に述べる二つの条件を満足すると仮定する:

$$(\alpha) \quad 0 < b_j - a_j < \pi, \quad j = 1, \dots, N;$$

$$(\beta) \quad \bigcup_{j=1}^N \mathcal{S}_j = \mathbb{C} - \{0\}.$$

また、順序の付いた (j, k) に対して、 $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k$ を $\mathcal{S}_{jk}$ で表わす。

定義 3.1 : 下に述べる二つの条件を満足する有限個の n 次の行列の系 $\{F_{jk}(x)\}$ を $x = \infty$ における 漸近的な系 とよぶ :

$$(a) \quad F_{jk}(x) \in A(\mathcal{S}_{jk}(R)) \quad (\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset);$$

$$(b) \quad F_{jh}(x) F_{hk}(x) = F_{jk}(x) \quad (\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_h \cap \mathcal{S}_k \neq \emptyset).$$

定義 3.2 : 下に述べる二つの条件を満足する有限個の n 次の行列 $P_1(x), \dots, P_N(x)$ が存在する時に、漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ は $x = \infty$ で trivial であるという :

$$(a) \quad P_j(x) \in A(\mathcal{S}_j(R)), \quad j = 1, \dots, N;$$

$$(b) \quad F_{jk}(x) = P_j(x)^{-1} P_k(x) \quad (\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset).$$

定義 3.3 : 下に述べる二つの条件を満足する有限個の n 次の形式的な行列 $Q_1(x), \dots, Q_N(x)$ が存在する時に、漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ は $x = \infty$ で形式的に trivial

であるという：

$$(a) \det Q_j(x) \neq 0 \text{ (形式的なべき級数として),}$$

$$j = 1, \dots, N;$$

$$(b) A_{sp}(F_{jk}) = Q_j(x)^{-1} Q_k(x) \quad (\mathcal{L}_{jk} \neq \infty).$$

補題 3.4： 漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ が条件 $A_{sp}(F_{jk}) = I$ ($\mathcal{L}_{jk} \neq \infty$) を満足すれば、それは $x = \infty$ で trivial である。ここに、 I は n 次の恒等行列である。(渋谷 [3] の 172 頁の定理 6.4.1 を参照。)

定理 3.5： 漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ が $x = \infty$ で trivial であるための必要かつ充分な条件は、それが形式的に trivial なことである。

定義 3.6： 定義 3.2 の条件 (a) と (b) を満足する N 個の行列 $P_1(x), \dots, P_N(x)$ を漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ の $x = \infty$ における断面 とよぶ。

定理 3.7： 漸近的な系 $\{F_{jk}(x)\}$ が $x = \infty$ で trivial で、 $\{P_j(x)\}$ と $\{\tilde{P}_j(x)\}$ がそれの二つの断面である場合、下に述べる二つの条件を満足する n 次の行列 $T(x)$ が存在する：

- (a) $T(x)$ の各成分は $\mathcal{D}(R)$ において正則, $x = \infty$ において有理型である;
- (b) $\tilde{P}_j(x) = T(x)P_j(x) \quad (x \in \mathcal{S}_j(R)),$
 $j = 1, \dots, N.$

4. ストークス構造:

微分方程式の形式的な同値関係による同値類のひとっを $\mathcal{O}$ で表ゆり, $\mathcal{O}$ に属する微分方程式

$$(E_0) \quad \frac{dy}{dx} = A_0(x)y$$

を勝手にひとっ選らんで固定する. また, $\mathcal{O}$ に属する微分方程式を一般に

$$(E) \quad \frac{du}{dx} = A(x)u$$

で表ゆす.

定理 4.1: 与えられた $\mathcal{O}$ に対して, 下に述べる二つの条件を満足する有限々の角領域 $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$ が存在する:

(a) $\{\mathcal{S}_j\}$ は §3 で与えた条件 $(\alpha), (\beta)$ を満足する;

(b) $\mathcal{O}$ に属する微分方程式 (E) に対して, 下に述べる二つの条件を満足する n 次の行列 $P_1(x), \dots, P_N(x)$ が存在する:

$$(1) \quad P_j(x) \in A(\mathcal{S}_j(R)), \quad j = 1, \dots, N;$$

(2) 変換 $u = P_j(x)y$ は $\mathcal{S}_j(R)$ において (E_0) を (E) に変換する.

注意 4.2: $\{P_j\}$ と R は (E) に依存するが, $\{\mathcal{S}_j\}$ は $\mathcal{O}$ だけできる. 定理 4.1 はよく知られている福原-Turrittin の結果を有理べきが表われないように書き直したものである. これから先, $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$ を固定する.

