

$u_t = \Delta u^m + g$ の解の support について

大阪大 理 D3 仙葉 隆 (Takasi Senba)

§1. 序. 本講演では, 空間次元が一次元の porous media 方程式

$$(E) \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} + g & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (m > 1) \\ u(\cdot, 0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

の解の support について考えたい。ここで g は compact な support をもつ $\mathbb{R}$ 上の正なる連続関数とする。最初にこの方程式の物理的な意味であるが, $g \equiv 0$ として初期値 $u(\cdot, 0)$ が $u_0 (\geq 0)$ なるときは, 多孔質媒体中の (初期分布が $u_0(\cdot)$ である) 気体の時刻 t での濃度の分布が $u(\cdot, t)$ である。それに対して上の方程式 (E) は外から単位時間ごとに, 場所 x に濃度 $g(x)$ の気体の流れこんでいる状況を考えている。もちろん, $x \in \mathbb{R}^3$ で考えるべき問題であるが, 実験的考察という意味で, 今回は, 空間一次元で考える。

上の様な方程式 (E) の解について, g が compact support を持てば, 各時刻ごとに $u(x, t)$ も compact support を持つ。

そのときの support の大きさを評価したいというのが、今回の目的である。

このような研究については、J.L. Vazquez が [1], [2] で

$$(E_0) \begin{cases} u_t = (u^m)_{xx} & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (m > 1) \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

について考えている。(E₀)について彼は、 $u(x, t)$ が $t \rightarrow +\infty$ なるとき、 $\bar{u}(\cdot, 0) = \delta_0(\cdot)$ なる (E₀) の解 $\bar{u}(x, t) = t^{\frac{1}{m+1}} (A - Bx^2 t^{\frac{2}{m+1}})_+^{\frac{1}{m-1}}$ (ただし A, B は m にのみ関係する定数) に近づくことを示した (support も含めて)。そこで彼は Shifting Comparison Principle [1, Lemma 2.1] なる新しい比較定理を用いて結果を得ている。今回はその比較定理を (E) の方程式に適応して主結果を導きたい。

主結果

$g \in C_0(R)$, $g \geq 0$, $\text{support } g = [-a, a]$ ($a > 0$) とするとき、(E) の解 $u(x, t)$ に対して

$$\text{supp } u(\cdot, t) = [\zeta_1(t), \zeta_2(t)] \quad (t > 0)$$

とかけて、 $\bar{\zeta} > 0$ が存在して

$$|\zeta_i(t) - (-1)^i \bar{\zeta} t^{\frac{m}{m+1}}| \leq 4a \quad (t > 0)$$

と書ける。

§ 2. 存在定理. 存在定理 1

任意の $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ に対して、次の様な解が、唯一存在する。 $T > 0$ に対して

$$\begin{cases} u \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty((0, T) \times \mathbb{R})) \\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \{ u g_t + (u)^m g_{xx} + g g \} dx dt = 0 \\ \quad \forall g \in C_0^\infty((0, T) \times \mathbb{R}) \\ u(\cdot, 0) = 0 \end{cases}$$

上の事実に対して、 $P. B\acute{e}nilan - H. Br\acute{e}zis - M. G. Crandall$ [3] と $I. Miyadera$ [4] により $L^1(\mathbb{R})$ 上の *Integral solution* の存在と一意性がわかり、 $H. Br\acute{e}zis - M. G. Crandall$ [5] と $M. Watanabe$ [6] により、*Integral solution* と上の解とが同値であることがわかる。

次に主結果を得るために次の解と比較する。

$$(\bar{E}) \begin{cases} \bar{u}_t = (\bar{u})^m_{xx} + \delta_0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ \bar{u}(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

$(\bar{E})$ の解を、正当化するために、 $(\bar{E})$ を次の様な空間で考える。 $\forall \ell > 0$ に対して

$$D(\Delta_\ell) \equiv \{ w \in C_0[-\ell, \ell] \cap C^1[-\ell, \ell], w_{xx} \in C_0[-\ell, \ell] \}$$

$$\Delta_\ell v \equiv v_{xx} \quad \forall v \in D(\Delta_\ell)$$

とするとき、 Δ_ℓ^* と $(C_0[-\ell, \ell])$ 上の作用素 Δ_ℓ の共役作用素 (従って Δ_ℓ^* は $C_0^*[-\ell, \ell]$ 上の作用素) とするとき

$$D(A_\ell) \equiv \{w \in L^1(-\ell, \ell) ; w^m \in D(\Delta_\ell^*)\}$$

$$A_\ell v \equiv \Delta_\ell^* v \quad \forall v \in D(A_\ell)$$

とする。そのとき

存在定理 2.

