

Monopole の幾何

京大数理研 島谷 健一郎 (Shimatani ken'ichiro)

Monopole は数学的には、Bogomolny 方程式と呼ばれる非線型偏微分方程式の、ある境界条件を満たす解として定義される。この解の構成および解全体のなす図形 (Monopole の Moduli space) の形状については既に種々の結果が知られており、かつこれらは互いに有機的に結がっている。Monopole の非線型方程式の解析には、諸々のアプローチ相互の関係まで正確に把握して、多角的に方程式に取り組むことが必要である。

これらの一つに、Nahm 方程式と呼ばれる非線型常微分方程式の解から Monopole 解を構成する理論と、spectral curve と呼ばれる代数曲線が Monopole 解全体をパラメトラライズする理論が知られている。Hitchin ([8]) は既にこの両者の関係、対応を調べたことにより、Monopole に関する結果をいくつか証明しているが、ここからは、これをさらに吟味して、Hitchin による spectral curve から Nahm 方程式の解を対応させる手順が、実は、ソリトン理論における、コンバクトリーマン面、この

上の基準点、 q についての漸近挙動、および positive divisor と
 いうデータから Baker-Akhiezer 函数を使、2 方程式の準周期解
 を構成する理論 ([3][4][6][10]) の枠組に完全に乗っける
 事、同時に、Nahm 方程式の解を特殊な場合にテータ函数を
 用いて、ある程度記述できることを示す。

以下、§1 と §2 で、定義と Nahm-Hitchin の結果をごく
 簡単にまとめる。§3 で、準周期解構成の理論の枠組に乗、
 之けることを示し、§4 でテータ函数による解の記述をやる
 ことを示す。

§1 Monopole の定義

Monopole は、勝手なる次元リーマン多様体とコンパクト
 一群で定義できるが、ここでは簡単にするため、 $\mathbb{R}^3$ 上の $SO(2)$
 Monopole に限った定義を講ませることにする。

定義 (1.1) k -Monopole ($k = 1, 2, 3, \dots$)

(A_1, A_2, A_3, Φ) 、 A_i, Φ は $\mathbb{R}^3$ 上の $AM(2)$ ($SO(2)$ のリ
 ー環) に値を持つ函数で、次の連立非線型偏微分方程式 (これを
 Bogomolny 方程式と言う) と、2 つの境界条件を満たす。

ただし $\|\Phi\|^2 = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Phi^2$ $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ は半径

整数 k のことを、Monopole の topological charge と言う。

$$(1.2) \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + [A_1, \Phi] = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} + [A_2, A_3] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + [A_2, \Phi] = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} + [A_3, A_1] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + [A_3, \Phi] = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + [A_1, A_2] \end{cases}$$

$$(1.3) \quad \|\Phi\| = 1 - \frac{k}{2r} + O(r^{-2}) \quad r \rightarrow +\infty$$

$$(1.4) \quad \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + [A_i, \Phi] \right\| = O(r^{-2})$$

つまり、方程式 (1.2) の、境界条件 (1.3) (1.4) の下での特殊解 (A_i, Φ) を、topological charge k の $SU(2)$ -Monopole over $\mathbb{R}^3$ と呼ぶことにする。

定義 (1.5) gauge 同値

(A_i, Φ) が (1.2) (1.3) (1.4) をみたす時、 g を $\mathbb{R}^3$ 上の $SU(2)$ -値関数とし $\widetilde{A}_i = g^{-1} A_i g + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}$ $\widetilde{\Phi} = g^{-1} \Phi g$ とおくと $(\widetilde{A}_i, \widetilde{\Phi})$ もまた (1.2) (1.3) (1.4) をみたす事は容易に確かめられる。このよる 2 つの Monopole 解を互いに gauge 同値であると呼ぶ。

定義 (1.6) Moduli space

$\{\text{gauge-Monopole 解}\} / \text{gauge 同値}$ (gauge-Monopole 解全体を $\sim$ した集合を gauge 同値で割った空間) のことを, gauge-Monopole の Moduli space と呼ぶ。

Monopole における基本的問題は, 方程式 (1.2) と (1.3) (1.4) の下で解く事と, Moduli space の形状の決定にあるわけである。

Remark (1.7)

$\mathbb{R}^3$ 上の Bogomolny 方程式 (1.2) は, $\mathbb{R}^4 = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 上の自己双対 Yang-Mills 方程式 $\lambda_0 = 0$ による $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の $\sim$ 同値である。この事は方程式を書き下せばすぐわかる。

Remark (1.8)

理論物理の Yang-Mills-Higgs の理論で, gauge 場と Higgs 場に対し 2 作用積分が定義されるが, 定義 (1.1) の A_μ が gauge 場, Φ が Higgs 場に対応し, 方程式 (1.2) は (A_μ, Φ) が作用積分の critical point になる事を, 境界条件 (1.3) (1.4) は作用積分の有界性に由来する。そして, このような gauge 場と Higgs 場で作られる場が, いわゆる Dirac のモノポールになることから, 以上のような言葉の定義が得られた。

§2 Nahm & Hitchin の結果

まず, Monopole 解の構成に関して, 次の Nahm の構成法がある。

定理 (2.1)

次のようなデータ (T_1, T_2, T_3) から k -Monopole 解が構成できる。

逆にすべての k -Monopole 解は, このデータから構成される。

(2.2) T_1, T_2, T_3 は開区間 $(0, 2)$ 上の $M(k, \mathbb{C})$ -値実解析的函数

$$(2.3) \quad T_1' = [T_2, T_3]$$

$$T_2' = [T_3, T_1]$$

$$T_3' = [T_1, T_2]$$

この非線型常微分方程式を Nahm 方程式と言う。

$$(2.4) \quad T_i^* = -T_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$(2.5) \quad T_i(2-z) = -\overline{T_i(z)} \quad i = 1, 2, 3 \quad z \in (0, 2)$$

$$(2.6) \quad T_i \text{ は端点 } 0, 2 \text{ で simple pole を持つ}$$

±5 に $\eta = z$ の residue を $a_1, a_2, a_3 \in M(k, \mathbb{C})$ とする

すると (2.3) より $-a_1 = [a_2, a_3]$ 等の式が成り立つ。

よって $su(2) \cong sp(1)$ の k 次元表現 $\rho: sp(1) \rightarrow M(k, \mathbb{C})$

と、 $\rho(\lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k) = -2(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3)$ を定義するが

