

ワルモノ群について

名大・理 梅村 浩

k を体, $x_1, x_2, \dots, x_n$ を k 上の変数とする。体 $k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の k 自己同型群 $\text{Aut}_k k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を n 変数ワルモノ群という。ここでは $k = \mathbb{C}$ と簡単のため, 仮定する。 n 変数ワルモノ群を C_n で表わす。 $n=1$ ならば, C_1 は P_1 の自己同型群 PGL_2 と同型であり, 代数群である。しかし $n \geq 2$ になると, C_n は大きなものになる。例えば, $n=2$ として, $G_\ell = \{ (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 + f(x_1)) \mid f(x_1) \in k[x_1], \deg f(x_1) \leq \ell \}$ とおけば, 任意の正整数 ℓ について, $G_\ell \subset C_2$ であり, $G_\ell \supset G_{\ell-1}$ となる。故に C_2 は任意の正整数次元の代数群を含んでいる。我々は次の古典的な問題を扱う: C_n はどのくらい, 連結代数群を含むか? もっと具体的に述べると, C_n に含まれる連結代数群で極大なものを分類せよ。 $n=2$ の場合の解答は Enriques によって与えられた (Enriques の結果については本文と参照されたい)。 $n=3$

の場合は Enriques と Fano の研究があり，完全にできたと主張してゐる (Enriques e Fano [5], Fano [6]). しかし彼らの証明には，ギョ，7° があるし，結論も正しいかどうかよく解からない。少くとも我々が現在，彼らの論文を読むことは不可能に近い。我々の目的は， $n=3$ の場合の分類を厳密に行ふことである。その際，ただ正確であるというだけでなく，証明や論法は自然であり，理解し易いことが非常に望ましい。我々の研究は進行中であり，この報告が中間的なものである。

Enriques と Fano は次の様な方法で分類する: G を C_{13} に含まれる代数群とする。 G は作用 (G, X) で与えられる (2. 定理 2). X を *equivariant* に完備化して， X は完備とできるとある。さらに *equivariant chow* の lemma, *equivariant resolution* によつて， X は *non-sing. projective* と仮定できるとある。一方 X は *rational* であるので， $h^{0,1} = 0$. したがって， X の Picard 多様体は *discrete* である。故に，

代数群 G は *linear system* を不変にする。彼らは、3次元であること(目に見える?)を利用して、幾何的に *linear system* を分類することによって、変数 U, L モナ群に含まれる代数群を分類する。我々の方法は、全く異なっている。彼らの方法を幾何学的と呼べば、我々の方法は群論的と呼べる。群論的方法の良い点は、厳密であること、および、しばしば高次元の結果をも、もたらすことである(2.定理7, 定理8 参照)。

1. 定義および基本的な事実.

我々の問題は L_n によって考察された、 L_n 群の多様体への作用の局所的な分類に密接に関係しているので、解析幾何の定義をいくつか復習しておく。

定義1 解析 *group germ* とは次の条件を満たす *system* (G, e, A, m) のことである:

- (i) G は複素多様体;
- (ii) $e \in G$;
- (iii) θ は e の近傍から G への解析写像;
- (iv) m は $G \times G$ の開集合 Ω から G への解析写像;
- (v) 任意の $g \in G$ について, $(e, g) \in \Omega$, $(g, e) \in \Omega$,
 $m(e, g) = m(g, e) = g$ が成り立つ;
- (vi) 任意の $\theta(g)$ が定義されるような $g \in G$ について,
 $(g, \theta(g)) \in \Omega$, $(\theta(g), g) \in \Omega$, $m(g, \theta(g)) = m(\theta(g), g)$
 $= e$ が成り立つ;
- (vii) $g, h, k \in G$ であり, $(g, h) \in \Omega$, $(h, k) \in \Omega$,
 $(m(g, h), k) \in \Omega$, $(g, m(h, k)) \in \Omega$ ならば,
 $m(m(g, h), k) = m(g, m(h, k))$ が成り立つ.

$m(g, h)$ を gh と, $\theta(g)$ を g^{-1} と書くことにする。
 以下, 簡便のため (G, e, θ, m) を G と書く.