$A_\ell + \delta_0$ は $C_0^*[-\ell, \ell]$ 上での accretive 作用素となり.

$$R(I - \lambda(A_\ell + \delta_0)) \supset \overline{D(A_\ell)} = L^1(-\ell, \ell)$$

となる。従って $C_0^*[-\ell, \ell]$ 上 $\forall T > 0$ に対して

$$\begin{cases} du/dt = A_\ell u + \delta_0 & t \in [0, T] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

なる Integral solution が 唯一存在する。

定理の前半は Y. Kōmura - Y. Konisi [7. 第4章]. 後半は I. Miyadera [4] か Y. Kōmura - Y. Konisi [7. 第3章] を適用することにより示される。そして、存在定理 2 で得られた解を (E) の解と呼ぶことにする。

§ 3. 比較定理. 次に (E) の解が compact support を持つこと、及び、その support を評価するために比較定理を用意する。次の定理は J. L. Vazquez [1. Lemma 2.1] で示された。

比較定理 1 (Elliptic Version)

$$\beta(x) = |x|^{\frac{1}{m}} \quad (|x|^{\frac{1}{m}} \text{sign } x \text{ の意味}) \quad f_i \in L^1(R) \quad (i=1, 2)$$

そして u_i を $-u_i'' + \beta(u_i) = f_i$ の解で $u_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$

そのとき

$$\int_{-\infty}^x f_1(y) dy \leq \int_{-\infty}^x f_2(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ならば

$$\int_{-\infty}^x \beta(u_1(y)) dy \leq \int_{-\infty}^x \beta(u_2(y)) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

をみたす。

この比較定理と (E.) の解は

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} (I - \lambda \frac{d^2}{dx^2}(\cdot)^m)^{-[\frac{t}{\lambda}]} u_0 \quad \text{in } L^1(\mathbb{R})$$

なる形で得られることを利用し、比較定理 1 の f_i のかわりに (E.) の初期値に対応させ、 $\beta(u_i)$ のかわりに初期値に対応する解に対応させた形の、比較定理 (parabolic version) を [1. Lemma 2.2] で示している。そこで (E) の解も

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} (I - \lambda (\frac{d^2}{dx^2}(\cdot)^m + g))^{-[\frac{t}{\lambda}]} 0$$

なる形で得られるから [1. Lemma 2.2] と同様にして次の比較定理を得る。

比較定理 2

$g_i \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ ($i=1,2$) とし、 u_i ($i=1,2$) を g_i に対応する (E) の解とする。そのとき

$$\int_{-\infty}^x g_1(y) dy \leq \int_{-\infty}^x g_2(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ならば

$$\int_{-\infty}^x u_1(y, t) dy \leq \int_{-\infty}^x u_2(y, t) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

をみたす。

§ 4 収束定理. (E)と(E)では考えている空間と領域がちがう. それを結びつけるものとして. 次の収束定理が. 必要となってくる.

収束定理 (I. Miyadera [4. 系 6.9])

$A, \{A^{(n)}\}_{n \geq 1}$ は X 上の accretive 作用素. ここで X は Banach 空間. さらに $\forall \lambda > 0$ に対し

$$R(I - \lambda A^{(n)}) \supset \overline{D(A^{(n)})} \quad (\forall n \geq 1)$$

$$R(I - \lambda A) \supset \overline{D(A)}, \quad \overline{D(A^{(n)})} \supset \overline{D(A)} \quad (\forall n \geq 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I - \lambda A^{(n)})^{-1} x = (I - \lambda A)^{-1} x \quad (\forall \lambda > 0, x \in \overline{D(A)})$$

ならば $A^{(n)}, A$ から生成される半群 $T_n(t), T(t)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(t) x = T(t) x \quad \forall x \in \overline{D(A)}, \forall t \geq 0$$

上の定理を (E), (E) に適用するために. 次のことを示す.

補題 4.1.