(2.7) ρ は既約

証明の概略 ([8] [2])

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{と表す}$$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して λ による微分作用素

$$\Delta(\lambda) = -\sum_{j=1}^3 \lambda_j \otimes e_j + i \frac{d}{dz} - i \sum_{j=1}^3 T_j \otimes e_j$$

を考える。 (2.6), (2.7) から kernel が複素 2 次元存在すること

が示される。 η の L^2 ノルムに関する正規直交基底

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; z) \text{ とする } (\Delta(\lambda)\psi(\lambda, z) = 0, \quad \int_0^2 \psi^* \psi dz = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$\eta(2)$

$$A_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \int_0^2 \psi^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; z) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; z) dz \quad i=1, 2, 3$$

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = i \int_0^2 (z-1) \psi^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; z) \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; z) dz$$

とすれば, (A_i, Φ) が k -Monopole の条件を満たす。

後半の証明には, これから述べる Hitchin の結果が必要となる。

この定理により, 非線型偏微分方程式 (1.2) が非線型常微分方程式 (2.3) に帰着せられたわけだが, Nahm 方程式 (2.3) も表がとれず解法はなかった。またデータ (T_1, T_2, T_3) から

Monopole 解 (A.1, 2) を explicit に作るには線型常微分方程式を解く操作と定積分の計算があるため計算の遂行は困難な場合が多い。

一方、Monopole の Moduli space については、代数曲線のパラメータライズできるという Hitchin の結果があるが、この前に記号をたかくして用意する。

記号

$\mathbb{C}P^1$: 1次元複素射影空間

$T\mathbb{C}P^1$: $\mathbb{C}P^1$ の tangent bundle, non-compact な 2次元複素多様体である。

$\pi: T\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$: projection

$\mathcal{O}(2)$: $\mathbb{C}P^1$ 上の Chern class 2 の line bundle

$\mathbb{C}P^1$ は $U_0 = \{[z_1, z_2] | z_2 \neq 0\}$ と $U_\infty = \{[z_1, z_2] | z_1 \neq 0\}$ の 2枚の chart を cover する。 $T\mathbb{C}P^1$ も多様体として $\pi^{-1}(U_0)$ と $\pi^{-1}(U_\infty)$ の 2枚を cover する。以後、 $\pi^{-1}(U_0)$ と $T\mathbb{C}P^1$ の standard な chart と呼ぶことにする。

$\pi^{-1}(U_0) \cong \mathbb{C}^2 = (z, \eta)$ z は $\mathbb{C}P^1$ 方向、 η は $T\mathbb{C}P^1$ 方向

L^z : $\pi^{-1}(U_0)$ 上と $\pi^{-1}(U_\infty)$ 上の trivial line bundle と transition function $e^{\frac{1}{z}z}$ で張り合わせることができる $T\mathbb{C}P^1$ 上の正則な line bundle。ただし $z \in \mathbb{C}$ は定数

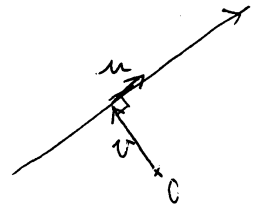
$\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ かつ $T\mathbb{CP}^1 \cong \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \|u\|=1, u \cdot v = 0\}$

である。ここで $\mathbb{R}^3$ の向きを込めた直線は、単位方向ベ

クトル u と原点からの垂線ベクト

ル v を使って $\{tu + v \mid t \in \mathbb{R}\}$

を表わす。 $\|u\|=1, u \cdot v = 0$ である。



あり。つまり

$\{\mathbb{R}^3 \text{ の向きを込めた直線全体} \} \cong T\mathbb{CP}^1$ が成り立つ。

$\tau: T\mathbb{CP}^1 \rightarrow T\mathbb{CP}^1$ 上の同一視の下で、直線の向きを逆

にする写像。 $\tau^2 = \text{id}$, anti-holomorphic になり、 $\tau \notin T\mathbb{CP}^1$

の real structure になり、 τ になる。

定理 (2.8)

反-Monopole 全体と、次の条件を満たす $T\mathbb{CP}^1$ の部分集合 S の全体とは同値である。

(2.9) S は、ある $\psi \in H^0(T\mathbb{CP}^1, \pi^* \mathcal{O}(2k))$ の 0 点集合で

定義される $T\mathbb{CP}^1$ の部分集合: $S = \{p \in T\mathbb{CP}^1 \mid \psi(p) = 0\}$

(2.10) multiple component を持たない

(2.11) コンパクト

(2.12) τ で不変

(2.13) $L^2|_S$ は holomorphically trivial

(2.14) $L^1 \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1)$ は real structure ($\sim$: anti-linear かつ $\sim^2 = \text{id}$ を満たす bundle automorphism) を持つ。

$$(2.15) \quad H^0(S, L^z \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-2)) = 0 \quad z \in (0, 2) \subset \mathbb{R}$$

証明の概略 ([7] [8])

先に説明したように $P \in \mathbb{TP}^1$ と γ_P ($\mathbb{R}^3$ の直線) は同一視でき、 $\nabla = \sum_{i=1}^3 (\partial_i + A_i)$ とおき、各 $P \in \mathbb{TP}^1$ に対し 2 微分作用素 $\nabla - \psi \mathbb{I}$ を直線 γ_P 上に制限させる。この kernel $(\nabla - \psi \mathbb{I})|_{\gamma_P} \varphi = 0$ は、線型 1 階常微分方程式だから常に線素 2 次元であるが、次のように $\mathbb{TP}^1$ の部分集合 S を定める。
 $S = \{ P \in \mathbb{TP}^1 \mid (\nabla - \psi \mathbb{I})|_{\gamma_P} \varphi = 0 \text{ をみたす } \gamma_P \text{ 上の関数 } \varphi \text{ の中に 2 乗可積分なものがある} \}$