以下の定義はほぼ明白であるが, 正確に述べる^{と長くなるので省略する}。Bourbaki [1] 参照

定義 2. ^{解析} $\wedge$ group germ の homomorphism.

定義 3 ^{解析} group germ G の多様体 X への作用
のことを law chunk of analytic operation と呼び (G, X)
で表わす。

定義 4. $(G_1, X_1), (G_2, X_2) \in$ law chunk of analytic operation とする。 (G_1, X_1) から (G_2, X_2) への law chunk of analytic operation の homomorphism とは, group germ の homomorphism $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$, X_1 の open set から X_2 の解析写像 τ の組であり, 作用と可換なものをいう。

Lie のある定理. G を解析 group germ とする。
そのとき, Lie 群 G' で G と group germ として
同型なものか存在する。 ^{解析}

しかしながら, law chunk of analytic operation
は一般に global にできると限り有り。

定義 5. law chunk of analytic operation (G, X)
が次の条件を満たすとき, 非原始的といふ:

low chunk of analytic operation (G, X) と homo-
morphism $(G, X) \xrightarrow{(Y, Y')} (G', X')$ で, $\dim X > \dim X'$ か
その Jacobian の rank はある点で 0 でなりたつものが
存在する. 非原始的でなりたつときに原始的であ
るといふ.

Frobenius の定理から 次の結果が導びかれる
定理 6. (G, X) を analytic operation とする. $\dim X \geq 2$
かつ (G, X) が generically transitive でないならば,
 (G, X) は非原始的である.

定理 7. G を Lie 群, H を閉部分群, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ をそれぞ
れの Lie 環とする. そのとき $(G, G/H)$ が 原始的
である必要十分条件は $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の Lie 部分代数
として極大である ことである.

Lie は $\dim X \leq 2$ の low chunk of analytic
operation (G, X) を分類した. $\dim X = 3$ につ
いては, 原始的なものの全てを, 非原始的なものの
一部分を分類した. $\dim X = 4$ の原始的なものは
Morozoff が分類した.

定理 8 (Lie [7]). (G, X) を *low chunk of analytic operation* とする。 (G, X) が効果的であり (定義は下に述べる) , $\dim X = 3$, かつ原始的ならば (G, X) は *low chunk of analytic operation* と 1 2 次のものに同型である;

- (1) (PGL_4, P_3)
- (2) (GTA_3, A_3)
- (3) $(SGTA_3, A_3)$
- (4) (PSp_4, P_3)
- (5) (PSO_4, P_3)
- (6) (GTE_3, A_3)
- (7) (GS_3, A_3)
- (8) $(PSO_5, \{x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_4^2 = 0\} \subset P_4)$.

記号の意味は次の通りである: GTA_3 はアフィン変換群。 $SGTA_3$ は体積を不変にするアフィン変換全体のなす群。 PSp_4, PSO_4 はそれぞれ, Sp_4, SO_4 の自然な 4 次の表現の射影化。 GTE_3 はユークリッド変換群, GS_3 は相似変換群。 SO_5 の 5 次の表現は $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_4^2 = 0$ を不変にする。 その 2 次超曲面への作用が (8) である。

$\dim X = 4$ の場合の同様な分類が Morozoff [9] にあるが、スペースをとるので、ここには記さない。

定義 9. (G, X) を law chunk of analytic operation, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする. G が局所的に X に作用するので, Lie 環の homomorphism $\mathfrak{g} \rightarrow H^0(X, T_x)$ が得られる. この homomorphism が単射であるとき (G, X) は効果的であるという.

以上, 解析的なカテゴリーで行った定義は代数的にも行える. そうして定義される概念は, 形容詞「解析的」を「代数的」に替えることよって呼ばれる. 例えば, 代数 group germ, 代数 group germ の homomorphism, law chunk of algebraic operation 等である. ただし, 定義 5 には解析的という形容詞がついていないので次の様にする.