$\forall l > 1$ に対して $f_n \in C_0[-l, l]$. $\text{supp } f_n \subset [-1, 1]$ (超関数 (distribution) の意味での support) $\forall n \geq 1$

$$f_n \xrightarrow{w^*} \delta_0 \text{ in } C_0^*[-l, l] \text{ (汎弱位相で収束)}$$

ならば

$$(I - \lambda(A_\ell + h_n))^{-1}v \rightarrow (I - \lambda(A_\ell + \delta_0))^{-1}v$$

as $n \rightarrow \infty \quad \forall v \in \overline{D(A_\ell)} = L^1(-\ell, \ell) \quad \forall \lambda > 0$

ここで $L^1(-\ell, \ell)$ は $C_0^*[-\ell, \ell]$ の閉部分空間であり
 $(I - \lambda(A_\ell + h_n))^{-1}v, (I - \lambda(A_\ell + \delta_0))^{-1}v \in L^1(-\ell, \ell)$ だか
 ら上の収束は $L^1(-\ell, \ell)$ での収束でもある。

$\forall n \geq 1, \forall \lambda > 0$ に対して $w_n = (I - \lambda(A_\ell + h_n))^{-1}v$
 とおく。 $\mathcal{G}(x, y) \in$

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} (y+\ell)(x-\ell) & , -\ell \leq y \leq x \leq \ell \\ (x+\ell)(y-\ell) & , -\ell \leq x \leq y \leq \ell \end{cases}$$

とおく。さらに w_n は $C_0^*[-\ell, \ell]$ の中で有界だから部分列
 $\{n'\}$ が存在して

$$w_{n'} \xrightarrow{w^*} \tilde{w} \quad \text{in } C_0^*[-\ell, \ell]$$

さらに

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} \{w_n(y) - \lambda(A_\ell w_n)(y)\} \mathcal{G}(x, y) dy \\ = \int_{-\ell}^{\ell} \{v(y) + \lambda h_n(y)\} \mathcal{G}(x, y) dy \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} w_{n'}(y) dy - \lambda(w_{n'}(x))^m \\ = \int_{-\ell}^{\ell} \{v(y) + \lambda h_{n'}(y)\} \mathcal{G}(x, y) dy \end{aligned}$$

ここで $n' \rightarrow \infty$ とすると $\forall x \in (-\ell, \ell)$ に対して

$$w_{n'}(x) \rightarrow \tilde{w}(x)$$

一方 $\sup \{ \|w_n\|_{C_0^*}; n \geq 1 \}, \sup \{ \|h_n\|_{C_0^*}; n \geq 1 \} \leq {}^\exists C$
 より $\sup \{ |\tilde{w}(x)|; x \in (-l, l) \} \leq {}^\exists \tilde{C}$.

従って, Lebesgue の収束定理より $w_n \rightarrow \tilde{w}$ in $L'(-l, l)$
 ゆえに $\tilde{w} = \tilde{w}$ として

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \tilde{w}(y) g(x, y) dy - \lambda (\tilde{w}(x))^m \\ = \int_{-l}^l \{ v(y) + \lambda \delta_0(y) \} g(x, y) dy \end{aligned}$$

なることより $\tilde{w} = (I - \lambda(A_l + \delta_0))^{-1}v$. 左の解は一意的だから $w_n \rightarrow (I - \lambda(A_l + \delta_0))^{-1}v$ in $L'(-l, l)$. 従って, 補題が言えた。

従って, 収束定理における $A^{(n)} \in A_l + h_n$, $A \in A_l + \delta_0$, $X = C_0^*[-l, l]$, としてやると $\bar{u}_n \in$

$$(E_n) \begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{u}_n = A_l \bar{u}_n + h_n \\ \bar{u}_n(0) = 0 \end{cases}$$

の Integral solution としたとき $\forall t \geq 0$ に対して

$\bar{u}_n(\cdot, t) \rightarrow \bar{u}(\cdot, t)$ in $L'(-l, l)$ as $n \rightarrow \infty$
 が言えた。

§ 5. support の評価. 前の Section で定義した $\bar{u}_n$ に対して, $\forall T > 0$ に対して $l > 1$ と十分大きくとれば, 存在定理 1 の解 (g のかわりに h_n とする) と $0 \leq t \leq T$ なるとき

一到することと言いたい。このことが言えれば u と $\bar{u}_n$ とを $L^1(-l, l)$ 上で比較したのち $C_0^*[-l, l]$ 上で収束させることにより (E) と (E) の解と比較することができる。

$g \geq 0, g \in C_0(\mathbb{R})$ なるとき (E) の解が compact support を持つこと。 今 $\max\{g(x); x \in \mathbb{R}\} \leq C_*/2$ とする。 C_* は下で定義する。さらに $\text{supp } g = [-a, a]$ とおく。

