

大学における数学史教育の体験

立教池袋中・高等学校専任；立教大学講師 佐藤勝造 (Katsuzo Sato)

Rikkyo Junior & Senior High School in Ikebukuro

1996 年から立教大学で数学史を講義にとり入れてきたので、今回は、この 6 年間の立大での経験を発表する。

I. 立教大学での経験

1-a) 担当科目

担当した科目は、異種の次の 2 つである。数学教育などで必要なもので、いずれにおいても、主に数学史（数学教育史も含めて）を講義した。

A. 「数学科教育法」（4 単位） 学校教育講座（教職課程）科目

対象者は数学科学生、2 年間実施（1996, 1997）

B. 「数学の方法」（2 単位） 全学共通カリキュラム（一般教育課程）科目

対象者は一般学生、4 年間実施（1998～2001）

なぜ数学史かというと、わが国では、初等教育以下大学教育にいたるまでこれを教えられる機会がほとんどなく、また数学科においても、ふつう数学各部門は教えられても、部門間は孤立的で脈絡が乏しく、数学の全体像が見えないからである。実際、数学の歴史を見れば、数学は孤立した学問ではなく、隣接科学と互いに影響しあいながら発達してきている。数学内部においても同様である。他と切り離して数学だけを或いは数学部門だけを取り上げてみても、数学の全体像を知ることはできない。数学史によってその欠落を埋める必要を感じている。

授業時数については、「数学科教育法」は、科目の性質上、制度のことも考えざるを得ないから、数学史の授業は年間、10 回程度しか出来なかった。これに対して、もう 1 つの「数学の方法」には、半年間、ほとんどすべてを充てることが出来た。

実際にやってみると、数学科学生と一般学生の予備知識の差のことを考えねばならなかった。数学科学生が対象の場合は、哲学史や世界史の予備知識不足は多少あっても、数学がある程度出来るので、時間は足りなかったが、内容的には予定通り実施できたように思う。一方、一般学生が対象の場合は、時間があっても、そうはいかなかった。そこで、一般学生の数学の予備知識については、はじめに簡単なアンケート「高校数学の授業内容調査」を実施した。その結果、受講生の数学力の差は大きいことが分かり、授業を組み立てる場合、無視できない。そのつど補えばよいが時間がかかる。

以上は、数学史を講義する場合、誰を対象の科目かによって、考慮せざるを得ない点があるが、大学においては、大きく 3 つの段階が考えられよう。一般学生向き、数学科学生向き、大学院生向きのそれである。私の場合、前の 2 つを体験したが、大学院生向きはやらないし、正直その任ではない。

いまは、2 つの内、一般学生向けの科目のみを講義しているが、これは新学部創設に伴い、押し付けられたようなもので引き受けることになった。その際、最初からの数学科学生向けの科目も続けることは、現職のままでは、時間的にハードで週 2 科目は無理として断った経緯がある。今となってみれば 2 つの科目を同時にやってもよかった、あるいはむしろやっておくべきであったと残念に思っている。数学科学生向けの科目を断ったけれど実に惜しかった。

講義内容としては、今日の数学からみて、数学史上の大転換を Subject に選んだ。すなわち、ギリシア(特に前 5 世紀)、近世(特に 17 世紀)、現代(20 世紀)に焦点をおいた。