厳密な議論を省くことにより、このような $\mathbb{TP}^1$ の部分集合が (2.9) ~ (2.15) をみたすこと、異なる Monopole 解には異なる代数曲線 S が得られること、そしてこれから述べる Nahm の構成との結びつき、これが必要十分であることが示される。なお、Monopole 解が S によって定められる S を、Hitchin は Monopole の spectral curve と呼んでいる。

系 (2.16)

S は代数曲線である

証明は (2.9) より明らか

系 (2.17)

S を standard な chart (y, η) 上で表示すると、次の形の P が

この平面曲線が空でないことが示される。

$$\eta^k + (a_1^k s^2 + b_1^k s - \bar{a}_1^k) \eta^{k-1} + (a_2^k s^2 + b_2^k s - \bar{a}_2^k) (a_1^k s^2 + b_1^k s - \bar{a}_1^k) \eta^{k-2} + \dots \\ + (a_k^k s^2 + b_k^k s - \bar{a}_k^k) \dots (a_1^k s^2 + b_1^k s - \bar{a}_1^k) = 0 \\ a_j^k \in \mathbb{C}, b_m^k \in \mathbb{R}$$

証明の概略

この形の多項式になるのは (2.9) から、 $b_m^k \in \mathbb{R}$ や $\bar{a}_j^k$ の所は (2.12) から導かれる。(2.11) から η^k の係数が 0 になることが導かれる。

Remark (2.13)

(2.10) は上の式を因数分解した時、重複因子を持たない事を意味する。なお、他の条件が上の式の係数のどのような条件になるかは、わかっていない。

系 (2.19)

S が non-singular の時、genus は $(k-1)^2$ になる。

証明は [7]

±、spectral curve と Nahm の方程式との結びつきは、次の 4 つの命題としてまとめられる。これは、定理 (2.1), (2.8) の残りが導かれることは明らかである。

命題 (2.20)

(2.9) (2.10) (2.11) (2.13) (2.15) をみたす代数曲線 S がある Nahm の
 方程式 (2.3) の解が (2.6) (2.7) をみたすものが構成できる。た
 だし定数行列 $P \in GL(k, \mathbb{C})$ の相似変換の自由度は残子 (T_i) が
 (2.3) をみたすとき、 $P^{-1} T_i P$ もまた (2.3) をみたす。この自由度
 を除いて unique に (2.3) の解が定まる。 (この意味)

証明の概略 [8]

(a) まず、主として条件 (2.15) を使って

$$(2.21) \quad \dim H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1)) = k \quad z \in (0, 2)$$

を導く。

(b) 実開区間 $(0, 2)$ 上に複素 k 次元 $\mathbb{C}$ のベクトル束 V が

$$V = \bigcup_{z \in (0, 2)} H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$$

で定義できることを示す。

(c) V 上に k 次のような性質を持つ bundle Automorphism $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2$
 が唯一つ定まることを示す。

"勝手な $\psi_z \in H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$ (i.e. $\psi \in \Gamma((0, 2), V)$)

に対し

$$\eta \psi(z; z, \eta) + (\tilde{A}_0 \psi)(z; z, \eta) + \gamma (\tilde{A}_1 \psi)(z; z, \eta) + \gamma^2 (\tilde{A}_2 \psi)(z; z, \eta) = 0 \quad //$$

== $z \in \gamma$. η は γ の成分、 γ の射影が定義される

$\pi^{-1}(0) = (z, \eta)$ 上の関数、 ψ や $\tilde{A}_i \psi$ は $H^0(S, L^{\otimes 2} \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$

の元であるから $\pi^{-1}(0)$ 上の関数表示される。それ

$\psi(z; \zeta, \eta)$, $(\hat{A}_1 \psi)(z; \zeta, \eta)$ と表わしたわけが、函数としての
和を積をとった結果が 0 に等しいという意味

(d) V に接続 ∇ を、 $\psi \in \Gamma((0,2), V)$ に對して、 $\zeta \in \pi^{-1}(u_0)$ 上
 $\psi_0(z; \zeta, \eta)$, $\pi^{-1}(u_0)$ 上 $\psi_\infty(z; \zeta, \eta)$ と函数表示して

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} + \left(\frac{1}{2} \hat{A}_1 \psi \right)(z; \zeta, \eta) + \zeta \left(\hat{A}_2 \psi \right)(z; \zeta, \eta) \quad \text{on } \pi^{-1}(u_0) \\ &= \frac{\partial \psi_\infty}{\partial \zeta} - \frac{1}{\zeta} \hat{A}_0 \psi - \frac{1}{\zeta} \hat{A}_1 \psi \quad \text{on } \pi^{-1}(u_\infty) \end{aligned}$$

が、well-defined に定められることを示す。

(e) ∇ の接続が covariant constant な V の section を 1 次独立
に 4 個定め $\psi_1, \dots, \psi_4$ とし、 V の global frame にする。

(ψ_i の選ぶ方には $GL(4, \mathbb{C})$ の自由度があり、これが命題
の中の自由度になる)。また ∇ bundle Automorphism $\hat{A}_i$ によ
り行列表示が定まる。この転置を $A_0(z), A_1(z), A_2(z)$ とすると
次の式が成り立つことを示す。

$$\begin{cases} \left((\eta + A_0(z) + \zeta A_1(z) + \zeta^2 A_2(z)) \begin{pmatrix} \psi_1(z; \zeta, \eta) \\ i \\ \psi_4(z; \zeta, \eta) \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \left(\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \left(\frac{1}{2} A_1(z) + \zeta A_2(z) \right) \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ i \\ \psi_4 \end{pmatrix} \right) = 0 \end{cases}$$