定義 10. law chunk of algebraic operation (G, X)

が次の条件を満すとき, de Jonquieres 型とい
う: law chunk of analytic operation (G', X') と
homomorphism $(G, X) \xrightarrow{(4.5)} (G', X')$ で, $\dim X > \dim X'$
かつこの像の閉包の次元は正となるものが存
在する。

次の定理は Lie のある定理に相当する。

定理 11. G を代数 group germ とする。そのと
き, 代数群 G' で G と代数 group germ として同
型なものが存在する。

解析的な場合との大きな違いは次の定理で
ある。

定理 12. (G, X) を law chunk of algebraic operation
とする。そのとき, algebraic operation (G', X')
で, (G, X) と law chunk of algebraic operation
として同型なものが存在する。

定理 11, 12 は Weil による。証明は Rosenlicht [10]
参照。

次の定理は Frobenius の定理に付添してゐる。

定理 13. (G, X) は algebraic operation とする。
 X の G 不変な開集合 U で U/G が存在するよ
 うなものがある。

系 14. (G, X) は algebraic operation とする。 (G, X)
 が generically intransitive かつ $\dim X \geq 2$ ならば、
 (G, X) は de Jonquieres 型である。

系 15. (G, X) は algebraic operation とする。 G が
 可解 かつ $\dim X \geq 2$ ならば、 (G, X) は de Jonquieres
 型である。

証明. G に関する条件から、 G の $\sqrt[n]{n}$ 次部分群
 H が存在する。 (H, X) に定理 13 を使えば、 low
 chunk of algebraic operation の homomorphism
 $(H, X) \xrightarrow{(\text{Id}, \psi)} (H, U/H)$ をえら。 H は正規だから、
 G は H の orbit を入れ換える。 つまり G は U/H
 に作用して $(\text{Id}, \psi): (G, X) \rightarrow (G, U/H)$ は low
 chunk of algebraic operation の homomorphism であ
 る。

定理 7 には次の定理が対応する。

定理 16. G を代数群, H を G の閉部分群とする。
 $(G, G/H)$ が de Jonquières 型である必要十分条件は,
 G の閉部分群 K で $H \subsetneq K \subsetneq G$ かつ $\dim H < \dim K$ と
 なるものが存在することである。

代数多様体のカテゴリーから, 解析多様体
 のカテゴリーへの自然な functor を α_n で表すわ
 ず: G が代数 group germ なら G^{α_n} は解析 germ
 であり, law chunk についても, それらの間
 の homomorphism についても同様である。 (G, X)
 を law chunk of algebraic operation で de Jonquières
 型とすれば, $(G^{\alpha_n}, X^{\alpha_n}) = (G, X)^{\alpha_n}$ は非原始的
 である。この逆が殆んど正しいことが後に解
 かる。

2. C_3 に含まれる代数群の分類

特に, こゝからなり限り, 代数群は連結であるとする。クシモノ群に代数群が含まれてゐるとりうことを厳密に定義しなければならぬ。 n 変数クシモノ群 C_n は $\mathbb{P}_n$ の双有理変換群と同型である。一方 $\mathbb{P}_n$ の双有理変換群 $\text{Birat-Aut } \mathbb{P}_n$ は $k (= \mathbb{C})$ 上の代数多様体のカテゴリーから群のカテゴリーへの *functor* になる。したがって, C_n は群 *functor* となる。もっと詳しく述べるに, 代数多様体 T に対して, $C_n(T) = \text{Birat-Aut}_T(T \times \mathbb{P}_n)$ とおく。代数群も当然, 群 *functor* である。

定義 1. G を代数群とする。 G から C_n の準同型とは, 群 *functor* の準同型を意味する。 G が C_n に含まれるとは, 準同型が与えられ, それによつて G が C_n の部分 *functor* になることを意味するとする。

