

表現の持ちあげについて

新谷 卓郎

いま $\mathfrak{o}$ を局所体, K を $\mathfrak{o}$ のガロワ
 拡大で $\mathfrak{o}$ を K の $\mathfrak{o}$ に関するガロワ
 ワ群とする。さらに G を $\mathfrak{o}$ 上定義
 された線形代数群とし, $G_{\mathfrak{o}}, G_K$ で
 それぞれ G の $\mathfrak{o}$ -有-理点, K 有理点
 の全体のなす群とする。このとき
 $\mathfrak{o}$ は自然に G_K に自己同形とし
 て作用する。 $\mathfrak{o}$ の作用によつて不
 変な点の全体は $G_{\mathfrak{o}}$ にほかならな
 い。局所コンパクト群 $G_{\mathfrak{o}}$, G_K の
 既約ユニタリ表現の同値類の集
 合を $\hat{G}_{\mathfrak{o}}, \hat{G}_K$ とかけば, $\mathfrak{o}$ は $\hat{G}_K$ に
 自然に作用する。実際 $\rho \in \hat{G}_K$, $\sigma \in \mathfrak{o}$
 について $\rho^\sigma \in \hat{G}_K$ を $\rho^\sigma(\mathfrak{g}) = \rho(\mathfrak{g}^\sigma)$
 と定義すれば, $\rho \longmapsto \rho^\sigma$ は $\mathfrak{o}$ の
 $\hat{G}_K$ への作用である。以下 $\mathfrak{o}$ の作
 用で不変な $\hat{G}_K$ の元の全体を $\hat{G}_K^{\mathfrak{o}}$
 とかく。以下次の問題を考える。

問題 (L) 二つの集合 $\widehat{G_k}$ と $\widehat{G_k}^{\text{q}}$ とのあいだには、なにか自然な関係は存在しないか？

実際に $\widehat{G_k}$ と $\widehat{G_k}^{\text{q}}$ との間には自然な対応が存在するとき、 $\pi \in \widehat{G_k}$ に対応する $\Pi \in \widehat{G_k}^{\text{q}}$ を、 G_k の既約ユニタリ表現 π の、 G_k の q -不変な既約ユニタリ表現 Π への「持ちあげ」(lifting) とよぶことにしたい。

これだけではきわめてばくぜんとしこいる。以下いくつかの、 $\widehat{G_k}$ と $\widehat{G_k}^{\text{q}}$ とのあいだに自然な関係の存在する例をあげる。

例 1. (i) k を標数 0 の局所体、 K をその巡回拡大体とし、 G を体の零ならざる元をなす乗法群とする。このとき $G_k = k^\times$ 、 $G_K = K^\times$ で、 $\widehat{G_k}$ 、 $\widehat{G_K}$ はそれぞれ、 $k^\times$ 、 $K^\times$

の局所コンパクトアーベル群としての指標群と同一視される。

いま $\chi \in \widehat{G}_k$ について $\tilde{\chi} \in \widehat{G}_K$ を

$$\tilde{\chi}(x) = \chi(N_{K/k}(x))$$

と定義する。ここに $N_{K/k}$ は K から k へのノルムを意味する。明らか

かに $\tilde{\chi}(\chi^\sigma) = \tilde{\chi}(\chi)$ ($\forall \sigma \in \text{Gal}(K/k)$)

であるから $\tilde{\chi} \in \widehat{G}_K^{\text{Gal}}$ 。逆に勝手

に $\tilde{\chi} \in \widehat{G}_K^{\text{Gal}}$ をとるとき、“ヒルベルト定理

90”によつて適当な $\chi \in \widehat{G}_k$ をとれば、

$\tilde{\chi} = \chi \circ N_{K/k}$ が成立する。ただし χ

は $\tilde{\chi}$ によつて一意的には定まらない。

実際 $N_{K/k}(K^\times)$ は $k^\times$ の、index が $[K, k]$ に等しい、部分群である

から χ_0 を、 $N_{K/k}(K^\times)$ を零化する $k^\times$

の指標とすれば、 $\tilde{\chi} = (\chi_0 \chi) \circ N_{K/k}$

である。この例においては、写

像: $\chi \mapsto \chi \circ N_{K/k}$ を $k^\times$ の指標 χ

の $K^\times$ の Gal 不変な指標への“もち

あげ”とよぶことは自然であらう。

う。

(ii) $\mathfrak{A}$, K は (i) と同様として,
 G を体の加法群とする。このとき
 $G_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, $G_K = K$ で, $\hat{G}_{\mathfrak{A}}$, $\hat{G}_K$ はど
 れぞれ $\mathfrak{A}$, K の ^{写像:} 加法的指標群で
 ある。このとき $\chi \in \hat{G}_{\mathfrak{A}} \mapsto \chi|_K \in \hat{G}_K$
 $\in \hat{G}_K^{\sigma}$ は $\hat{G}_{\mathfrak{A}}$ より $\hat{G}_K^{\sigma}$ への自然な
 1対1対応を与える, こゝに $\chi|_K$
 は, K から $\mathfrak{A}$ への跡である。

