

A HAMILTONIAN PATH INTEGRAL FOR A DEGENERATE PARABOLIC PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATOR

東京大学数理科学研究科 熊ノ郷 直人 (NAOTO KUMANO-GO)

第0節. 序

$m(>0)$ 階放物型作用素の基本解を、C.Tsutsumi [10] とは異なった方法で構成する。C.Tsutsumi は、漸近展開を用いて近似解を構成し、その近似解に Levi-Mizohata の方法を適用して、基本解を構成した。それに対して、ここでは、Hamiltonian 経路積分を用いて基本解を構成する。Hamiltonian 経路積分を用いれば、基本解の表象を実際にかくことができる。また、この Hamiltonian 経路積分は $S_{\lambda,\rho,\delta}^{2m}$ の位相で収束し、 $S_{\lambda,\rho,\delta}^0$ の位相で弱収束する。つまり、 $R_{x,\xi}^{2n}$ 上で広義一様収束する。

第1節では、擬微分作用素の基本的な性質を紹介する。これらの性質は第2節で用いる。(詳細は、H.Kumano-go [6] の第7章§1と§2を参照。) 第2節では、 $m(>0)$ 階放物型作用素の基本解を、Hamiltonian 経路積分を用いて構成する。

第1節. 擬微分作用素

$x = (x_1, \dots, x_n) \in R_x^n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_\xi^n$ と多重指標 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ に対して、

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, \quad \beta! = \beta_1! \dots \beta_n!,$$

$$x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, \quad \langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}, \quad \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2},$$

$$\partial_{\xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad D_{x_j} = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_\xi^\alpha = \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{\xi_n}^{\alpha_n}, \quad D_x^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_n}^{\beta_n}$$

とする。

R^n 上の Schwartz の急減少関数族を、 S で表す。 S は、セミノルム

$$|u|_{l,S} \equiv \max_{k+|\alpha| \leq l} \sup_x |\langle x \rangle^k \partial_x^\alpha u(x)| \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

で、フレッシュ空間となる。

関数 $a(\eta, y)$ の振動積分を、

$$O_s - \iint e^{-iy \cdot \eta} a(\eta, y) dy d\eta \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy \cdot \eta} \chi(\epsilon \eta, \epsilon y) a(\eta, y) dy d\eta$$

で定義する。ただし、 $\chi(\eta, y) \in S$ で $\chi(0, 0) = 1$ を満たすとし、 $d\eta \equiv (2\pi)^{-n} d\eta$ とする。
(詳細は、H.Kumano-go [6] の第1章§6を参照。)

[定義 1.1] (尺度関数 $\lambda(\xi)$) .

R_ξ^n 上の実数値 C^∞ -関数 $\lambda(\xi)$ が尺度関数であるとは、任意の α に対して、ある定数 $A_0, A_\alpha > 0$ が存在して、

$$1 \leq \lambda(\xi) \leq A_0 \langle \xi \rangle, \quad (1.1)$$

$$|\partial_\xi^\alpha \lambda(\xi)| \leq A_\alpha \lambda(\xi)^{1-|\alpha|} \quad (1.2)$$

を満たすことをいう。

例.

$$1^\circ \lambda(\xi) = \langle \xi \rangle.$$

$$2^\circ \lambda(\xi) = \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{2m_j} \right\}^{1/(2m)}, \quad (m_j \in \mathbb{N}, \quad m \equiv \max_{1 \leq j \leq n} \{m_j\}).$$

[定義 1.2] (擬微分作用素) .

$m \in \mathbb{R}, 0 \leq \delta \leq \rho \leq 1, \delta < 1$ とする。

$R_{x,\xi}^{2n}$ 上の C^∞ -関数 $p(x, \xi)$ が $S_{\lambda,\rho,\delta}^m$ -クラスの表象であるとは、任意の α, β に対して、ある定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在して、

$$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \lambda(\xi)^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}, \quad (1.3)$$

を満たすことをいう。ただし、 $p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) \equiv \partial_\xi^\alpha D_x^\beta p(x, \xi)$ とする。

表象 $p(x, \xi)$ をもつ擬微分作用素 $p(X, D_x)$ を、

$$p(X, D_x)u(x) \equiv \iint e^{i(x-x') \cdot \xi} p(x, \xi) u(x') dx' d\xi \quad (u \in \mathcal{S}) \quad (1.4)$$

で定義する。ただし、 $d\xi \equiv (2\pi)^{-n} d\xi$ とする。

(注意).