(f)

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (A_0 + \zeta A_1 + \zeta^2 A_2) = [A_0 + \zeta A_1 + \zeta^2 A_2, \frac{1}{2} A_1 + \zeta A_2]$$

を示す。(Nahm の方程式の Lax 表示)

(g)

今の式は γ の係数ごとに等しくなくてはならないことを示す。

$$(h) \begin{cases} A_0 = T_1 + i T_2 \\ (2.21) \begin{cases} A_1 = -2i T_3 \\ A_2 = T_1 - i T_2 \end{cases} \end{cases}$$

で T_1, T_2, T_3 を定めると, Nahm 方程式 (2.3) をみたす

(i) T_i たちは条件 (2.6) (2.7) をみたすことを示す。

命題 (2.22)

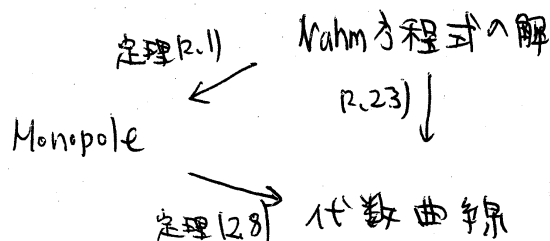
今, 得られた T_i に対し $A_i \in \mathfrak{h}$ を定め

$$(2.23) \quad \det (\eta + A_0(z) + \gamma A_1(z) + \gamma^2 A_2(z)) = 0$$

とかくと, Lax 表示から与えられる γ と η に関する式になったが, りんが最初の代数曲線の standard chart 上における表示式と一致する。

命題 (2.24)

右の図式は可換



命題 (2.25)

命題 (2.20) において、代数曲線 S にさらに条件 (2.16) (2.18) を加えると、できる T_1 は (2.4) (2.5) を満たす。

命題 (2.22) (2.24) (2.25) の証明も [8]

さて、Hitchin はさらに、命題 (2.22) の Nahm 方程式の解 $\rightarrow$ 代数曲線 の対応が、非線型方程式に対してそれを線型化する代数曲線 (リーマン面) を作る Adler-Moerbeke の理論 (Adler-Moerbeke, Adv. Math. 38, 318-379 (1990)) の枠組に入り、このことを言及している ([8])。即ち、Nahm 方程式の解に対して (2.23) で定義される代数曲線を考える。式の形から、 η は、行列 $A_0(\eta) + \zeta A_1(\eta) + \zeta^2 A_2(\eta)$ の固有値となる。曲線 (2.23) の各点 (ζ, η) 上 η の固有空間を対応させ、曲線上に line bundle が構成できる。リーマン面上の line bundle には、 η の Jacobi 多様体上の点が対応した。 ζ が動くとき曲線 (2.23) は変わるから行列 $A_0(\eta) + \zeta A_1(\eta) + \zeta^2 A_2(\eta)$ は変化するから、固有値も変わり、line bundle も動く。即ち、ヤコビ多様体上の運動が得られる。これが実は直線運動になる、というのである。

ところで、この線型化の理論は、リーマン面、 η の上の基準点、 $\eta = \infty$ の漸近挙動、positive divisor と呼ぶデータから、

方程式の準周期解を構成する Krichever の理論 ([3] [4] [6] [10])
 と表裏一体なので、命題 (2.20) の証明の概略で説明した対応を
 Krichever の理論にのせられるように書き直せるはずで、こう
 した方がより constructive で両者の関係も明確になり、そして、
 Nahm 方程式の解をテータ函数を用いて explicit に書ける期待
 ができる。

次の章で、これを実行する。

§3 spectral curve と Nahm 方程式

記号は前章と同じとする。\$S\$ と書けば、常に (2.9) (2.10) (2.11)
 (2.13) (2.15) をみたすことになる。

要はコホモロジーの条件 (2.15) を適当な形に翻訳して、命題
 (2.20) の証明の概略 (c) が定まることを、Baker-Akhiezer 函数と
 して与える事にある。

まず、 $\psi \in H^0(S, L^2 \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$ の特徴付けから始める。

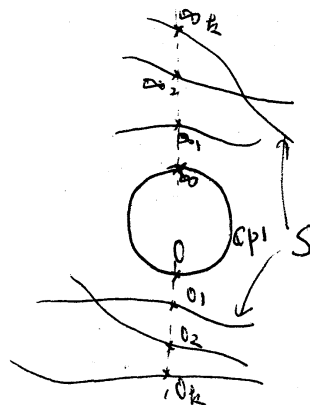
$$\{0_1, \dots, 0_k\} = S \cap \pi^{-1}([0, 1]) \subset \pi^{-1}(U_0)$$

$$\{\infty_1, \dots, \infty_k\} = S \cap \pi^{-1}([k, \infty]) \subset \pi^{-1}(U_\infty)$$

とおく。当然

$$S \cap \pi^{-1}(U_0) = S - \{\infty_1, \dots, \infty_k\}$$

$$S \cap \pi^{-1}(U_\infty) = S - \{0_1, \dots, 0_k\}$$



がある。一般には O_k の点たちが互いに異なるとは限らないが、条件 (2.10) より generic には異なるので、以下、 O_k の点たちが互いに異なることにする。

CP^1 上の line bundle $L^{\otimes 3} \otimes \pi^*(O(k-1))$ も、 $\pi^{-1}(U_0) \cup \pi^{-1}(U_\infty)$ 上では trivial だから、 $\psi \in H^0(S, L^{\otimes 3} \otimes \pi^*(O(k-1)))$ を

$S = \{0_1, \dots, 0_k\}$ 上函数表示したものを ψ_0

$S = \{0_1, \dots, 0_k\}$ 上函数表示したものを ψ_∞

と書く。

$L^{\otimes 3}$ は、transition function $e^{\frac{\eta}{3}z}$ で定義したのである

$$\psi_0(z; s, \eta) = e^{\frac{\eta}{3}z} s^{k-1} \psi_\infty(z; s, \eta) \quad \text{on } \pi^{-1}(U_0) \cap \pi^{-1}(U_\infty)$$