Demazure [3] により, 準同型 $G \rightarrow C_n$ とおえる

ことと, law chunk of algebraic operation (G, P_n)
 と与えることは同値である。一方, 1の定理
 12によつて, law chunk of algebraic operation (G', X')
 と law chunk of analytic operation の同型 (1.5):
 $(G, X) \rightarrow (G', X')$ が存在する。 G と G' が φ によ
 つて双正則同型であることが導かれ, $G = G'$,
 $\varphi = \text{Id}$ と仮定できる。逆に, X' を n 次元の有理
 多様体とし, algebraic operation (G, X') と与えら
 れれば, 双有理写像 $\psi: X' \rightarrow P_n$ を望めばと law
 chunk of algebraic operation (G, P_n) が, 従つて,
 準同型 $G \rightarrow G_n$ が決まる。このとり方は G_n をけ
 あるので次のことが証明された。

定理2. G_n に含まれる代数群 G の共役類を与え
 ることと, 効果的な algebraic operation (G, X)
 で, X が n 次元, 有理多様体を与えることは同値
 である。

注意. 厳密には, $\{G_n \text{ に含まれる代数群 } G\} / \text{共役}$
 $\simeq \{(G, X) \mid (G, X) \text{ は効果的な algebraic operation,}$

X は n 次元有理多様体 $\setminus$ (law chunk of algebraic operation の同値). τ あり. C_m に含まれる代数群 G を与えたとき, G の共役類を与え $\wedge$ ^{効果的な} algebraic operation $\vee$ が一意的に定まらねけてはなり. (G, X)

$\vee$ ^{以下} C_m に含まれる代数群の $\vee$ ^{共役類の} 代りに, n 次元有理多様体への効果的な algebraic operation を与える. C_m に含まれる代数群は次の定理によって限定される.

定理 (Matsumura [8]). G を代数群, X を代数多様体とする. G が X に効果的に作用すると仮定する. そのとき, G からアーベル多様体 A への surjective homomorphism があれば, 次の不等式が成立する: $\dim A \leq X$ の irregularity.

この定理を我々の場合に使う. 有理多様体の irregularity は 0 であるので, $\dim A \leq 0$ となる. 従って, 構造定理から次の定理を得る.

定理3. クルモナ群 C_n に含まれる代数群は線型である。

定義4. $G \in C_n$ に含まれる代数群とする。
 G は有理多様体 X への algebraic operation (G, X) に対応してりるとする。 G が原始的 (resp. 非原始的) であるとは, $(G, X)^{an}$ が原始的 (resp. 非原始的) であることを意味するものとする。 G が de Jonquieres 型であるとは, (G, X) が de Jonquieres 型であることを言う。

この定義は (G, X) のとり方によらる。

定理5 (Enriques). C_2 に含まれる代数群は, 共役を除いて, 次の代数群に含まれる:

(1) (PGL_3, P^2) , (2) $(PGL_2 \times PGL_2, P^1 \times P^1)$, (3)
 $(Aut^0 F_m, F_m)$, ここで $F_m = P(O_{P^1} \oplus O_{P^1}^{(m)})$, $m \geq 2$

定理5の(1)は原始的であり, (2)と(3)は de Jonquieres 型である。我々は, C_3 で同様のことをしたりのであるが, 先づ原始的な群につい

を参照する.

定理 6. Cr_3 に含まれる原始的な代数群は、^{共役をとりて} 次のものに限られる: (1) (PGL_4, P_3) , (2) (GTA_3, A_3) , (3) $(SGTA_3, A_3)$, (4) (PS_{p_4}, P_3) , (5) (PSO_4, P_3) , (6) (GTE_3, A_3) , (7) (GS_3, A_3) , (8) $(PSO_5, \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0\} \subset P_4)$, (9) $(SO_4, SO_4/K)$, ここで,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SO_4 \right\}.$$

証明は, analytic local な分類, 1 の定理 8 から出発し, analytic global な分類, 次に algebraic global な分類をする (Umemura [12] 参照).

定理 6 の系. Cr_3 に含まれる原始的な代数群は, 共役をとりて, 次のものに含まれ, ^{Cr_3 の代数群として} 次のものは極大である: (1) (PGL_4, P_3) , (2) $(PSO_5, \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0\} \subset P_4)$.