今 $\forall T > 0$ を固定する。さらに

$$v(x, t) = \alpha t^{\frac{1}{m+1}} (1 - \beta |x| t^{-\frac{m}{m+1}})_+^{\frac{1}{m-1}}$$

$$\text{ただし } \alpha^{m-1} \beta^2 = \frac{m-1}{m(m+1)}, \quad \alpha^m \beta = \frac{1}{2m(m-1)}, \quad \alpha, \beta > 0$$

とすると distribution の意味で、次の方程式をみたす。

$$v_t = (v^m)_{xx} + S_0 + F, \quad v(\cdot, 0) = 0$$

$$\text{ただし } F(x, t) = \beta \frac{|x|}{t^{\frac{m}{m+1}}} \left(1 - \beta \frac{|x|}{t^{\frac{m}{m+1}}}\right)_+^{\frac{2-m}{m-1}}$$

である。今

$$F(x, t) \geq \min \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2-m}{m-1}}, \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2-m}{m-1}} \right\} \equiv C_*$$

$$\text{ただし } \frac{1}{4} \leq \beta \frac{|x|}{t^{\frac{m}{m+1}}} \leq \frac{3}{4}$$

従って x_0 を

$$(4\beta x_0)^{\frac{m+1}{m}} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right) \geq T+1$$

$$\text{とし、 } l = \beta^{-1} (T+1 + (4\beta x_0)^{\frac{m+1}{m}}) \text{ とおき}$$

$$\begin{cases} \hat{u}_t = (\hat{u})_{xx}^m + g(\cdot - x_0) \chi_{[\frac{4}{3}\beta x_0)^{\frac{m+1}{m}}, \infty)}(t) \\ \hat{u}(\cdot, 0) = 0 \end{cases}$$

を $C_0^*[-l, l]$ 上で考えると, *distribution* の意味で

$0 \leq \hat{u}(x, t) \leq v(x, t) \quad (x, t) \in (-l, l) \times (0, T+1 + (\frac{4}{3}\beta x_0)^{\frac{m+1}{m}})$ となる。これは Y. Komura - Y. Konisi [7, 第4章] の中で述べられている。半群の順序保存を示す方法と同様にして, 上の方程式の解に関する各点での比較定理を示すことができる。従って $\tilde{u}(x, t) = \hat{u}(x+x_0, t - (\frac{4}{3}\beta x_0)^{\frac{m+1}{m}})$ とおくと, $\tilde{u}$ は $t \in [0, T]$ なるとき $C_0^*[-l-x_0, l+x_0]$ 上の *compact support* をもつ関数となるから, $\tilde{u}$ は $[0, T]$ 上 (E) の解 u と一致する。

(E) と (Ē). それぞれの解の support の比較

$h_n \in C_0(\mathbb{R}), \text{ supp } h_n \subset [-a, a] \quad (\forall n \geq 1), h_n \geq 0$ と

$h_n \xrightarrow{w^*} \delta_0, \|g\|_L \in C_0^*[-l, l]$ とし, $\forall n \geq 1$ に対して $\|h_n\|_L = \|g\|_L$

$$(E_n) \begin{cases} u_t^{(n)} = (u^{(n)})_{xx}^m + h_n & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u^{(n)}(\cdot, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

なる $L^1(\mathbb{R})$ 上の解を $u^{(n)}$ と書く。そのとき

$$\int_{-\infty}^x h_1(y-2a) dy \leq \int_{-\infty}^x h_n(y) dy \leq \int_{-\infty}^x h_1(y+2a) dy$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

が成立するから, 比較定理2より

$$\int_{-\infty}^x u^{(n)}(y-2a, t) dy \leq \int_{-\infty}^x u^{(n)}(y, t) dy \leq \int_{-\infty}^x u^{(n)}(y+2a, t) dy$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, \forall t \geq 0$. さらに

$$\int_{\mathbb{R}} u^{(n)}(y, t) dy = \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot t \quad \forall n \geq 1, \forall t \geq 0$$

従って $\forall n \geq 1, \forall t \geq 0$ に対して

$$\text{supp } u^{(n)}(\cdot, t) \subset (\text{supp } u^{(n)}(\cdot + 2a, t))' \cup (\text{supp } u^{(n)}(\cdot - 2a, t))$$

ゆえに $\forall T > 0$ に対して $\exists \ell = \ell(T) > 0$ を十分大きくと

れば $\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{t \in [0, T]} \text{supp } u^{(n)}(\cdot, t) \subset [-\ell, \ell]$ となる。