1° 記号を簡明にするため、 $p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) \equiv \partial_\xi^\alpha D_x^\beta p(x, \xi)$, $p^{(\alpha)}(x, \xi) \equiv \partial_\xi^\alpha p(x, \xi)$,
 $p_{(\beta)}(x, \xi) \equiv D_x^\beta p(x, \xi)$ とする。

2° 表象のクラス $\mathcal{S}_{\lambda, \rho, \delta}^m$ は、セミノルム

$$|p|_l^{(m)} \equiv \max_{|\alpha+\beta| \leq l} \sup_{(x, \xi)} \{ |p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \lambda(\xi)^{-(m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|)} \} \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

で、フレッシュ空間となる。

3° $p(X, D_x): \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ の連続性は明かである。さらに、 $p(X, D_x): \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ は、

$$(p(X, D_x)u, v) \equiv (u, p(X, D_x)^*v) \quad \text{for } u \in \mathcal{S}', v \in \mathcal{S} \quad (1.6)$$

により、 $p(X, D_x): \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ に拡張できる。

[定理 1.3] (多重積).

M は正の定数とし、実数列 $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ は

$$\sum_{j=1}^\infty |m_j| \leq M < \infty. \quad (1.7)$$

を満たすとする。

このとき、任意の $\nu = 1, 2, \dots$ と $p_j(x, \xi) \in \mathcal{S}_{\lambda, \rho, \delta}^{m_j} (j = 1, 2, \dots, \nu+1)$ に対して、
ある $q_{\nu+1}(x, \xi) \in \mathcal{S}_{\lambda, \rho, \delta}^{\bar{m}_{\nu+1}} (\bar{m}_{\nu+1} \equiv m_1 + m_2 + \dots + m_{\nu+1})$ が存在し、

$$q_{\nu+1}(X, D_x) = p_1(X, D_x) p_2(X, D_x) \cdots p_{\nu+1}(X, D_x) \quad (1.8)$$

を満たす。

さらに、任意の非負整数 l に対して、ある定数 A_l と非負整数 l' が存在し、

$$|q_{\nu+1}|_l^{(\bar{m}_{\nu+1})} \leq (A_l)^\nu \prod_{j=1}^{\nu+1} |p_j|_{l'}^{(m_j)} \quad (1.9)$$

を満たす。ここで、定数 A_l と非負整数 l' は、正の定数 M と非負整数 l によって決まるが、 ν にはよらない。

(証明). H.Kumano-go [6] の第7章§2の定理2.4を参照。 □

[定理 1.4].

$p_j(x, \xi) \in S_{\lambda, \rho, \delta}^{m_j} (j = 1, 2)$ とし、 $q_\theta(x, \xi) (|\theta| \leq 1)$ を、

$$q_\theta(x, \xi) \equiv O_s - \iint e^{-iy \cdot \eta} p_1(x, \xi + \theta \eta) p_2(x + y, \xi) dy d\eta \quad (1.10)$$

で定義する。

このとき、 $\{q_\theta(x, \xi)\}_{|\theta| \leq 1}$ は $S_{\lambda, \rho, \delta}^{m_1+m_2}$ の有界集合となる。

さらに、任意の非負整数 l に対して、 θ によらない、ある定数 A_l と非負整数 l' が存在し、

$$|q_\theta|_l^{(m_1+m_2)} \leq A_l |p_1|_{l'}^{(m_1)} |p_2|_{l'}^{(m_2)} \quad (|\theta| \leq 1) \quad (1.11)$$

を満たす。

(証明). H.Kumano-go [6] の第 2 章 § 2 の補題 2. 4 または第 7 章 § 2 の補題 2. 2 を参照。

□

第 2 節. 主定理

[定理 2.1] (主定理).

$K(t; x, \xi) \in C^0([0, T]; S_{\lambda, \rho, \delta}^m) (m > 0, 0 \leq \delta < \rho \leq 1)$ は、次の条件 (a1), (a2) を満たすとする。:

(a1) ある定数 $c > 0$ と $m' (0 \leq m' \leq m)$ が存在し、

$$\operatorname{Re} K(t; x, \xi) \leq -c \lambda(\xi)^{m'} \text{ on } [0, T] \times \mathbf{R}_{x, \xi}^{2n}. \quad (2.1)$$

を満たす。

(a2) 任意の α, β に対して、ある定数 $C_{\alpha, \beta}$ が存在し、

$$|K_{(\beta)}^{(\alpha)}(t; x, \xi) / \operatorname{Re} K(t; x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \lambda(\xi)^{\delta|\beta| - \rho|\alpha|} \text{ on } [0, T] \times \mathbf{R}_{x, \xi}^{2n} \quad (2.2)$$

を満たす。

このとき、次の (1) - (5) が成立する。:

- (1) $\Delta_{t,s} : (T \geq) t \equiv t_0 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} \equiv s (\geq 0)$ を区間 $[s, t]$ の任意の分割とし、作用素 $e^{(t_j - t_{j+1})K(t_{j+1})}(X, D_x)$ を、

$$e^{(t_j - t_{j+1})K(t_{j+1})}(X, D_x)u(x) \equiv \iint e^{i(x-x') \cdot \xi} e^{(t_j - t_{j+1})K(t_{j+1}; x, \xi)} u(x') dx' d\xi \quad (2.3)$$

で定義する。

このとき、ある $p(\Delta_{t,s}; x, \xi) \in S_{\lambda, \rho, \delta}^0$ が存在し、

$$\begin{aligned} p(\Delta_{t,s}; X, D_x) &= e^{(t-t_1)K(t_1)}(X, D_x) e^{(t_1-t_2)K(t_2)}(X, D_x) \\ &\quad \cdots e^{(t_\nu-s)K(s)}(X, D_x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

が成立する。

- (2) 任意の非負整数 l に対して、ある定数 C_l, C'_l と非負整数 l' が存在し、

$$|p(\Delta_{t,s})|_l^{(0)} \leq C_l, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} &|p(\Delta_{t,s}) - p(\Delta'_{t,s})|_l^{(2m)} \\ &\leq C'_l(t-s) \left(|\Delta_{t,s}| + \sup_{|t'-t''| \leq |\Delta_{t,s}|} |K(t') - K(t'')|_l^{(m)} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

が成立する。ここで、 $\Delta_{t,s} : (T \geq) t \equiv t_0 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} \equiv s (\geq 0)$ は区間 $[s, t]$ の任意の分割であり、 $\Delta'_{t,s}$ は分割 $\Delta_{t,s}$ の任意の細分である。また、 $|\Delta_{t,s}|$ は分割の幅 $|\Delta_{t,s}| \equiv \max_{0 \leq j \leq \nu} |t_j - t_{j+1}|$ とする。特に、定数 C_l, C'_l と非負整数 l' は、 ν や $\Delta_{t,s}$ や $\Delta'_{t,s}$ にはよらない。

- (3) ある $p^*(t, s; x, \xi) \in S_{\lambda, \rho, \delta}^0$ が存在し、分割の幅 $|\Delta_{t,s}| \rightarrow 0$ のとき、 $p(\Delta_{t,s}; x, \xi) (\in S_{\lambda, \rho, \delta}^0)$ は、 $p^*(t, s; x, \xi) (\in S_{\lambda, \rho, \delta}^0)$ に $S_{\lambda, \rho, \delta}^{2m}$ の位相で収束する。さらに、 $p(\Delta_{t,s}; x, \xi)$ は次のように書ける：

$$\begin{aligned} p^*(t, s; x, \xi) &= \lim_{|\Delta_{t,s}| \rightarrow 0} O_s - \iint \cdots \iint e^{-i \sum_{j=1}^\nu y^j \cdot \eta^j} \\ &\quad \times \exp \left(\sum_{j=0}^\nu (t_j - t_{j+1}) K(t_{j+1}; x + \bar{y}^j, \xi + \eta^{j+1}) \right) dy^1 d\eta^1 \cdots dy^\nu d\eta^\nu. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ただし、 $\bar{y}^0 \equiv 0$, $\bar{y}^j \equiv y^1 + y^2 + \cdots + y^j$, $\eta^{\nu+1} \equiv 0$ とし、収束は、 $R_{x,\xi}^{2n}$ 上の広義一様収束である。

(4) $u \in L^2$ に対して、擬微分作用素 $U(t, s) \equiv p^*(t, s; X, D_x)$ は次の関係を満たす。:

$$\begin{aligned} & U(t, s)u(x) \\ &= \lim_{|\Delta_{t,s}| \rightarrow 0} e^{(t-t_1)K(t_1)}(X, D_x) e^{(t_1-t_2)K(t_2)}(X, D_x) \cdots e^{(t_\nu-s)K(s)}(X, D_x)u(x) \\ &= \lim_{|\Delta_{t,s}| \rightarrow 0} \iint \cdots \iint \exp \left(\sum_{j=0}^{\nu} i(x^j - x^{j+1}) \cdot \xi^{j+1} + (t_j - t_{j+1})K(t_{j+1}; x^j, \xi^{j+1}) \right) \\ & \quad \times u(x^{\nu+1}) dx^{\nu+1} d\xi^{\nu+1} \cdots dx^1 d\xi^1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

ただし、 $x^0 \equiv x$ とし、収束は、 L^2 -収束である。

(5) $U(t, s) \equiv p^*(t, s; X, D_x)$ は、 m 階放物型作用素 $L \equiv \partial_t - K(t, X, D_x)$ に対する基本解となり、

$$\begin{cases} LU(t, s) = 0 & \text{on } (s, T] \\ U(s, s) = I & (0 \leq s \leq T) \end{cases} \quad (2.9)$$

を満たす。

(注意).