が成り立つ。このことから函数 ψ_∞ の特徴付けとして、次の命題が容易に得られる。

命題 (3.1)

$\psi \in H^0(S, L^{\otimes 3} \otimes \pi^*(O(k-1)))$ を $S = \{0_1, \dots, 0_k\}$ 上函数表示したものを ψ_0 とおくと、次の条件を満たす。

(3.2) $S = \{0_1, \dots, 0_k\}$ 上正則

(3.3) $O_i = (0, \eta_i)$ が真性特異点をもつ

O_i の近傍では、 S の局所座標と projection $\pi: CP^1 \rightarrow CP^1$

$(z, \eta) \mapsto z$ の制限を入れる。同じ記号 z で表わす。

$$(3.4) \quad \psi_\infty(z; s) = e^{-\frac{\eta_i}{3}z} \left(\frac{z_0(z)}{s^{k-1}} + \frac{z_1(z)}{s^{k-2}} + \dots \right)$$

γ_{0i} の近傍が展開される。

(2.15) $H^0(S, L^2 \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-2)) = 0$ も同いように考えると、次の命題を得る。

命題 (3.5)

(3.2) (3.3) を満たし、かつ γ_{0i} の近傍で

$$e^{-\frac{\eta_i}{3}z} \left(\frac{\tilde{\gamma}_1(z)}{z^{k-2}} + \frac{\tilde{\gamma}_2(z)}{z^{k-3}} + \dots \right)$$

と展開される函数は恒等的に 0 しかない。

ここで 1 次独立な $\psi_1, \dots, \psi_k \in H^0(S, L^2 \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$ に対し、行列 $A(z)$ を定め、縦ベクトル $(\psi_1, \dots, \psi_k)^t$ にほどこした結果、 γ_{0i} での展開が $z^{-(k-2)}$ から始まるように決定すれば、 η_i が自動的に 0 になってしまふ可能性がある。以下、この原理を詳しく説明する。

まず 1 次独立な $\psi_1, \dots, \psi_k$ をとり、次のように正規化しなおす。

$$\psi_j(z; z, \eta) = e^{-\frac{\eta_j}{3}z} \left(\frac{\psi_j(z)}{z^{k-1}} + \frac{\tilde{\psi}_1(z)}{z^{k-2}} + \frac{\tilde{\psi}_2(z)}{z^{k-3}} + \dots \right) \quad \text{near } \gamma_{0i}$$

他の frame $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_k$ は、ある $GL(k, \mathbb{C})$ -値函数 $B(z)$ を用いて

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \end{pmatrix}$$

の形に書けるから、もし正規化しなおした ψ_j たちが命題 (2.20) (c)

が定まる ψ_j と異なる, 2 11 れば (実際異なる, 2 11 りの だが) 後から B 田を修正すればよい (後述).

Remark (3.6)

§ 4 で, $k=2$ の場合には, テーラ函数を用いて具体的に ψ_j を与える.

± 2. 縦ベクトル $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$ を各 0_i のまわりで展開して, 次のように行列表示しておく, 以後の計算は易い.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(z; \gamma) \\ \vdots \\ \psi_k(z; \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta_1}{3}z} \left(\frac{1}{3^{k-1}} + \frac{\bar{z}_1^{k-1}}{3^{k-2}} + \dots \right) & \dots & e^{-\frac{\eta_k}{3}z} \left(\frac{\bar{z}_1^{k-1}}{3^{k-2}} + \frac{\bar{z}_2^{k-1}}{3^{k-3}} + \dots \right) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-\frac{\eta_1}{3}z} \left(\frac{\bar{z}_1^{k-1}}{3^{k-2}} + \frac{\bar{z}_2^{k-1}}{3^{k-3}} + \dots \right) & \dots & e^{-\frac{\eta_k}{3}z} \left(\frac{1}{3^{k-1}} + \frac{\bar{z}_1^{k-1}}{3^{k-2}} + \dots \right) \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \frac{1}{3^{k-1}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3^{k-2}} \begin{pmatrix} \bar{z}_1^{k-1} & \dots & \bar{z}_1^{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{z}_1^{k-1} & \dots & \bar{z}_1^{k-1} \end{pmatrix} + \dots \right\} \times \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta_1}{3}z} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-\frac{\eta_k}{3}z} \end{pmatrix}$$

今は $0_1, \dots, 0_k$ が真性特異点を持ち, $\infty_1, \dots, \infty_k$ の近傍では正則な函数 ψ_∞ を使, 2 11 りの 2, 次の命題が目標になる.

命題 (3.7)

ある一次独立な $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_k$ に対し, 2. 次をみたす行列値函数 $A_0(z), A_1(z), A_2(z)$ を, $\tilde{\psi}_j$ たちの特異点 0_i における漸近挙動が

構成できる。

$$\left(\frac{1}{3} A_0 + \frac{1}{3} A_1 + A_2\right) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix} = -\frac{\eta}{3^2} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{3} A_0 + \frac{1}{2} A_1\right) \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix} = \frac{2}{3^2} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\psi}_k \end{pmatrix}$$

正規化した ψ_j に対する上の主張は無理で、次の命題を最初を示すことにする。

命題 (3.3)

正規化した frame $\psi_1, \dots, \psi_k$ に対し、次のみたす行列値関数 $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \hat{A}_0, \hat{A}_1$ が、 ψ_i の 0_i での挙動から構成できる。

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} \tilde{A}_0 + \frac{1}{3} \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2\right) \psi = -\frac{\eta}{3^2} \psi \\ \left(\frac{1}{3} \hat{A}_0 + \hat{A}_1\right) \psi = \frac{2}{3^2} \psi \end{cases}$$

