

$S^3 \times [0, 1)$ のコンパクト化についての注意

東大・理 久我 健一

(Ken'ichi Kuga)

このノートでは、 π^4 は、次の (i), (ii) を満たす位相的 / 可微分、コンパクト 4 次元多様体を表す。

(i) $\pi^4 = S^3_0 \sqcup \Sigma^3_1$ (2 成分) で、 $S^3_0 \approx S^3$

(ii) 位相同型 $S^3 \times [0, 1) \xrightarrow{\varphi} \pi^4, \Sigma^3_1$ が存在する。

かかる π^4 が、 $S^3 \times [0, 1]$ に限るかどうかは、以下で判る通り難しい問題である。ここでは、上の (ii) の位相同型 φ が一定の性質 (定義 1) を満たすようにとれるか、という問題が、他の 2, 3 の問題と、密接に関連していることを注意したい。

定義 1 π^4 が、リフシッツ (or 部分的リフシッツ) とは、上の (ii) の φ として、次を満足するものが、とれるときをいう。: π^4 の距離 δ (resp. δ^{Σ_1} に、ある $z \in \Sigma^3_1$ の π^4 にあける近傍 O) があって、 (x, y) が、 $x \neq y, \in S^3 \times [0, 1)$ (resp. $x \neq y, \in \varphi^{-1}(O)$) を動かすとき

$$\sup(\delta(\varphi(x), \varphi(y))/d(x, y)) < \infty$$

と仮定すること。ただし d は、 $S^3 \times [0, 1]$ を単位 3-球面 $\times [0, 1] \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ と思っ、 t 時の、 $\mathbb{R}^5$ の標準的距離 $(\sum_{i=1}^5 (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ から導かれるものとする。 //

注意 $\pi^4 = S^3 \times [0, 1]$ は、明らかに、この意味で、リフシッツである。

定理 1 次は同値

- (a) $\mathbb{R}^4$ に、局所平坦に、位相的埋蔵可能な、任意の位相的 π^4 with $\Sigma_1^3 \approx S^3$ は部分的リフシッツ
- (b) 全ての位相的 π^4 with $\Sigma_1^3 \approx S^3$ は、 $\pi^4 \approx S^3 \times [0, 1]$
- (c) 4次元アニュラス予想は真 //

定理 2 次はあいて (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c)

- (a) 全ての可微分 π^4 はリフシッツ
- (b) 全ての可微分 π^4 に対し $\Sigma_1^3 \approx S^3$
- (c) 3次元ホアニカシ - 予想は真 //

上の写像 $f: S^m \rightarrow S^m$ が、pseudo-isotopy $\{f_t\}$, $0 \leq t \leq 1$, ($0 \leq t < 1$ に対して $f_t: S^m \approx S^m$) があって、 $f = f_1$ と仮定とき、(以下、ABH と書く)

補題 1 $M_f \approx S^n \times [0, 1]$, $\Rightarrow M_f$ は写像柱 //

この逆として 問題 $M(4) : M_f \approx S^4 \times [0, 1] \Rightarrow f$ は

ABH か? が決まらなかった。そこでこれでは

定理 3 $M(4) \Rightarrow$ 全ての CE 写像 $f : S^4 \rightarrow S^4$ は ABH //

注意 $n \neq 4$ については 全ての CE 写像 $S^n \rightarrow S^n$ は

ABH である ($[Ar]$, $[Sr]$)。 $n=4$ については知られて

いない。 $[Fr]$ の Theorem 9.1

証明

補題 1 の $\odot$: 下にある h は well-defined bijective

$$\begin{array}{ccc} & S^n \times [0, 1] & \\ \text{quotient map} \swarrow & & \searrow \text{pseudo-isotopy } f_t \times t \\ M_f & \xrightarrow{h} & S^n \times [0, 1] \end{array}$$

continuous. $S^n \times [0, 1]$ の Hausdorff かつ $bicontinuous$ //

補題 2 位相的 Π^4 を部分リマンマン, $\delta, \varepsilon, 0, \varphi$ を

定義 1 にあてはめるものとする。 $\Rightarrow$ ある ε の Σ_1^3 にあてはまる

十分小さい近傍 $V \subset \Sigma_1^3$ に対して relation

$$S^3 \ni u \xrightarrow{\psi} \lim_{t \uparrow 1} \varphi(u, t) \equiv \Sigma_1^3 \cap \bigcup_{\pi^4} \varphi(u, [0, 1)) \subset \Sigma_1^3$$

は V の上で well-defined CE 写像 $\psi|_V : \psi^{-1}(V) \rightarrow V$ を定める //

補題2の⑤ リプシッツ性の仮定が、十分小さい V に対して

2. $\lim_{t \uparrow} \varphi(u, t) \in V$ の収束性と、 $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}$ の連続性を保証する。各 $v \in V$ に対して、 $\varphi^{-1}(v) \subset S_0^3$ が cell-like