例 2. いま $\mathfrak{A}$ を $\mathbb{F}$ 個の元からなる
 有限体とし K を $\mathfrak{A}$ の m 次の拡大
 体とする。このとき σ は "フロベ
 ニウス置換": $\alpha \mapsto \alpha^{\mathbb{F}} = \alpha^{\sigma}$ によつて生
 成される位数 m の巡回群とな
 る。 $G = GL_n$, $G_{\mathfrak{A}} = GL_n(\mathfrak{A})$, $G_K = GL_n(K)$
 としよう。 $R \in \hat{G}_K^{\sigma}$ とすれば, R^{σ}
 は R と同値な既約表現である
 から表現空間の非退化線型変換
 I_{σ} で, $R^{\sigma}(\alpha) = R(\alpha^{\sigma}) = (I_{\sigma})^{-1} R(\alpha) I_{\sigma}$
 ($\forall \alpha \in G_K$) なるものが存在する。
 線型変換 I_{σ} は定数倍を除く

て一意的に定まり、 I_σ^m はスカラーである。以下 I_σ は、 $I_\sigma^m = 1$ なる条件を満足するように正規化されているとする (I_σ はなお 1 の m 乗根倍の任意性をもつ)。

いま $x \in G_K$ について $N_{K/k}(x)$ を

$$N_{K/k}(x) = x^{\sigma^{m-1}} x^{\sigma^{m-2}} \cdots x^{\sigma} x$$

と定義する。一般に $N_{K/k}(x)$ は、 G_k の元ではないが、 G_k の元に G_K 内で共役である。以下 $N_{K/k}(x)$ で、 $N_{K/k}(x)$ と G_K 内で共役な元を含む G_k の共役類をも意味することとする。このとき次の結果が成立する。

定理 任意の $R \in \widehat{G_K}$ について、 G_k の既約指標 χ_R が一意的に存在して、等式

$$\text{trace } I_\sigma R(x) = \pm \chi_R(N_{K/k}(x)) \quad (\forall x \in G_K)$$

が成立する、(ここに $\pm$ は 1 の m 乗根で、 $\pm$ は I_σ のとり方により)

依存し, π には依存しない) さらに写像 $R \mapsto \chi_R$ は集合 $\hat{G}_K$ から G_K の既約指標の集合 (すなわち $\hat{G}_K$) への bijection を与える。

この例において, $\pi \in \hat{G}_K$ についてその“そちあげ”を χ_R が π の指標と一致する $R \in \hat{G}_K$ であると定義するのは自然であろう。 K に対してに関する拡大次数 m が n の倍数であるときは, G_K の“離散系列”に属する既約表現のそちあげがすべて G_K の“連続系列”に入ることは興味深い。くわしくは筆者の論文 “Two remarks on irreducible characters of finite linear groups, J. Math. Soc. Japan vol. 28 (1976) p. 396 - 414” を参照して、下さい。

例 3. $n = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$, $G = GL_2$
 このとき, φ は複素共役の生成

する位数2の巡回群であり, $G_R = GL(2, \mathbb{R})$, $G_K = GL(2, \mathbb{C})$ である。 $R \in \widehat{G_K}^{\text{af}}$ について I_0 を前例と同様に定義する。次の補題が成立する。

Lemma $\forall f \in C_0^\infty(G_K)$ について

$$\int_{G_K} f(x) I_0 R(x) dx \text{ なる } (R \text{ の表現空間の})$$

線形作用素は跡をもつ。そして G_K 上の局所可積分函数 $\text{tr } I_0 R(x)$ が存在して等式

$$\text{tr} \int_{G_K} f(x) I_0 R(x) dx = \int_{G_K} f(x) \{ \text{tr } I_0 R(x) \} dx$$

が成立する (dx は G_K の不変測度)。

定理 任意の $R \in \widehat{G_K}$ について $r \in \widehat{G_R}$ が (一般には4とあり) 存在して, 等式

$$\text{tr } I_0 R(x) = (\pm 1) \text{tr } r(N_{K/\mathbb{R}}(x)) \quad (\forall x \in G_K)$$

が成立する。 I_0 を適当にとれば,

(±1) はとりさ、てよい。

逆に任、意の $r \in \hat{G}_k$ について、上記定理の等式によ、て r と結びれた $R \in \hat{G}_K^{\text{gr}}$ が唯一、つ存在する。したが、てこの場合にも $r \in \hat{G}_k$ の“もちあげ”を自然に定義することが出来る。

例4 k を標数0の非連結局所体とし、(k の剰余類体の標数は2でないとする)、 K をその素数次の巡回拡大とし、 $G = GL_2$ とする。この場合にも例3と同様の事実が成立する。

“表現のもちあげ”は、土井一長沼 - 斎藤(裕) 諸氏による“保形型式のもちあげ”の理論を表現論的に解釈するとき役割を演じる。それについては 数学第28

卷春季号「記録」の中の筆者の記事を参照して下さい。

(三ノ二)