1° 条件 (a1), (a2) は、ある定数 M に対し $|\xi| \geq M$ を満たす任意の ξ で成立すれば、十分である。実際、この場合、十分大きな $R > 0$ が存在して、表象 $K_R(t; x, \xi) \equiv K(t; x, \xi) - R$ は、任意の ξ に対して (a1), (a2) を満たす。 $U_R(t, s)$ を $L_R \equiv \partial_t - K_R(t; X, D_x)$ の基本解とすれば、 $U(t, s) \equiv e^{(t-s)R} U_R(t, s)$ は L の基本解となる。

2° $(t_j - t_{j+1})K(t_{j+1}; \cdot, \cdot)$ を $\int_{t_{j+1}}^{t_j} K(\tau; \cdot, \cdot) d\tau$ で置き換えてもよい。この場合、(2.6) は

$$|p(\Delta_{t,s}) - p(\Delta'_{t,s})|_l^{(2m)} \leq C'_l(t-s)|\Delta_{t,s}|, \quad (2.6')$$

で置き換えることができる。

3°

$$L \equiv \partial_t + a(t)|x|^{2l}(-\Delta)^m + (-\Delta)^{m'} \quad (0 \leq a(t) \in C[0, T], m - m' < l).$$

を考える。 $\rho = 1$, $\delta = (m - m')/l$, $m \rightarrow 2m$, $m' \rightarrow 2m'$ とおけば、

表象 $a(t)|x|^{2l}|\xi|^{2m} + |\xi|^{2m'}$ は、条件 (a1) と (a2) を満たす。それゆえ、これらの条件は通常の放物型作用素だけでなく、ある種の退化放物型作用素でも満たされる。

定理 2.1 を証明する前に、いくつかの補題を用意する。

まず、 $T \geq t \geq s \geq 0$ に対して、 $p(t, s; x, \xi)$ を、

$$p(t, s; x, \xi) \equiv \exp \left((t - s)K(s, x, \xi) \right) \quad (2.10)$$

で、定義しておく。

次の補題は、漸近展開公式の一般化であり、この論文で本質的な役割を果たす。特に、以下あらわれるすべての定数が、 ν や $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}$ によらないということが重要である。

[補題 2.2].

$\nu = 1, 2, \dots$ 、 $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ とし、 N_0 は $(\rho - \delta)N_0 \geq 2m$ を満たす自然数とする。

$q(\Delta_{t_0, t_1}; x, \xi)$, $q(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi)$ と $r(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi)$ を

$$q(\Delta_{t_0, t_1}; x, \xi) \equiv p(t_0, t_1; x, \xi), \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} q(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \equiv & \sum_{|\alpha^1| + |\alpha^2| + \dots + |\alpha^\nu| < N_0} \frac{1}{\alpha^1! \alpha^2! \dots \alpha^\nu!} \\ & \times p_{(\alpha^\nu)}(t_\nu, t_{\nu+1}; x, \xi) \partial_\xi^{\alpha^\nu} \left(p_{(\alpha^{\nu-1})}(t_{\nu-1}, t_\nu; x, \xi) \partial_\xi^{\alpha^{\nu-1}} \left(\right. \right. \\ & \left. \left. \dots p_{(\alpha^2)}(t_2, t_3; x, \xi) \partial_\xi^{\alpha^2} \left(p_{(\alpha^1)}(t_1, t_2; x, \xi) \partial_\xi^{\alpha^1} \left(p(t_0, t_1; x, \xi) \right) \right) \dots \right) \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} r(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \equiv & \sum_{|\alpha^1| + |\alpha^2| + \dots + |\alpha^\nu| = N_0, |\alpha^\nu| \neq 0} \frac{|\alpha^\nu|}{\alpha^1! \alpha^2! \dots \alpha^\nu!} \\ & \times \int_0^1 (1 - \theta)^{|\alpha^\nu| - 1} O_s - \iint e^{-iy \cdot \eta} p_{(\alpha^\nu)}(t_\nu, t_{\nu+1}; x + y, \xi) \\ & \times \partial_\xi^{\alpha^\nu} \left(p_{(\alpha^{\nu-1})}(t_{\nu-1}, t_\nu; x, \xi + \theta\eta) \partial_\xi^{\alpha^{\nu-1}} \left(\dots p_{(\alpha^2)}(t_2, t_3; x, \xi + \theta\eta) \right. \right. \\ & \left. \left. \times \partial_\xi^{\alpha^2} \left(p_{(\alpha^1)}(t_1, t_2; x, \xi + \theta\eta) \partial_\xi^{\alpha^1} \left(p(t_0, t_1; x, \xi + \theta\eta) \right) \right) \dots \right) \right) dy d\eta d\theta \end{aligned} \quad (2.13)$$