であることを示せばいい。近傍 $\varphi^{-1}(v) \subset U \subset S_0^3$ に対して

(右図の様に、 Σ_1^3 のカー-に

沿って開集合 $W \times (0, \varepsilon)$ を十分小さくとれば、リプシッツ性の

仮定から $\varphi(S^3 \times [0, 1])$ によ

る積構造に因る $\varphi(S^3 \times 0) = S_0^3$

への projection (of $W \times (0, \varepsilon)$)

は、 U の中に入る。よって ε

小さくとってあげれば、 $\varphi|_{\varphi^{-1}(v)}$ の写像柱 (in Π^4) は、 (Σ_1^3, W)

$\times [0, \varepsilon)$ カー- とは、交わりなしとして $\mathbb{R}^4$ 、このとき、 Σ_1^3 の

カー- において、 $[0, \varepsilon) \subset [1/2, \varepsilon, \varepsilon)$ に縮める変形を考へれば、

これによって、 $\varphi|_{\varphi^{-1}(v)}$ の写像柱が、 $\Pi^4 \setminus \Sigma_1^3$ に入る。

$\varphi(S^3 \times [0, 1])$ による積で、 $\varphi(S^3 \times 0) = S_0^3$ に (この写像柱を)

おとせば、これは、 U における $\varphi^{-1}(v)$ の null-homotopy を

与える。cell-like 分解写像 $\varphi^{-1}(V) \rightarrow V$ の upper semi-continuity は V の Hausdorff 性から自動的に従う。

定理1の⑤

(a) $\Rightarrow$ (c) : $S^4 \supset S_0^3 \sqcup S_1^3$ を局所平坦に埋込ま

れた 2つの disjoint 3-球面とす。この2つは、互に挟まれた部分の閉包を Π^4 とおく。 $\Pi^4 \setminus S_1^3 \approx S^3 \times [0, 1)$ とある。実際、Brown の Schoenflies 定理の証明 [Br] から S_1^3 は、2 個の S_0^3 と反対側の部分の閉包は cellular 4-球体 $D_1^4 \subset S^4$ であるから

$$\Pi^4 \setminus S_1^3 \approx (\Pi^4 \cup D_1^4) \setminus pt \approx D^4 \setminus pt$$

(cellularity of D^4) (Schoenflies)

従って (a) を仮定すると、補題 2 から Π^4 の中に、十分に小さな開 3 球体 $\overset{\circ}{D}^3 \subset S_1^3$ の上への CE 写像 $S_0^3 \supset \Psi^{-1}(\overset{\circ}{D}^3) \xrightarrow{\Psi|} \overset{\circ}{D}^3 \subset S_1^3$ の写像柱 $M_{\Psi|}$ が埋込まれている。これは [Ar] から $\Psi|$ は ABH になるので、補題 1 の証明と同様にして、この写像柱は、 $\overset{\circ}{D}^3 \times [0, 1] \subset \Pi^4$, $\overset{\circ}{D}^3 \times 0 \subset S_0^3$, $\overset{\circ}{D}^3 \times 1 = \overset{\circ}{D}^3 \subset S_1^3$ に他ならない。そこで、[Ki1] と同様に、 S^4 中の局所平坦 3-球面 $(S_0^3 \setminus \frac{1}{2}\overset{\circ}{D}^3 \times 0) \cup (\frac{1}{2}\overset{\circ}{D}^3 \times [0, 1]) \cup (S_1^3 \setminus \frac{1}{2}\overset{\circ}{D}^3 \times 1)$ を考えたと、Schoenflies 定理から $\Pi^4 \setminus (\frac{1}{2}\overset{\circ}{D}^3 \times [0, 1])$ は 4-球体 となり、再び $(\frac{1}{2}\overset{\circ}{D}^3 \times [0, 1])$ 写像柱 を埋め込むと、位相同型 $\Pi^4 \approx S^3 \times [0, 1]$ を得る //

(c) $\Rightarrow$ (b) : 全ての位相的 Π^4 with $\Sigma_1^3 \approx S^3$ に対し、 $D_0^4 \cup_{S_0^3} \Pi^4 \cup_{\Sigma_1^3} D_1^4$ は 5-次元 4-球面であり [Fr] からこれは S^4 に位相同型、従って $\Pi^4 \approx S^3 \times [0, 1]$ //

((b) $\Rightarrow$ (a)) は自明 //

定理2の①

((a) $\Rightarrow$ (b)) 補題2の証明から、 Σ_1^3 は、 S_0^3 の $\mathbb{C}E$ 分解空間になるが、[Ar] から、 Σ_1^3 は shrinkable (ABH) とくに $\Sigma_1^3 \approx S_0^3 \approx S^3$ //

((b) $\Rightarrow$ (c)) $\Sigma^3 \in$ ホモトピー-3-球面とする。 $\Delta^4 \equiv (\Sigma^3 \setminus \text{Int } D^3) \times [0, 1]$ とおくと、 Δ^4 は可微分 $I \times \Pi^3$ と可縮4-多様体で、 $\partial \Delta = \Sigma \# (-\Sigma)$ 、 $\pi^4 \equiv \Delta^4 \setminus \text{Int } D^4$ とおけば、 $\pi^4 \setminus (\Sigma \# (-\Sigma)) \approx S^3 \times [0, 1]$