そこで $C_0^*[-\ell-2a, \ell+2a]$ 上で考えたときの解 $\bar{u}_n(x, t)$

(Section 4) と $u^{(n)}$ は $t \in [0, T]$ に対して一列する。従って

収束定理より $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\int_{-\ell-2a}^x \bar{u}(y-2a, t) dy \leq \int_{-\ell-2a}^x u(y, t) dy \leq \int_{-\ell-2a}^x \bar{u}(y+2a, t) dy$$

$\forall x \in [-\ell-2a, \ell+2a], \forall t \geq 0$ が成立し。

$$\begin{aligned} \int_{-\ell-2a}^{\ell+2a} \bar{u}(y \pm 2a, t) dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\ell-2a}^{\ell+2a} \bar{u}_n(y \pm 2a, t) dy \\ &= \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot t \end{aligned}$$

従って

$$\text{supp } \bar{u}(\cdot, t) = [-\bar{\zeta}(t), \bar{\zeta}(t)] \quad T \geq \forall t \geq 0$$

$$\text{supp } u(\cdot, t) = [\zeta_1(t), \zeta_2(t)] \quad T \geq \forall t \geq 0$$

とかくと、

$$-\bar{\zeta}(t) - 2a \leq \zeta_1(t) \leq -\bar{\zeta}(t) + 2a$$

$$\bar{\zeta}(t) - 2a \leq \zeta_2(t) \leq \bar{\zeta}(t) + 2a$$

$0 \leq t \leq T$ となる。ここで $\ell > 0$ と $\bar{u}, u$ が compact

support を $(-l-2a, l+2a)$ の中で持つ様にと、てやれば、

$\bar{u}, u$ と l によらない。従って $\forall t \geq 0$ に対して

$$|\bar{z}_i(t) - (-1)^i \bar{z}(t)| \leq 4a$$

が成立する。

最後に、 $\bar{z}(t) = \bar{z}(1) t^{\frac{m}{m+1}}$ なること を示せば、主結果が言えたことになる。このことは、簡単な変数変換により示すことができる。 $\forall a, b, c > 0$ に対して

$$v(y, s) = a \bar{u}(by, cs) \quad \text{とおくと}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}(y, s) = \frac{c}{a^{m-1} b^2} \frac{\partial^2 v^m}{\partial y^2}(y, s) + \frac{ac}{b} \delta_0(y)$$

をみたす。そこで

$$\frac{c}{a^{m-1} b^2} = \frac{ac}{b} = 1$$

とくと、 $b = c^{\frac{m}{m+1}}$ となる。 $\forall T > 0$ に対して $l = l(T) > 0$ を十分大きくとると $v(x, t) = \bar{u}(x, t) \quad \forall t \in [0, T]$

in $C_0^*[-l, l]$ 従って

$$\text{supp } \bar{u}(\cdot, t) = \text{supp } v(\cdot, t) \quad \text{となり}$$

$$[-\bar{z}(t), \bar{z}(t)] = [-b^{-1} \bar{z}(ct), b^{-1} \bar{z}(ct)]$$

$$\text{ゆえに } \bar{z}(ct) = c^{\frac{m}{m+1}} \bar{z}(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

ここで l を十分大きくとれば、 $\bar{u}, v$ は l に無関係だから

ら $\bar{\zeta}(t) = \bar{\zeta}(1) t^{\frac{m}{m+1}}$ ($t \geq 0$) が成立する。従って $\bar{\zeta}$ と $\bar{\zeta}(1)$ ととれば、主結果が言えたことになる。

以上

参考文献

- [1] J. L. Vazquez, Asymptotic behaviour and propagation properties of the one-dimensional flow of gas in a porous medium, Trans. Amer. Math. Soc. 277 ('83), 507-527.
- [2] J. L. Vazquez, Behaviour of the velocity of one-dimensional flows in porous media, Trans. Amer. Math. Soc. 286 ('84) 787-802.
- [3] P. Bénilan - M. G. Crandall - H. Brézis, A semilinear Equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 2 ('75), 523-555.
- [4] 宮寺 功, 非線形半群, 紀伊国屋書店, '77.
- [5] H. Brézis - M. G. Crandall, Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta \Phi(u) = 0$, J. Math. Pures et Appl. 58 ('79), 153-163.
- [6] M. Watanabe, Solutions with compact support of the porous medium equation in arbitrary dimension, (to appear).

[7]小西芳雄 高村 幸男, 非線型発展方程式, 岩波講座基礎数学, '77.