

Complete Matching のとれる確率

- パズルの複雑さについて -

京大 情報工学 矢島 脩三

§1. はじめに

n 件の仕事があって, n 人が, 1人1件, いずれかの仕事を受け持たされ, n 件の仕事をすべて処理しようとする。ただし, 各人には, 希望する仕事と, 希望しない仕事の区別がある。すべての人の希望を満たすように各人に仕事を割り当てる問題は, personal assignment problem, グラフでは bipartite graph の complete matching として知られている。この問題は, また, $n \times n$ の将棋盤上に, n 個の飛車を互いに捕らえないように置く montaking rooks の問題としても知られている [1]。

ここでは, この問題を別の観点より眺める。各人に対し, 独立に, 優先順位をつけず, 希望する仕事を k 個, 重複なしに, 1かき, 各々等確率にランダムに出させて, 各人に仕事を assign するものと12, それが可能となる, すなわち, complete matching のとれる確率 P_n^k を求める。

つまり、各人とも、志望にどのくらいの幅があれば（心のゆとりがあれば、志望をどのくらい出させれば）troubleなしに assignment が可能になるかを評価しようというのである。

これは、また、飛車の場合、飛車を置く候補地を、各飛車につき、それぞれ独立に k 個ランダムに定め、その候補地の中に、種々、飛車を置いてみた non-taking rook が作れるかどうかを調べ、各 k に対する non-taking rook の作れる確率 P_n^k を求めようということである。

当然、 $P_n^{k=0} = 0 \leq P_n^k \quad (k=0, \dots, n) \leq P_n^{k=n} = 1$ であり、 k はゲームやパズルでいうと、どのくらいの範囲で打っ手を採るかに対応するわけで、 $P_n^k \approx \frac{1}{2}$ となる $k; n$ をもって、この問題の難易度または“複雑さ”と定義する。他の種々のゲームやパズルにおいても、複雑さにつき類似の定義ができるであろう。

この問題は、学生の研究室志望分属、学生実験テーマの選択に関連して気付いた問題であり、研究室の大学院生にクイズとして出題していた。しかし、まだ、この解は、ほんの一部しか求まっておらず、計算も進行していったのであるが、本研究会に、この問題が紹介されたとの事であり、とりあえず、現在までに得られた結果を報告する。

希望数 $k = 0, 1, n-1, n$ は trivial であるが, あとは意外に難しく, $k=2$ は謝によって [2], $k=n-2$ は独立に, 謝 および 著者によって計算された。

著者は, この P_m^k が, n が大きくなると, ある k/n の近傍において, 急激に変化するという予測を立てており, その検証が, このタイプの問題の興味の中にある。

§ 2. $P_m^{k=1}$, $P_m^{k=n-1}$ について

$P_m^{k=1}$ は, 各人が, それぞれ 1 希望を出す。そのあらゆる場合の数は n^n , complete matching の与えられるのは, それだが, permutation になっている場合の数 $n!$ である。よって,

$$P_m^{k=1} = \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$P_m^{k=n-1}$ は, $n-1$ 個の仕事と希望するところのを, 逆に, 1 個の仕事と拒否すると考える。ある 1 個の仕事が, みんなにそろって拒否された場合, その場合のみ complete matching は不能であるから,

$$P_m^{k=n-1} = \frac{n^n - n}{n^n} \quad (2)$$

§3. $P_n^{k=2}$ について [2]

各人より提出された志望をもって, はたして complete matching がとれるかどうかの判定に, P. Hall の定理 [3] を用いる. この定理を, 本問題の場合に書きなおして示す.

[定理] n 人の各々が志望する k 個の仕事よりなる集合を S_i ($i=1, \dots, n$) とし, $S = \{S_i \mid i=1, \dots, n\}$ とする. 各 S_i より, それぞれ異なった一つの仕事 (distinct representative) を取り出せるための (すなわち, complete matching がとれるための), 必要十分条件は, 各 $\lambda = k+1, k+2, \dots, n$ につき, 任意に λ 個の互いに異なるインデックス $i_1, i_2, \dots, i_\lambda \in \{1, \dots, n\}$ を定め $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_\lambda} \in S$ を取り出したとき, それらの中に少なくとも λ 個の異なる仕事が含まれていることである.