実際 $\Delta^4 \cup (-\Delta^4)_{(\Sigma \# -\Sigma)}$ を考えれば、 $\Sigma \# -\Sigma$ のホモトピー-4-球面で、[Fr] から $\approx S^4$ 。この中で $(-\Delta^4)$ はホモトピー-3-球面 $\Sigma \# -\Sigma$ のカラ-を埋める。cellularity criterion を満たして cell-like set である。従って [Fr] Theorem 1.11 から cellular. (4:25 cellularity criterion) //

$$\pi^4 \setminus (\Sigma \# -\Sigma) \approx \pi^4 \cup (-\Delta^4) \setminus \text{pt} \approx D^4 \setminus \text{pt}$$

(cellularity of $-\Delta^4$) (Schoenflies)

従って (b) から $\Sigma \# (-\Sigma) \approx S^3$ 。つまり連結和 $\#$ の $S^2 \subset S^3$ は bicollared であるから Schoenflies 定理から $\Sigma \setminus \text{Int } D^3 \approx D^3$ 、 $\therefore \Sigma = D^3 \cup_{S^2} D^3 \approx S^3$ //

((c) $\Rightarrow$ (b)) Σ_1^3 は常にホモトピー-3-球面である。

実際, Σ_1^3 中の loop は Σ_1^3 の σ - π^4 の内部に λ した
 $\pi^4 \setminus \Sigma_1^3$ の中に null-homotopy する。これは $\pi^4 \setminus \Sigma_1^3$
 $\approx S^3 \times [0, 1)$ を使えば, Σ_1^3 の σ - π^4 の中に λ した σ として
 よい。これを再び σ - π^4 を使って Σ_1^3 に project すれば, Σ_1^3 が
 σ の loop の Σ_1^3 にある null-homotopy となる。従
 って (c) を仮定すれば $\Sigma_1^3 \approx S^3$ //

定理 3.4 (c) CE 写像 $f: S^4 \rightarrow S^4$ が定める cell-like
 分解 (of S^4) ΣD_f とある ($D_f = \{f^{-1}pt\}$). $S^5 =$
 ΣS^4 (suspension) とする. suspension level $\in [-2, 2]$
 で表す. S^5 の cell-like 分解 $\Sigma D_f = \{f^{-1}pt \times t \mid -2 < t$
 $< 2, \text{ susp. pts } \}$ は $[Ca] [Ed]$ から ~~ABH~~ π は
 saturated open set $S^5 \supset S^4 \times [-2, 1)$ への ΣD_f の制限 π

~~ABH~~ π から
 shrinkable

$$\begin{array}{ccccc} & & S^5 & \xrightarrow{ABH} & S^5 / \Sigma D_f \\ & \swarrow \pi & & \downarrow p_1 & \parallel \\ S^5 & & & \approx S^5_0 & \xrightarrow{\pi} S^5_1 \\ / \Sigma D_f | S^4 \times [-2, 1) & & & & \end{array}$$

== π は残りの ΣD_f の π を π する写像, π は S^5
 S^5_0 中の $S^4 \times [-1, 1]$ は S^5_1 に埋込まれた. f の写像柱に
 写像されている: $\pi(S^4 \times [-1, 1]) = M_f \subset S^5_1$. この M_f
 は S^5_1 中の局所平坦な S^4 に π を π されている。実際
 $\pi(S^4 \times -1) \subset S^5_1$ が局所平坦なことは自明. $\pi(S^4 \times +1) \subset S^5_1$
 になることは, $\pi(S^4 \times +1) = p_1(S^4 \times +1)$ である. S^5 から

∂p_1 の像 $2 \sim 3$ へ $S^4 \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) / D_f \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$
 $= (S^4 / D_f) \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = S^7 \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ($\because \text{Im } f = S^4$)
 12 は 2 の bicollared 12 は 3 の Annulus 定理 [K.2]
 ∂S $M_f \approx S^4 \times [0, 1]$, $\text{従って } M(4) \text{ は } f \text{ による } f|_{\partial H} \text{ による}$

参照文献

- [Ar] S. Armentrout, Cellular decompositions of 3-manifolds that
 yield 3-manifolds. *Memoirs A.M.S.* 107 (1976)
 [Br] M. Brown, A proof of the generalized Schoenflies theorem
Bull. A.B.S. 66 (1960) 74-76
 [Ca] J. Cannon, Shrinking cell-like decompositions of manifolds.
 Codimension three. *Ann. Math.* 110 (1979) 83-112
 [Ed] R. Edwards, Approximating certain cell-like maps by
 homeomorphisms (preprint, 1977)
 [Fr] M. Freedman, The topology of four-dimensional
 manifolds, preprint (1982)
 [K.1] R. Kirby, On the annulus conjecture. *PAMS* 1965
 [K.2] ———, Stable homeomorphisms and the annulus
 conjecture. *Ann. Math.* ~~77~~ 77 1969
 [Si] L. Siebenmann, Approximating cellular maps by homeo-
 morphisms, *Topology* 11 (1972), 271-294