実際, (2), (3), (4), (5), (6), (7) は (1) に含まれ, (8) は (2) に含まれる. 原始的な群は非原始的な群に含まれるので, 原始的な代数群のありたで

極大なら，代数群として極大である。

我々の論法の長所は，4次元に對しても使えることであり，Morozoff [9] の分類から出発して，定理5と同様な結果を証明することが出来る。系に相当する部分のみを述べて，

定理7. C_4 に含まれる原始的な代数群は，共役をのぞいて，次のものに含まれ，かつ次のものは， C_4 の代数群として，極大である：
 1) (PGL_5, P_9) , 2) $(PSO_6, \{x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_5^2 = 0\} < P_5)$.

さらに，一般に次のことが成り立つ。

定理8. G が C_n に含まれる原始的な代数群とする。 G は次のものに限る：

(a) G が reductive でないとき， G は n 変数 affine の部分変換

(b) G が reductive のとき， G は必然的に半単純で，

(b-1) G 単純

(b-2) G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると，単純 Lie 環 $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$

$\eta = \eta' \times \eta''$ と存する。

注意. 定理 8 から, 次のことがわかる。

$(G_1, G_1/H_1), (G_2, G_2/H_2)$ 原始的な algebraic operation とする。次は同値

- 1) $(G_1, G_1/H_1)$ と $(G_2, G_2/H_2)$ が algebraic operation として同型
- 2) $(G_1, G_1/H_1)$ と $(G_2, G_2/H_2)$ が law chunk of algebraic operation として同型。
- 3) $(G_1, G_1/H_1)^{an}$ と $(G_2, G_2/H_2)^{an}$ が analytic operation として同型。

証明のアイディア。1) $\Rightarrow$ 2), 1) $\Rightarrow$ 3) は自明。

2) $\Rightarrow$ 1) は known (Rosenlicht [10])。3) $\Rightarrow$ 1) が定理 8 から導びかれる。

次に, 非原始的な群を考察する。次の定理は, 非原始的な群の多くは de Jonquières 型であることを示している。

定理 9. $G \in C_3$ に含まれる, 非原始的な代数群とする. $\dim G \geq 4$ ならば, G は de Jonghières 型である.

この定理は, Enriques-Fano [5] に述べられている. Umemura [13] に, 現代的で明解な証明がある. この定理を用いれば, C_3 に含まれる非原始的な群の次元は 3 以下であることがわかる. 一方, これと 1 の系 14, 系 15, および 2 次元以下の代数群は可解であること, 3 次元の可解となり代数群は SL_2 , SO_3 に限えることから, C_3 に含まれる非原始的な代数群 G は等式空間 $(G, G/H)$ で与えられる: ここで, $G = SL_2$ または SO_3 , H は G の有限部分群である. SL_2 または SO_3 の有限部分群はよく知られており (例えば, Walter [14]): SO_3 について言えば, 巡回群, 2 面体群, 4 面体群, 8 面体群, 20 面体群である. SL_2 は SO_3 の 2 次の covering であるので, SL_2 の有限部分群も, 本質的に SO_3 の有限部分群と同じである. $(G, G/H)$ のうち, effective でありかつ

を除くと、次のものが残る：(1) $(SL_2, SL_2/\Gamma_m)$,
 Γ_m は位数が奇数 m の巡回群, (2) $(SO_3, SO_3/\Gamma_m)$,
 Γ_m は位数が整数 m の巡回群, (3) $(SL_2, SL_2/D_{2m})$,
 D_{2m} は 2 面体群であり, m は奇数, (4) $(SO_3, SO_3/\Gamma)$,
 Γ は 4 面体, 8 面体, または 20 面体群.

一方 1 の定理 16 を使って de Jonquières を除くことができ、

定理 10. Cr_3 に含まれる代数群で、非原始的であり de Jonquières 型でないものは次に限る：

$(SO_3, SO_3/\Gamma)$, Γ は 4 面体, 8 面体, または 20 面体群.