で定義する。

このとき、

$$\begin{aligned} & q(\Delta_{t_0, t_\nu}; X, D_x) p(t_\nu, t_{\nu+1}; X, D_x) \\ & = q(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; X, D_x) + r(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; X, D_x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

が成立する。

さらに、任意の非負整数 l に対して、ある定数 $C_{1,l}, C_{2,l}, C_{3,l}$ が存在し、
任意の $\nu = 1, 2, \dots$ と $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ に対して、

$$|q(\Delta_{t_0, t_\nu})|_l^{(0)} \leq C_{1,l}, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & |q(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}) - p(t_0, t_{\nu+1})|_l^{(2m)} \\ & \leq C_{2,l}(t_0 - t_{\nu+1}) \left((t_0 - t_{\nu+1}) + \sup_{t_0 \geq t' \geq t'' \geq t_{\nu+1}} |K(t') - K(t'')|_l^{(m)} \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$|r(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}})|_l^{(0)} \leq C_{3,l}(t_0 - t_\nu)(t_\nu - t_{\nu+1}) \quad (2.17)$$

が成立する。

(証明).

1° $T \geq t \geq s \geq 0$ に対して、

$$\eta(t, s; x, \xi) \equiv -(t - s) \operatorname{Re} K(s; x, \xi) (\geq 0) \quad (2.18)$$

とおく。さらに、 $\nu = 1, 2, \dots$ と $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ に対して、

$$d(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \equiv \prod_{j=0}^{\nu-1} p(t_j, t_{j+1}; x, \xi), \quad (2.19)$$

$$\eta(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \equiv \sum_{j=0}^{\nu-1} \eta(t_j, t_{j+1}; x, \xi) \quad (2.20)$$

とおく。明らかに、

$$|d(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi)| = \exp \left(-\eta(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \right) \quad (2.21)$$

である。

2° α, β に対して、 $d_{\alpha, \beta}(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi)$ を

$$d_{(\beta)}^{(\alpha)}(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \equiv d_{\alpha, \beta}(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) d(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \quad (2.22)$$

で定義する。このとき、

任意の α, β ($|\alpha + \beta| \geq 1$) と α', β' に対して、ある定数 $C_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'}$ が存在し、
 任意の $\nu = 1, 2, \dots$ と $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ に対して、

$$|d_{\alpha, \beta}^{(\alpha')}(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} \eta(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) \left(\eta(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi) + 1 \right)^{|\alpha + \beta| - 1} \times \lambda(\xi)^{\delta|\beta + \beta'| - \rho|\alpha + \alpha'|} \quad (2.23)$$

が成立する。

3° $\tilde{\alpha}^\nu \equiv (\alpha^1, \dots, \alpha^\nu)$ を $R^{\nu n}$ の多重指標とする。 $f_{\tilde{\alpha}^\nu}(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi)$ を

$$\begin{aligned} & f_{\tilde{\alpha}^\nu}(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) d(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \\ & \equiv p_{(\alpha^\nu)}(t_\nu, t_{\nu+1}; x, \xi) \partial_\xi^{\alpha^\nu} \left(p_{(\alpha^{\nu-1})}(t_{\nu-1}, t_\nu; x, \xi) \partial_\xi^{\alpha^{\nu-1}} \left(\right. \right. \\ & \quad \left. \left. \dots p_{(\alpha^2)}(t_2, t_3; x, \xi) \partial_\xi^{\alpha^2} \left(p_{(\alpha^1)}(t_1, t_2; x, \xi) \partial_\xi^{\alpha^1} \left(p(t_0, t_1; x, \xi) \right) \right) \dots \right) \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

で定義する。このとき、

任意の $N = 1, 2, \dots$ と α, β に対して、ある定数 $C_{N, \alpha, \beta}$ が存在し、
 任意の $\nu = 1, 2, \dots$ と $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ に対して、

$$\begin{aligned} |f_{\tilde{\alpha}^\nu}^{(\alpha)}(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi)| & \leq C_{N, \alpha, \beta} \left(\prod_{k=1}^J \eta(t_{j_k}, t_{j_k+1}; x, \xi) \right) \eta(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \\ & \times \left(\eta(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) + 1 \right)^{2(N-1)} \lambda(\xi)^{-(\rho-\delta)N + \delta|\beta| - \rho|\alpha|} \end{aligned} \quad (2.25)$$

が成立する。ただし、

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_J \leq \nu, \quad |\alpha^{j_k}| \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, J),$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} |\alpha^j| = \sum_{k=1}^J |\alpha^{j_k}| = N$$