証明

$\hat{A}_0$ を示す。上、下側の式の右辺を 0_i のまわりで展開した行列で表わすと

$$\begin{aligned} \frac{2}{3^2} \psi = & \left\{ \frac{1}{3^2} \begin{pmatrix} -\eta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\eta_k \end{pmatrix} + \frac{1}{3^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3^2} & \dots & \frac{1}{3^2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{3^2} & \dots & \frac{1}{3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 & \dots & -\eta_k \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \frac{1}{3^2} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3^2} & \dots & \frac{1}{3^2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{3^2} & \dots & \frac{1}{3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 & \dots & -\eta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{2}{3^2} \end{pmatrix} \right) + \dots \right\} \times \begin{pmatrix} e^{\frac{\eta_1}{3^2}} \\ \vdots \\ e^{\frac{\eta_k}{3^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よ、 z

$$(3.9) \quad \hat{A}_0 = \begin{pmatrix} -\eta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\eta_k \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z} \hat{A}_0\right) \psi = \left\{ \frac{1}{z^{k+1}} \left[\begin{pmatrix} \eta_1^1 \\ \vdots \\ \eta_k^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\eta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\eta_k \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{z^{k+2}} \begin{pmatrix} \eta_1^2 \\ \vdots \\ \eta_k^2 \end{pmatrix} + \dots \right\} \times \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta_1}{z} z} \\ \vdots \\ e^{-\frac{\eta_k}{z} z} \end{pmatrix}$$

と z^{-k} の項が消えた。さらに

$$(3.10) \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0, & (\eta_1 - \eta_2) z^{k-1}, & \dots, & (\eta_1 - \eta_k) z^{k-1} \\ (\eta_2 - \eta_1) z^{k-1}, & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ (\eta_k - \eta_1) z^{k-1}, & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z} \hat{A}_0 - \hat{A}_1\right) \psi = \left\{ \frac{1}{z^{k+2}} \begin{pmatrix} \eta_1^2 \\ \vdots \\ \eta_k^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^{k+3}} \begin{pmatrix} \eta_1^3 \\ \vdots \\ \eta_k^3 \end{pmatrix} + \dots \right\} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta_1}{z} z} \\ \vdots \\ e^{-\frac{\eta_k}{z} z} \end{pmatrix}$$

と $z^{-(k-1)}$ の項も消えて、命題 (3.5) より右辺は自動的に 0 となり、求める式ができた。

上例も同様だが、 η が 0 のまわりで $\eta = \eta_i + \eta_i^1 z + \eta_i^2 z^2 + \dots$ と展開しておく必要がある。結果だけ、しかも $k=2$ の場合だけ書いておく。

$$(3.11) \quad \tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} -\eta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\eta_k \end{pmatrix}$$

$$(2B) \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -\eta_1 & (\eta_1 - \eta_2) \tilde{z}_1^2 \\ (\eta_2 - \eta_1) \tilde{z}_1^2 & -\eta_2 \end{pmatrix}$$

$$(2B) \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} -\eta_1^2 + (\eta_2 - \eta_1) \tilde{z}_1^2 \tilde{z}_2^2 & (\eta_2 - \eta_1) (\tilde{z}_1^2 \tilde{z}_2^2 - \tilde{z}_2^4) + (\eta_1 - \eta_2) \tilde{z}_1^2 \\ (\eta_1 - \eta_2) (\tilde{z}_1^2 \tilde{z}_2^2 - \tilde{z}_2^4) + (\eta_2 - \eta_1) \tilde{z}_1^2 & -\eta_2^2 + (\eta_1 - \eta_2) \tilde{z}_1^2 \tilde{z}_2^2 \end{pmatrix}$$

とおけば、上側の式も得る。子。

命題 (3.7) を示す前に、frame 変換の式を作る。となく。

補題 (3.4)

4. $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ が命題 (3.5) の式を満たす (21) とし、frame B については次が成り立つ。

$$\left(\frac{1}{j^2} B \tilde{A}_1 B^{-1} + \frac{1}{j} B \tilde{A}_2 B^{-1} + B \tilde{A}_3 B^{-1} \right) B\psi = -\frac{\eta}{j^2} B\psi$$

$$\left(\frac{1}{j} B \tilde{A}_1 B^{-1} + \frac{\partial B}{\partial z} B^{-1} + B \tilde{A}_2 B^{-1} \right) B\psi = \frac{2}{j^2} (B\psi)$$

証明は $\frac{\partial}{\partial z} (B\psi) = \frac{\partial B}{\partial z} \psi + B \frac{\partial \psi}{\partial z}$ より容易に示せる。

命題 (3.7) の証明

命題 (3.8) については $\frac{1}{j} \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1$ が一般には成り立たない。21 211。よこ
 21 frame 変換 $1 \sim \frac{1}{j} B \tilde{A}_1 B^{-1} = B \tilde{A}_1 B^{-1} + \frac{\partial B}{\partial z} B^{-1}$ が成り立つよ
 こに示す。この式は $\frac{\partial B}{\partial z} = B \left(\frac{1}{j} \tilde{A}_1 - \tilde{A}_1 \right)$ と線型常微分方
 程式から常解する。

以上をまとめておく。

定理 (3.15)

$(2,1)(2,10)(2,11)(2,13)(2,15)$ を満たす S に対し 2 , $H^0(S, L^{30} \pi^* \mathcal{O}(k-1))$ の元 $\psi_1, \dots, \psi_k$ を正規化して選ぶ。この特異点のまわりで展開し、 $(3,1)(3,10)(3,11)(3,12)(3,13) = \hat{A}_0, \hat{A}_1, \tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ と決め、さらに線型常微分方程式 $\frac{\partial B}{\partial z} = B \left(\frac{1}{z} \tilde{A} - \hat{A} \right)$ を解いて、 $A_i = B \tilde{A}_i B^{-1}$ とおき、最後に (2.21) で T_1, T_2, T_3 を定めれば、Kahm 方程式の解が得られる。

Remark (3.16)