1-b) 数学科学生向きの講義内容

(1) ギリシア

- a. **万物は数である。** これはピタゴラスの言葉といわれる。好意的にとれば現代まで見通したことばである。“万物”の拡大進展は現代におよんでいる。また“数”の意味の拡大をみると、現代は“数”が世界を統御するかに見える。
- b. **理論数学の誕生。** オリエント(エジプト、バビロニアの数学)の結果をギリシアが理論体系にくみ込んで、体系を作る。オリエント(中国、インド、和算も同じ)には“定義、公準、公理……に始まる論証”を伴う「学問的」数学は生じなかったが、これは古代ギリシアの寄与である。
- c. **イデアルな図形と無理量。** その体系は幾何学の衣を着た理論数学であって、イデアルな図形(たとえば、大きさ、幅、厚さなしと規約した、現実には書けない、理想化された図形)を伴い、自然数も量もそういう理想的、理念的な‘図形’で示される。その結果、その理念性によって、量の表現は通約不能量に到り、通約不能量とその比(無理数)も、“数学”の対象になった。一方、その代償として「図」といっても目に見えず、したがって一見自明のことにも「証明」がいるが、その線上で諸定理の整理作業を行い、当時までのギリシア数学を集大成してつくられたものが『原論』である。ユークリッドの『原論』はまさしくギリシア数学の金字塔となる。

理想化された図形に関する論証については、エレア・プラトンの哲学からの寄与が論じられているが、これについては、ゼノンの逆理—エレア哲学の<感覚否定>→プラトンに注目したA.サボーの論が面白い。

- d. **幾何学の制約。** 図形学の形をとったユークリッドの数学には、今からみると制約がある。それは、図形について研究はしたが、それらを通ずる一般的性質、たとえば、 $x^3 = 2$ の解をその体系内では図示することはできなかった。かつ「できぬこと」の証明もでき

なかつた。

これとは別に、図形のおかれた平面、空間なども対象にはならなかった。

- e. 発見的方法. ユークリッドよりは少しあとのアルキメデスは、発見的と論証的の両刀づかい（「発見的方法と論証法との合体」）によって、放物線の求積など顕著な結果を生む。これは17世紀以後の解析学の厳密化に先行している。

(2) 近世

量の記号化がすすみ、数学各分野で記号的数学が形成される。

- a. 代数学. 図形的量を、たとえば線分の長さで表す（量の次元統一という制約の除去）など、文字記号による⁷²技を理論的に整備した代数学が誕生する。これは、[カルダーノ, ..., ウィエタ] → デカルト『精神指導の規則』（文字係数の採用；量の同次性）に見られるように、ルネサンス代数（頂点はデカルト）の試みに始まり、「位取り記数法」（インド、アラビア）が入ってきて、シモン・ステュブンによる無限十進小数の発明もあって、⁷³技としての代数法が進んだものである。デカルトの寄与はこの技にギリシア的な論証の精神を与えた（記号計算法の整備）ことにある。

この記号代数（一般的文字係数）はギリシア数学の不可能問題の解決（3大難問は19世紀だが）にも、道を拓いた。たとえば、この記号代数はやがて、先の $x^3 = 2$ の不可能性を議論する。古代（ユークリッド）幾何で作図できる範囲は二次曲線（円）と直線で作図可能な範囲に限られ、 $x^3 = 2$ はそこに「存在」しないことがわかるのである。この一般的な言明はギリシア幾何学ではできなかったことであり、それは一般的な方程式（二次方程式）の議論による仕事である。

一方、方程式論から一般的解公式が産まれる（根と係数の関係）。有理数体からはじまって $\sqrt{\quad}, \sqrt[3]{\quad}, \dots, \sqrt[n]{\quad}, \dots$ とからできる体の系列を作ったとき、その中で解公式はみつかるか、（みつからない—ガロアの理論）。ここでも「不可能性」が一つのきっかけとなり、問題は体の構造の検討という現代へ移行する。

- b. 解析学. “無限小解析”（原義は無限小なる記号をもちいる代数のこと）が現れる。ここでは記号代数は無限小記号を扱う一種の代数の役割を担っている。ニュートン流率法も一種の記号数学である。
- c. 幾何学. 無限の数学化がはじまる。すなわち射影幾何を契機に無限の対象をみる視点（無限遠点の導入；デザルグ、パスカル, ……）ができ、また『原論』の第5公準問題からくる「公理」への反省も経て、非ユークリッド幾何が発見ないし創造される。
- d. 数理論理学. 解析学が自然の学へ積極的に適用される。またライプニッツの微積分の形成過程の中で関数の概念が出現し、やがて洗練される。