とする。

4° $N = 1, 2, \dots$ に対して、 $g_N(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi)$ を、

$$g_N(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \equiv \sum_{|\alpha^1| + |\alpha^2| + \dots + |\alpha^\nu| = N} \frac{1}{\alpha^1! \alpha^2! \dots \alpha^\nu!} f_{\tilde{\alpha}^\nu}(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \quad (2.26)$$

で定義すると、(2.25) より

$$\begin{aligned}
& |g_{N(\beta)}^{(\alpha)}(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi)| \\
& \leq \sum_{J=1}^N \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_J \leq \nu} \sum_{\sum_{k=1}^J |\alpha^{j_k}| = N, |\alpha^{j_k}| \neq 0} \frac{1}{\alpha^{j_1}! \alpha^{j_2}! \dots \alpha^{j_J}!} \\
& \quad \times C_{N, \alpha, \beta} \left(\prod_{k=1}^J \eta(t_{j_k}, t_{j_k+1}; x, \xi) \right) \eta(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \\
& \quad \times \left(\eta(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) + 1 \right)^{2(N-1)} \lambda(\xi)^{-(\rho-\delta)N + \delta|\beta| - \rho|\alpha|} \\
& \leq (nN)^N C_{N, \alpha, \beta} \eta(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \left(\eta(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) + 1 \right)^{2(N-1)} \lambda(\xi)^{-(\rho-\delta)N + \delta|\beta| - \rho|\alpha|} \\
& \quad \times \left(\sum_{J=1}^N \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_J \leq \nu} \prod_{k=1}^J \eta(t_{j_k}, t_{j_k+1}; x, \xi) \right) \quad (2.27)
\end{aligned}$$

となる。よって、

任意の $N = 1, 2, \dots$ と α, β に対して、ある定数 $C'_{N, \alpha, \beta}$ が存在し、
 任意の $\nu = 1, 2, \dots$ と $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ に対して、

$$\begin{aligned}
|g_{N(\beta)}^{(\alpha)}(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi)| & \leq C'_{N, \alpha, \beta} \left(\eta(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \right)^2 \\
& \quad \times \left(\eta(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) + 1 \right)^{3(N-1)} \lambda(\xi)^{-(\rho-\delta)N + \delta|\beta| - \rho|\alpha|} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

が成立する。

5°

$$h_N(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \equiv g_N(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) d(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \quad (2.29)$$

とおく。ここで、

$$\sup_{\eta > 0} \eta^k e^{-\eta} < \infty \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.30)$$

に注意すると、(2.21), (2.23) と (2.28) より、

任意の $N = 1, 2, \dots$ と α, β に対して、
 ある定数 $C'_{\alpha, \beta}$, $C''_{\alpha, \beta}$, $C''_{N, \alpha, \beta}$, $C'''_{N, \alpha, \beta}$, $C''''_{N, \alpha, \beta}$ が存在して、
 任意の $\nu = 1, 2, \dots$ と $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ に対して、

$$|d_{(\beta)}^{(\alpha)}(\Delta_{t_0, t_\nu}; x, \xi)| \leq \begin{cases} C'_{\alpha, \beta} \lambda(\xi)^{\delta|\beta| - \rho|\alpha|} \\ C''_{\alpha, \beta} (t_0 - t_\nu) \lambda(\xi)^{m + \delta|\beta| - \rho|\alpha|} \quad (|\alpha + \beta| \geq 1), \end{cases} \quad (2.31)$$

$$|h_{N(\beta)}^{(\alpha)}(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi)| \leq \begin{cases} C_{N, \alpha, \beta}'' \lambda(\xi)^{-(\rho-\delta)N+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \\ C_{N, \alpha, \beta}''' (t_0 - t_{\nu+1}) \lambda(\xi)^{m-(\rho-\delta)N+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \\ C_{N, \alpha, \beta}'''' (t_0 - t_{\nu+1})^2 \lambda(\xi)^{2m-(\rho-\delta)N+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \end{cases} \quad (2.32)$$

が成立する。

6° さて、

$$q(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) = d(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) + \sum_{N=1}^{N_0-1} h_N(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi), \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} & d(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) - p(t_0, t_{\nu+1}; x, \xi) \\ &= \sum_{j=0}^{\nu} (t_j - t_{j+1}) \left(K(t_{j+1}, x, \xi) - K(t_{\nu+1}, x, \xi) \right) \\ &\quad \times \int_0^1 \exp \left(\theta \sum_{j=0}^{\nu} (t_j - t_{j+1}) K(t_{j+1}, x, \xi) \right) \exp \left((1-\theta)(t_0 - t_{\nu+1}) K(t_{\nu+1}, x, \xi) \right) d\theta \end{aligned} \quad (2.34)$$