微分方程式 (E_0) の角領域 $\mathcal{S}_j$ における基本解の行列 $\Phi_j(x)$ を勝手に選んで固定する.

定義 4.3: 有限個の n 次の定数行列の系 $\{C_{jk}\}$ が下に述べる四つの条件を満足する時に, それを ストークス系 とよぶ:

- (a) $C_{jk} \in GL(n; \mathbb{C})$ ($\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset$);
- (b) $C_{jh} C_{hk} = C_{jk}$ ($\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_h \cap \mathcal{S}_k \neq \emptyset$);
- (c) $\Phi_j(x) C_{jk} \Phi_k(x)^{-1} \in A(\mathcal{S}_{jk}(R))$ ($\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset$);
- (d) 漸近的な系 $\{\Phi_j(x) C_{jk} \Phi_k(x)^{-1}\}$ は $x = \infty$ で trivial である.

定義 4.4: 下に述べる三つの条件を満足する n 次の定数

行列 $C_1, \dots, C_N$ が存在する時に, ストークス系 $\{C_{jk}\}$ と $\{\tilde{C}_{jk}\}$ は同値であるという:

$$(a) \quad C_j \in GL(n; \mathbb{C}), \quad j = 1, \dots, N;$$

$$(b) \quad C_{jk} C_k = C_j \tilde{C}_{jk} \quad (\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset);$$

$$(c) \quad \Phi_j(x) C_j \Phi_j(x)^{-1} \in A(\mathcal{S}_j(R)), \quad j = 1, \dots, N.$$

定義 4.5: ストークス系の同値類 $\mathcal{C}$ を ストークス構造 とよぶ.

注意 4.6: 定義 4.3 と定義 4.5 では, 正確には $\mathcal{O}$ に付随したストークス系, $\mathcal{O}$ に付随したストークス構造 のように書かねばならないが, 簡略にするため, " $\mathcal{O}$ に付随した" をはぶいた.

補題 4.7: 定理 4.1 で与えた行列 $P_j(x)$ を使えば, $P_j(x) \Phi_j(x)$ は $\mathcal{S}_j$ における (E) の基本解の行列になる. したがって,

$$C_{jk} = (P_j \Phi_j)^{-1} (P_k \Phi_k) \in GL(n; \mathbb{C})$$

となり, しかも $\{C_{jk}\}$ はストークス系である. $(\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset)$ さらに, $\{C_{jk}\}$ が定めるストークス構造 $\mathcal{C}$ は $\{P_j(x)\}$ の逆らぬ

方によらない。

定義 4.8: 補題 4.7 で定められたストークス構造を $\mathcal{C}(E)$ で表わし、微分方程式 (E) のストークス構造 とよぶ。

5. 主要な結果:

定理 5.1: 勝手に与えられたストークス構造 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E)$ を満足する $\mathcal{O}$ の微分方程式 (E) が存在する。

定理 5.2: $\mathcal{O}$ の二つの微分方程式 (E_1) と (E_2) が有理型的に同値であるための必要かつ充分な条件は $\mathcal{C}(E_1) = \mathcal{C}(E_2)$ が成り立つことである。

定理 5.3: 勝手に与えられたストークス構造 $\mathcal{C}$ に対して,

$$(C) \quad A_{\text{sp}}(\Phi_j C_{jk} \Phi_k^{-1}) = I \quad (\mathcal{S}_{jk} \neq \emptyset)$$

を満足するストークス系 $\{C_{jk}\}$ が $\mathcal{C}$ に含まれている。

注意 5.4:

(1) 条件 (C) を満足する $\{C_{jk}\}$ をすべて求めて, それらを ストークス系の同値関係で分類すれば, すべての ストークス構造が求まる;

(2) ストークス構造の定義は $\{\mathcal{L}_j\}$, (E_0) , $\{\Phi_j\}$ の選らび方によるが, どのように選らんでも結果は "isomorphic" である;

(3) 特別な選らび方は, 例えば, G.D. Birkhoff [2] * W. Balser, W.B. Jurkat and D.A. Lutz [1] によって与えられている;

(4) この報告の内容は 近々 Bull. AMS に発表される予定である.

文献:

1. W. Balser, W.B. Jurkat and D.A. Lutz, Birkhoff invariants and Stokes' multipliers for meromorphic linear differential equations, Universität Ulm, 1976;
2. G.D. Birkhoff, The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q -difference equations,

Proc. Amer. Acad. Arts and Sci. 49 (1913), 531-568;

3. 渋谷 泰隆, 複素領域における線型常微分方程式一解
折接續の問題 —, 紀伊国屋, 1976.