定理 10 の群は、自分より大きな連結な非原始的な Cr_3 の代数群に含まれることはない。その様な群は、定理 9 によって、de Jonquières 型になってしまうからである。したがって、定理 10 の群を全み得るのは、 Cr_3 の原始的な群であり、それらは定理 6 の系によって、

$(PGL_4, \mathbb{P}_3)$, $(PSO_5, \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0\} \subset \mathbb{P}_4)$
 と仮定してよい. 例えば, $\pm L(SO_3, SO_3/P)$ が
 $(PGL_4, \mathbb{P}_3)$ に含まれるとすると, $(SO_3, SO_3/P)$ から
 $(PGL_4, \mathbb{P}_3)$ への law chunk of algebraic operation
 の homomorphism がある. $(SO_3, SO_3/P)$ は
 homogeneous space であるので, Rosenlicht [10]
 に $r=2$, law chunk の homomorphism は
 algebraic operation の homomorphism となる.
 故に, homomorphism $f: SL_2 \rightarrow SL_4$ を得る.
 この表現の表現空間を V とすると, $v \in V$ で
 v は $\rho(\bar{\Gamma})$ によって不変となるものが存在
 しなければならず, ここで $\bar{\Gamma}$ は自然写写
 像 $SL_2 \rightarrow SO_3$ による Γ の逆像. 一方 $V \cong H$, SL_2
 の既約表現の直和であり, 既約表現は 2 重根
 の多項式で与えられるので, $(SO_3, SO_3/P)$ が
 $(PGL_4, \mathbb{P}_3)$ に含まれるか, どうかは多面体群
 の不変式の問題に帰着する. 多面体群の不変
 式は 19 世紀によく知られており (Clebsch [2])
 ので次の結果を得る.

定理 11. C_3 に含まれる代数群 (の共役類)
 $(SO_3, SO_3/p)$ は, Γ が 4 面体群のとき,
 $(PSO_5, \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0\} \subset P_4)$ に含まれる.
 Γ が 8 面体, または 20 面体群ならば, $(SO_3, SO_3/p)$
 は C_3 に含まれる代数群 (の共役類) として極大で
 ある.

以上により, 我々の問題, 3 変数 7 レモナ
 群に含まれる代数群の分類, を解決するため
 には, de Jonquières 型の群を分類しなくては
 ならない. Fano [6] は, de Jonquières 型の群を 12
 の族に分類するが, これが正しいか今のとこ
 ろ, よくわかっていない.

文 献

- [1] Bamba ki, N. Groupes et algèbre de Lie, Chapitre 3,
 groupes de Lie, Hermann, Paris 1972.
- [2] Clebsch, A. Theorie der binären algebraischen
 Formen, Teubner, Leipzig 1872.

- [3] Demazure, M. Sous-groupes algébrique de rang maximum du groupe de Cremona, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 3, 1970, p. 507-588.
- [4] Enriques, F. Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano, *Rendic. Accad. dei Lincei*, 1893, p. 468-473.
- [5] Enriques, F e Fano, G. Sui gruppi di trasformazioni cremoniane dello spazio, *Annali di Matematica pura ed applicata*, s. 2^a, to. 15. 1897, p. 59-98.
- [6] Fano, G. I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio, *Atti R. Acc. di Torino*, Vol. 33, 1898, p. 221-271.
- [7] Lie, S. *Theorie der Transformationsgruppen*, dritter und letzter Abschnitt, Teubner, Leipzig 1893.

- [8] Matsumura, H. On algebraic groups of birational transformations, *Lincei-R. Sc. fis. mat e mat.*, Vol 34, 1963.
- [9] Морозов, В. Sur les groupes primitifs, *МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК*, Т. 5(47), N.2, 1939.
- [10] Rosenlicht, M. Some basic theorems on algebraic groups, *Amer. J. of Math.*, 78, 1956, 881-933.
- [11] Sumihiro, H. Equivariant completion, *J. Math. Kyoto Univ.* 14-1 (1974) 1-28.
- [12] Umemura, H. Sur les sous-groupes algébriques primitifs du groupe de Cremona à trois variables, *Nagoya Math. J.*, 79 (1980).
- [13] ——— Maximal algebraic subgroups of the Cremona group of three variables - imprimitive algebraic subgroups of exceptional

type. preprint.

[14] Weber, H. *Lehrbuch der Algebra*, Zweiter Band,
Braunschweig 1899.