に注意すると、(2.31) と (2.32) より、(2.15) と (2.16) を得る。さらに、

$$\begin{aligned} r(\Delta_{t_0, t_{\nu+2}}; x, \xi) &= \sum_{0 < |\alpha^{\nu+1}| < N_0} \frac{|\alpha^{\nu+1}|}{\alpha^{\nu+1}!} \int_0^1 (1-\theta)^{|\alpha^{\nu+1}|-1} \\ &\quad \times O_s - \iint e^{-iy \cdot \eta} h_{N_0-|\alpha^{\nu+1}|}^{(\alpha^{\nu+1})}(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi + \theta\eta) \\ &\quad \times d_{(\alpha^{\nu+1})}(\Delta_{t_{\nu+1}, t_{\nu+2}}; x + y, \xi) dy d\eta d\theta \\ &+ \sum_{|\alpha^{\nu+1}|=N_0} \frac{|\alpha^{\nu+1}|}{\alpha^{\nu+1}!} \int_0^1 (1-\theta)^{|\alpha^{\nu+1}|-1} \\ &\quad \times O_s - \iint e^{-iy \cdot \eta} d^{(\alpha^{\nu+1})}(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi + \theta\eta) \\ &\quad \times d_{(\alpha^{\nu+1})}(\Delta_{t_{\nu+1}, t_{\nu+2}}; x + y, \xi) dy d\eta d\theta \end{aligned} \quad (2.35)$$

に注意すると、(2.31), (2.32) と 定理 1.4 より、(2.17) を得る。

7° 帰納法より、(2.14) を得る。□

次の補題のアイデアは、Fujiwara [3] による。

[補題 2.3] (Fujiwara's skip).

$\Upsilon(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; x, \xi) \in \mathcal{S}_{\lambda, \rho, \delta}^0$ を、

$$\begin{aligned} & p(t_0, t_1; X, D_x) p(t_1, t_2; X, D_x) \cdots p(t_{\nu}, t_{\nu+1}; X, D_x) \\ & \equiv q(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; X, D_x) + \Upsilon(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; X, D_x) \end{aligned} \quad (2.36)$$

で定義する。

このとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} \Upsilon(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}}; X, D_x) &= \sum^I r(\Delta_{t_0, t_{j_1+1}}; X, D_x) r(\Delta_{t_{j_1+1}, t_{j_2+1}}; X, D_x) \\ &\quad \cdots r(\Delta_{t_{j_{J-1}+1}, t_{j_J+1}}; X, D_x) q(\Delta_{t_{j_J+1}, t_{\nu+1}}; X, D_x). \end{aligned} \quad (2.37)$$

ただし、 $\sum^I$ は、

$$0 < j_1 < j_1 + 1 < j_2 < j_2 + 1 < \cdots < j_{J-1} < j_{J-1} + 1 < j_J \leq \nu \quad (2.38)$$

を満たす整数列 $(j_1, j_2, \dots, j_J)$ についての和を意味し、

$j_J = \nu$ の場合は、 $q(\Delta_{t_{j_J+1}, t_{\nu+1}}; X, D_x) \equiv I$ とする。

さらに、任意の非負整数 l に対して、ある定数 $C_{4,l}$ が存在し、

任意の $\nu = 1, 2, \dots$ と $\Delta_{t_0, t_{\nu+1}} : (T \geq) t_0 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_\nu \geq t_{\nu+1} (\geq 0)$ に対して、

$$|\Upsilon(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}})|_l^{(0)} \leq C_{4,l} (t_0 - t_{\nu+1})^2 \quad (2.39)$$

が成立する。

(証明). (2.14) を帰納的に用いて、(2.37) を得る。さて、 A_l, l' を定理 1.3 と同じ定数、 $C_{1,l}, C_{3,l}$ を補題 2.2 と同じ定数とする。(2.15), (2.17) と定理 1.3 より、

$$\begin{aligned} |\Upsilon(\Delta_{t_0, t_{\nu+1}})|_l^{(0)} &\leq \sum^I (A_l)^J |r(\Delta_{t_0, t_{j_1+1}})|_{l'}^{(0)} |r(\Delta_{t_{j_1+1}, t_{j_2+1}})|_{l'}^{(0)} \\ &\quad \cdots |r(\Delta_{t_{j_{J-1}+1}, t_{j_J+1}})|_{l'}^{(0)} |q(\Delta_{t_{j_J+1}, t_{\nu+1}})|_{l'}^{(0)} \\ &\leq \sum^I (A_l)^J \left(\prod_{k=1}^J C_{3,l'} (t_0 - t_{\nu+1}) (t_{j_k} - t_{j_{k+1}}) \right) C_{1,l'} \\ &\leq C_{1,l'} \left(\prod_{j=0}^{\nu} \left(1 + A_l C_{3,l'} (t_0 - t_{\nu+1}) (t_j - t_{j+1}) \right) - 1 \right) \\ &\leq C_{4,l} (t_0 - t_{\nu+1})^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

を得る。 $\square$

最後に、定理 2.1 を証明する。

(定理 2.1 の証明).