(3) 現代素描

- a. 方程式論の流れの中で、解の公式の問題—5次以上の代数方程式が解けないこと—（ギリシアの場合と似て不能問題）を契機に、置換群のような新しい対象が数学に取り入れ

- b. 近世後期の幾何学での新しい対象である「空間」が数学化され、「公理」の意味も拡大される。
- c. 解析学（無限小解析^{インフィニテシマル}）、幾何学（非ユークリッド幾何）、整数論における複素整数の場合から、個々の数の代わりにある種の数の集まり（イデアル）をおきかえて考えるのが有効というガウス-デデキントの考えなどがきっかけで、無限の算術というべき集合論が出現する。やがて集合と構造（例えば、群、体の構造）が数学的対象となるが、前者はカントル、デデキントの寄与による。
- d. 新しい応用数学（モデルの理論—公理系に幾通りものモデルがある場合のこと—）の1つとして、論理あるいは数学の基礎の問題が電子工学の発展と歩調があって、コンピュータ科学が出現し、今日のIT革命に至っている。

この内、時間不足で、解析学、現代数学にはほとんど立入れなかった。予定通りとはすまず、実際は、(1)ギリシアと(2)近世の1部しかできなかった。数学の全体像をねらったが、力不足で透明に見えるような講義はできていない。

【テキスト】は、ユークリッド『原論』、佐藤徹訳「方法」、三田博雄訳「アルキメデスの科学」その他、主として、v.d.Waerden, *Science Awakening* を参考にプリントを作成した。これは、村田全氏とかつて共訳したことがあるからである。（Bの場合は）これに吉田洋一『零の発見』、村田全『日本の数学 西洋の数学』を加えた。授業に際しては、出来るだけ入手できた原資料・史料・原典を持参した。

1-c) 課題

「『原論』第1巻の命題間の関係表を作成せよ。」という課題を与え、そのために学生に第1巻の全コピーを配布した。

数学史の授業において、重要な文献に当たり、数学形成の追体験を試みることは欠かせない。その文献は時空を超えて数学の起源と本質に関して、われわれに何がしかの示唆を与え鼓舞する。日本では、とかく数学の「成果」それも最新の成果のみを受け取ろうとし、この成果をもたらした精神を学ぼうとしない。それを生み出した「精神の仕事場」を追体験することもなしに仕事の本質を習得するというのは、おそらく不可能なことであろう。ユークリッドの『原論』はそういう仕事場として追体験できる格好の材であると思う。

この手法は、科学史専門の有力な学術雑誌 Archives for the History of Exact Sciences に掲載された Neuenschwander の「『原論』第5巻の研究」に示唆されたものである。

この課題をこなすことによって、一つ一つの命題（作図や定理）は、証明に際して、言明の根拠をたどっていくと、先行命題があり、終には、はじめから[定義]、[公準]、[公理]が用意されていることを発見する。いわゆる体系化がなされている様子が、この作業によって追体験できるのである。

その結果、学生の反応は、証明の厳密さに感嘆した、2300年前にこれ程のものが完成していたとは驚きである、というものであった。

1-d) 学生の感想

最終回の授業の際、学生全員に感想をよせてもらった。リップサービスもあり、必ずしも正直に書いているとはいえないので、割り引いて考えなければならないが、それでも概ね肯定的で悪い気はしない。代表的なものを若干拾ってみる。

数学科学生の感想：「ピタゴラス学派の話、無理量の発見、ゼノンの逆理、証明が行われるまでの過程、原論第1巻についての研究などは、とても興味深く印象に残っています。視野が広がった気がしました。教員になることができた時にも、きっと役立つことと思います。」。—この学生は後に教職に就いた。