(a) 方程式 $\frac{\partial B}{\partial z} = B \left(\frac{1}{z} \tilde{A} - \hat{A} \right)$ に初期値に関する自由度、つまり定数行列 $P \in GL(k, \mathbb{C})$ を左からかける ($B \rightarrow PB$) 自由度がある。これが命題 (2.20) の最後、証明の概略 (c) で示した自由度にほかならない。

(b) 定理 (3.15) のとおり、Kahm 方程式の解は、ユニバトリーマニ面 S 、 k 個の基準点 $O_1, \dots, O_k$ 、 $k-2$ 個の挙動 $e^{\frac{\eta_1}{3}z}, \dots, e^{-\frac{\eta_k}{3}z}$ 、および positive divisor $D_1 = (k-1)O_1 + (k-2)O_2 + \dots + (k-2)O_k, \dots, D_{k-1} = (k-2)O_1 + \dots + (k-2)O_{k-1} + (k-1)O_k$ とリウデーマがある。Baker-Akhiezer 函数 (Baker-Akhiezer k -point 函数) $\psi_1, \dots, \psi_k$ を通して構成せられる。この仕組みは [3][4][6][10] と全く同じである。命題 (3.7) の方程式も成り立たすために、リーマ

マン面 S 上、11 個の条件が必要だ。たわけがある。

Nahm 方程式も、所成分 kP hierarchy の reduction になる。2
11 個。ただし、Monopole の topological charge が行列のサインに
反映している。

§4 Nahm 方程式の解の表示

この章では、 $n=2$ の場合に、§3 の正規化された frame
 ψ_1, ψ_2 の具体的表示を与える。一般の場合には、条件
付き（予想を含む形）で最後に記す。

以下、spectral curve S は non-singular (コンパクトリーマン
面) があると仮定する。

まず、記号とリーマン面に関するよく知られた結果をまと
めておく。

一般に、 S が genus g のコンパクトリーマン面の時、
 $H_1(S, \mathbb{Z})$ の生成元 $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ を交点数が $\alpha_i \times \alpha_j = \beta_k \times \beta_l$
 $= 0$ 、 $\alpha_i \times \beta_j = \delta_{ij}$ と選べる。

コンパクトリーマン面上の正則な 1-form の次元は genus に
等しい。その basis $\omega_1, \dots, \omega_g$ を $\int_{\alpha_j} \omega_i = \delta_{ij}$ とした方がよ
く決まる。 $\gamma_k = \int_{\beta_j} \omega_j$ をリーマン面の周期行列という。

$\omega(P, z)$ は、 S 上の 1 点 P を極の pole、他は正則な

1-form (カ2種のAbel微分) $\omega_j(p, k) = 0 \quad j=1, \dots, g$ を満たすものを選び出すことにする。

Θ をリーマン面 S に対するテータ函数, 即ち $u = (u_1, \dots, u_g) \in \mathbb{C}^g$ 上の正則函数で

$$(4.1) \quad \Theta(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^g m_j u_j + \pi i \sum_{j,k=1}^g \tau_{jk} m_j m_k \right)$$

$m = (m_1, \dots, m_g)$ τ_{jk} は S の周期行列

と $\mathbb{C}^g$ で正則級数で定義される函数とする。

ω をアーベル写像, 即ちリーマン面 S のヤコビ多様体 $\mathbb{C}^g / \Gamma$ ($\Gamma = \left\{ \sum_{j=1}^g m_j \omega_j + \sum_{j,k=1}^g m_{jk} \tau_{jk} \mid m_j \in \mathbb{Z}, \omega_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)^t, \tau_{jk} = (\tau_{1j}, \dots, \tau_{gj})^t \right\} \subset \mathbb{C}^g$) の写像で, $p \in S$ に對し

$$\omega(p) = \begin{pmatrix} \int_{p_0}^p \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{p_0}^p \omega_g \end{pmatrix}$$

が定めるものを選び出す。ここに p_0 は S 上の基準点で1個決めておく。 ω を $\mathbb{C}^g$ の写像とみる¹と積分路のとりかたに依存するが、ヤコビ多様体 Γ の写像とみる²と well-defined である。

±2. $g=2$ の時, Θ 関数は系(2.14)より $(g-1)^2=1$ である。

定理(4.2)

次の2つの函数(ポラナーター $\pm \in (0, 2)$ を含む S 上の函数)

ψ_1, ψ_2 が正規化された $H^0(S, L^2 \otimes \pi^* \mathcal{O}(k-1))$ の frame を与える。

$$\psi_1(z;p) = e^{-z} \left\{ \eta_1 \int_{p_0}^p \omega(0_1, 2) + \eta_2 \int_{p_0}^p \omega(0_2, 2) + C_1 \right\} \\ \times \frac{\Theta(w(p) - w(0_1) - z\tau + k) \frac{\partial}{\partial z} \Theta(w(p) - w(0_1) + k) \Big|_{p=0_1}}{\Theta(w(p) - w(0_1) + k) \quad \Theta(-z\tau + k)}$$

$$\psi_2(z;p) = e^{-z} \left\{ \eta_1 \int_{p_0}^p \omega(0_1, 2) + \eta_2 \int_{p_0}^p \omega(0_2, 2) + C_2 \right\} \\ \times \frac{\Theta(w(p) - w(0_2) - z\tau + k) \frac{\partial}{\partial z} \Theta(w(p) - w(0_2) + k) \Big|_{p=0_2}}{\Theta(w(p) - w(0_2) + k) \quad \Theta(-z\tau + k)}$$

ただし, $\{0_1, 0_2\} = S \cap \pi^{-1}([0, 1]) \subset \pi^{-1}(0)$ $0_i = (0, \eta_i)$

p_0 は S の基準点を任意に 1 個決めておく。

$\omega(0_i, 2)$ は, 0_i を 局所座標系 (projection の制限) で

$-\frac{1}{2}ds$ とする主要部をもつ 2 種のアール微分が正規化

されたもの

C_1, C_2 はある定数

$$\tau = \frac{1}{2\pi i} \left(\eta_1 \int_{\beta} \omega(0_1, 2) + \eta_2 \int_{\beta} \omega(0_2, 2) \right)$$

k はリーマン定数。今は genus 1 なので $k = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tau$