謝 [2] は, これを基に $P_n^{k=2}$ を求めようとしているが, 相当複雑な式になっている. ここでは, 謝の示した $P_n^{k=2}$ の比較的よい上限 $\hat{P}_n^{k=2}$ を示す.

$$\hat{P}_n^{k=2} = \frac{n!}{2!} \left(\frac{2}{n} \right)^n \quad (3)$$

§4. $P_n^{k=n-2}$ について

$n-2$ 個の希望のかわりに, 2 個の拒否を出してもらい, complete matching のとれな…確率 $R_n^{l=2} = 1 - P_n^{k=n-2}$ を求める。前節の P. Hall の定理の逆, すなわち, complete matching のとれな…場合を述べると,

[定理] n 人の各々が拒否する l 個 ($l = n - k$) の仕事よりなる集合を V_i ($i = 1, \dots, n$) とし, $V = \{V_i \mid i = 1, \dots, n\}$ とする。complete matching のとれな…ための必要十分条件は, 各 $\lambda = n - l + 1 (= k + 1), \dots, n - 1, n$ につき, 任意に λ 個の互いに異なるインデックス $i_1, i_2, \dots, i_\lambda \in \{1, \dots, n\}$ を定め $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_\lambda} \in V$ を取り出したとき, どの V_{i_j} ($j = 1, \dots, \lambda$) にも共通に, 少なくとも $n - \lambda + 1$ 個, 同じ仕事を含んでいる (各人が共に拒否している) ことである。

$l=2$ の場合, $\lambda = n, n-1$ であり, $\lambda = n$ のとき, すべての人に 1 個…2 個共通に拒否される場合, $\lambda = n-1$ のとき, 2 個共通に拒否される場合を計算する。結果を示す。

$$1 - P_n^{k=n-2} = R_n^{l=2} = \frac{2^n}{n^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot \binom{n}{2}^{n-1}} (n^3 - 5n^2 + 6n - 2) \quad n \geq 3 \quad (4)$$

§5. $(k/n, P_m^k)$ のグラフ

$m = 2, 3, \dots, 6$ までにつき, 横軸を k/n ($\stackrel{\text{def.}}{=} \alpha$), 縦軸を P_m^k にとり, m をパラメータにして, 各点を適当になめらかに接続すると下図のようなグラフとなる。 m が増加するに従って, $P_m^k = \frac{1}{2}$ となる k 自身は増加するが, k/n は減少している。

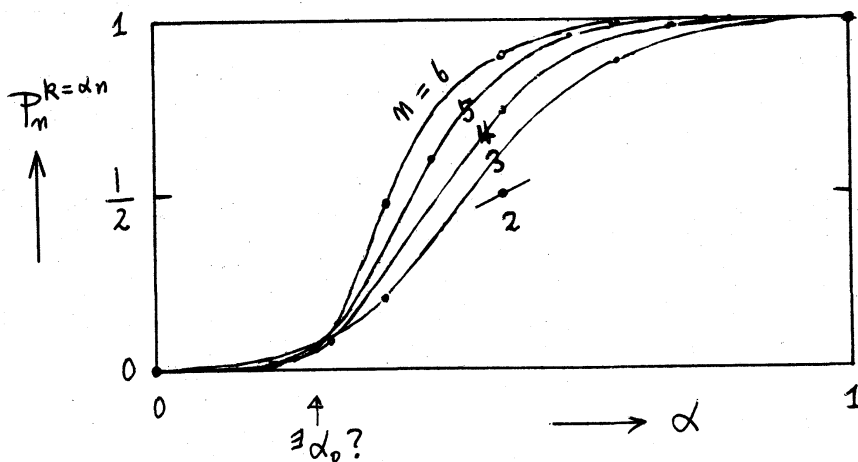
[Conjecture] つぎの α_0 (臨界値) が存在する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_m^{k=\alpha n} = \begin{cases} 0 & \alpha < \alpha_0 \\ 1 & \alpha > \alpha_0 \end{cases}$$

$P_m^k = \frac{1}{2}$ を与える $\alpha \in \alpha_{\frac{1}{2}}(m)$ とすると,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{\frac{1}{2}}(m) = \alpha_0$$

このような臨界値 α_0 の存在するパズルのクラスは, $\alpha_0 \in$ によって, このクラスのパズルの複雑さと定義する。



§ 6. おわりに

$P_m^{k=n-3}$ は, 著者と謝の結果が一致しておらず報告できなかった。その他の P_m^k は, まだ求まっていない。式の形でなく, Algorithm の形で求め, あと, 計算機にたよることになるかもしれない。

ここで紹介した単純な問題でも, その複雑さを求める計算は極めて困難なようであり, simulation で, その概略値を求めるのも, この問題を調べる一手段であろう。

参考文献

- [1] C. L. Liu : Introduction to Combinatorial Mathematics ,
McGraw - Hill Book Co., 1968
- [2] 謝 章文 : ある Simple Graph の Matching のとれる確率 ,
電子通信学会 回路とシステム理論研究会資料 1970年1月24日
- [3] Philip Hall : On Representatives of subsets ,
J. London Math. Soc., 10 (1935), 26-30
または, Marshall Hall, Jr. : Combinatorial Theory,
Blaisdell Pub. Co., 1967 p. 44