1° $p(\Delta_{t,s}; x, \xi)$ を、

$$p(\Delta_{t,s}; x, \xi) \equiv q(\Delta_{t,s}; x, \xi) + \Upsilon(\Delta_{t,s}; x, \xi) \quad (2.41)$$

で定義すると、(1) は明らかである。

2° (2.14) と (2.39) より、(2.5) を得る。次に、

$$\begin{aligned} & p(\Delta'_{t_j, t_{j+1}}; x, \xi) - p(t_j, t_{j+1}; x, \xi) \\ &= \left(q(\Delta'_{t_j, t_{j+1}}; x, \xi) - p(t_j, t_{j+1}; x, \xi) \right) + \Upsilon(\Delta'_{t_j, t_{j+1}}; x, \xi) \end{aligned} \quad (2.42)$$

に注意すると、(2.16) と (2.39) より、

任意の非負整数 l に対して、ある定数 $C_{5,l}$ が存在して、

$$\begin{aligned} & |p(t_j, t_{j+1}) - p(\Delta'_{t_j, t_{j+1}})|_l^{(2m)} \\ & \leq C_{5,l}(t_j - t_{j+1}) \left((t_j - t_{j+1}) + \sup_{t_j \geq t' \geq t'' \geq t_{j+1}} |K(t') - K(t'')|_l^{(m)} \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

が成立する。さて、

$$\begin{aligned} & p(\Delta_{t,s}; X, D_x) - p(\Delta'_{t,s}; X, D_x) = \sum_{j=0}^{\nu} p(\Delta'_{t_0, t_j}; X, D_x) \\ & \circ \left(p(t_j, t_{j+1}; X, D_x) - p(\Delta'_{t_j, t_{j+1}}; X, D_x) \right) \circ p(\Delta_{t_{j+1}, t_{\nu+1}}; X, D_x) \end{aligned} \quad (2.44)$$

と書けるので、(2.5), (2.43) と定理 1.3 より、(2.6) を得る。

3° (2.6) と (2.5) より、ある $p^*(t, s; x, \xi) \in \mathcal{S}_{\lambda, \rho, \delta}^0$ が存在して、

$$|p^*(t, s)|_l^{(0)} \leq C_l, \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & |p(\Delta_{t,s}) - p^*(t, s)|_l^{(2m)} \\ & \leq C'_l(t-s) \left(|\Delta_{t,s}| + \sup_{|t'-t''| \leq |\Delta_{t,s}|} |K(t') - K(t'')|_l^{(m)} \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

を満たす。よって、(3) を得る。

4° (3) の結果より、(4) を得る。H.Kumano-go [6] の第 3 章 § 7 を参照。

5° (2) と (3) の結果より、(5) を得る。□

REFERENCES

- [1] R.P.Feynman, *Space-time approach to non relativistic quantum mechanics*, Rev. of Modern Phys. **20** (1948), 367–387.
- [2] D.Fujiwara, *A remark on Taniguchi-Kumano-go theorem for product of Fourier integral operators*, Pseudo-differential operators, Proc. Oberwolfach 1986, Lecture notes in Math, Springer **1256** (1987), 135-153.
- [3] ———, *The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension*, Nagoya Math. J. **124** (1991), 61–97.
- [4] ———, *Some Feynman Path Integrals As Oscillatory Integrals Over A Sobolev Manifold*, preprint (1993).
- [5] H.Kitada and H.Kumano-go, *A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrödinger equation*, Osaka J. Math. **18** (1981), 291–360.
- [6] H.Kumano-go, *Pseudo-Differential Operator*, MIT press, Cambridge, Massachusetts and London, England, 1983.
- [7] H.Kumano-go and K.Taniguchi, *Fourier integral operators of multi-phase and the fundamental solution for a hyperbolic system*, Funkcial. Ekvac. **22** (1979), 161–196.
- [8] K.Shinkai, *The symbol calculus for the fundamental solution of a degenerate parabolic system with applications*, Osaka J. Math. **14** (1977), 55-84.
- [9] K.Taniguchi, *Multi-products of Fourier integral operators and the fundamental solution for a hyperbolic system with involutive characteristics*, Osaka J. Math. **21** (1984), 169–224.
- [10] C.Tsutsumi, *The fundamental solution for a degenerate parabolic pseudo-differential operator*, Proc. Japan Acad. **50** (1974), 11–15.

NAOTO KUMANO-GO; DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, 7-3-1, HONGO, BUNKYO-KU, TOKYO 113 JAPAN