一般学生の感想：「『原論』この一冊はとても貴重な本だと知りました。」 「計算式ではなく、数学の歴史といった歴史的背景もまなべて、また高校で習ったのとは違う視点から数学を学べておもしろかったです。」 「この授業を受けて、もう1度、基礎から勉強したいと考えるようになりました。」 「いままでは、問がありそれを解くだけが数学でしたが、その発展をたどることで新しい見方ができ、数学に対するイメージが変わりました。また私は世界史を勉強していたので、数学の歴史をあてはめてみてとても興味をおぼえた。」

「数学の本もたくさん紹介していただきましたが、読みたいと思う気持ちだけで、現実にはそう簡単には読めませんが、『ユークリッド原論』の縮刷版は、思わず購入してしまいました。」

付記：かつて中学生にもクラブ活動において、『原論』の最初の各巻に同じことを試みたことがあって、受けがよかった。このクラブは「数理研究同好会」と称し、わたしが創設し、顧問で、彼ら対象に自由に数学史をやってきた。その卒業生の中から、志を高くもってくれて、理数系の大学院に進むものも多く、1人はヘーゲル哲学の研究者となり、某大学の先生をしている。数学史は面白く、力ある生徒はインスパイアされるようである。

II. まとめと反省

講義をしてきて、自分の専門分野とそうでない分野とでは自分ながら迫力の違いを感じる。実際、演習の問題やプリント作成に工夫をこらしたときなどには、学生はよく興味を示した。前年度のものをそのまま使ったときなどの反応はいま一つであった。一番旨くいったと感じたのは『原論』第1巻についてである。考えてみると、第1巻については自分も検討、吟味したことがあり、以前『原論』について小論を書いたこともある（『科学史研究 No.138』）。自分の研究したことやその周辺になると講義にも熱を帯びてくるのか自然に力が入り、自信を持ってやれる部分でもあってか、それが伝わり学生の反応も一段とよいように思う。数学史の授業をやる上で、勉強はもとより研究が欠かせない、そういう歴史研究の経験こそ必要な要素であると痛感している。

今日、文科省の学習指導要録は、‘高校数学の教材に数学史的なものをとりいれよ’という。が、これは場当たりの文教政策である。教える側は従来のまま、急にやれといっても……何やるか不明である。

ここで、常日頃思っている科学史（または数学史）の意義について私の考えを述べたい。周知のように、現代は科学（「自然科学」として数学を含めて考える）が決定的に重要な意味をもつにいたった時代である。実際、善悪両面において、世界情勢から個々人の生活のすみずみに到るまで、その及ぼす影響には計り知れないものがあり、科学を抜きにして現代は語れない。とすれば、現代を批判的・主体的に生きていくためには、この科学の全体像を、粗大であつてもある程度まで大局的に把握しなければならない。

しかし、科学といえども人間の営為であり、歴史の中で形成されてきたものである。その点で、現代科学の先端、流行のみを追うことで、科学の何たるかを知り、ましてその全体像をある程度把握することには無理があり、また不十分であると思う。数学と自然科学の関係、数学の発展の全体像などを含めて、そこに文化史の一断面としての科学史の研究の意義がある。そして人間による自然認識の展開の歴史を対象とする数学史・科学史の研究は、科学の現代的かつ全体的な姿ないし意義の、少なくともある側面を明らかにすることが期待できる。その一端として、数学史を講じようとした。

ところが先に述べたように、わが国ではこういう事を初等教育以下大学教育に到るまで教えられる機会がほとんどないし、またそれを教えておられる先生も決して多くはない。これが今日までの日本の社会ないし学問社会の現状であり、お寒い文教政策の結果である。

このような今日の状況を見定めて、先に述べた期待に応えるために十分に努力しなければならない、と自戒している。

ただし、それと共に私が数学史を研究するのは、直接的には何よりも数学の歴史につきぬ面白さが感ずるからであり、その面白さもつきつめてゆくと、先に述べた科学の姿あるいは意義を浮き彫りにすることを教えてくれるところにあると思う。この種の学問の意義とその面白さも、できれば学生に伝えたいと願っている。