$\frac{\partial}{\partial z} \Theta(w(p) - w(0_i) + k) \Big|_{p=0_i}$ はアール写像とテータ函数の合成で定義されるリーマン面上の函数を 0_i のまわりの局所座標系で表わした時の z による 0_i での微分係数

証明の概略

(a) well-defined

積分路のとり方に依存しない事は、ホモトピー変形では

積分値は変わった事とテータ函数の公式から容易に示される。

(b) $S = [0, 0]$ 上正則

ψ_j の形と、テータ函数の0点一般論より $\theta(\omega(p) - \omega(0) + k)$ は0点のみ1位の0点を持つ事から、ただちにわかる。

(c) 0_i での挙動

$$\lim_{z \rightarrow 0_i} e^{\frac{\eta_j}{3} z} \psi_j(z; p) \Big|_{p=0_i} = 0_{ij}$$

と示せばよいが、これも C_1, C_2 で適当に定めれば容易に示せる。

系 (4.3)

A_i の計算に必要な ψ_j の展開項は次のように表わされる。

$$\sum_1^{i,j} (z) = \frac{z}{j_3} \left(e^{\frac{\eta_i}{3} z} \psi_i(z; p) \right) \Big|_{p=0_i} \quad i=1, 2$$

$$\sum_1^{i,j} (z) = \left(e^{\frac{\eta_j}{3} z} \psi_j(z; p) \right) \Big|_{p=0_j} \quad j=1, 2 \quad i=1, 2$$

$$\sum_2^{i,j} (z) = \frac{z}{j_3} \left(e^{\frac{\eta_j}{3} z} \psi_j(z; p) \right) \Big|_{p=0_j} \quad j=1, 2 \quad i=1, 2$$

最後に k が一般の場合に触れておく。positive divisor $0_1, \dots, 0_k$ を

$$\delta_1 = (k-1)0_1 + (k-2)0_2 + \dots + (k-2)0_k$$

...

$$\delta_i = (k-2)0_1 + \dots + (k-2)0_{i-1} + (k-1)0_i + (k-2)0_{i+1} + \dots + (k-2)0_k$$

と示す。 $\deg \sigma_i = (k-1)(k-2) + k-1 = (k-1)^2 = \text{genus}$ である。

定理 (4.4)

0), ..., σ_k が一般因子ならば

$$\psi_i(z, p) = e^{-z \left\{ \eta_1 \int_{p_0}^p \omega(0, 2) + \dots + \eta_k \int_{p_0}^p \omega(0, k, 2) + C_2 \right\}} \\ \times \frac{\theta(\mu(p) - \mu(\sigma_i) - z\psi + k) \frac{\partial}{\partial z} \theta(\mu(p) - \mu(\sigma_i) + H) \Big|_{p=p_i}}{\theta(\mu(p) - \mu(\sigma_i) + k) \theta(\mu(\sigma_i) - \mu(\sigma_i) - z\psi + k)}$$

$$\psi = \left(\frac{1}{2\pi i} \left(\eta_1 \int_{\beta_1} \omega(0, 2) + \dots + \eta_k \int_{\beta_k} \omega(0, k, 2) \right) \right), \dots, \frac{1}{2\pi i} \left(\eta_1 \int_{\beta_1} \omega(0, 2) + \dots + \eta_k \int_{\beta_k} \omega(0, k, 2) \right) \Bigg|_+ \\ \text{が正則化士に frame を与える。}$$

証明は定理 (4.2) と同じである。

Remark (4.5)

spectral curve の条件の, 本ト (2.15) での σ_i の一般であることが導かれたのは正しいかと思うが, 今のところ証明はできていない。

あとがき

以上の内容は, [14] とほぼ同じであるが, 紙数の関係上, いくらか簡略化している。

なお, §2 の結果については, [1] の解説が非常にわかりやすい。

References

- [1] Atiyah, M.F.; Geometry of monopoles, Monopoles in Quantum field theory, World Scientific, Singapore, 3-20 (1982)
- [2] Corrigan, E.; Goddard, P.; Construction of instantons and monopole solutions and reciprocity, Ann. Phys. 154, 253-279 (1984)
- [3] Date, E.; Multi-soliton solutions and quasi-periodic solutions of nonlinear equations of Sine-Gordon type, Osaka J. Math. 19, 125-158 (1982)
- [4] 伊達悦朗, 田中俊一 ; KdV 方程式, 紀伊國屋書店
- [5] Donaldson, S.K.; Nahm's equations and the classification of monopoles, Comm. Math. Phys. 96, 387-408 (1984)
- [6] Dubrovin, B.A.; Theta functions and nonlinear equations, Russ. Math. Surv. 36:2 11-92 (1981)
- [7] Hitchin, N.J.; Monopoles and geodesics, Comm. Math. Phys. 83, 579-602 (1982)
- [8] Hitchin, N.J.; On the construction of monopoles, Comm. Math. Phys. 89, 145-190 (1983)
- [9] Jaffe, A.; Taubes, C.H.; Vortices and monopoles, Boston: Birkhauser, (1980)
- [10] Krichever, I.M.; Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations, Russ. Math. Surv. 32:6, 185-213 (1977)

- [11] Nahm, W.; The algebraic geometry of multimonopoles,
preprint
- [12] Nahm, W.; Self-dual monopoles and colorons, preprint
- [13] 島谷健一郎: Monopole に関する Hitchin, Donaldson, Nahm の結果について,
低次元多様体の幾何学的諸相 (1985)
- [14] 島谷健一郎: Monopole の spectral curve と Nahm の方程式: 修士論文
- [15] Ward, R.; A Yang-Mills-Higgs monopole of charge 2, Comm.
Math. Phys. 79, 317-325 (1981)