

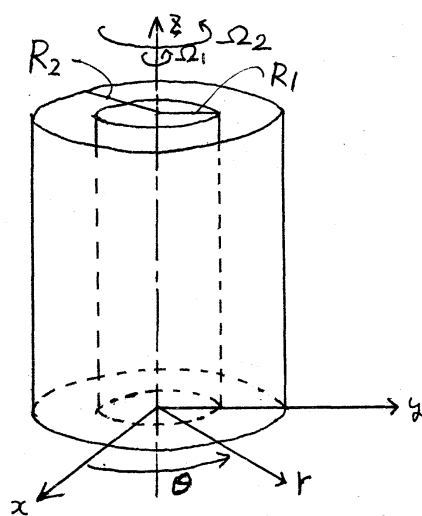
Taylor-Couette 流の非線形解析

名大工 後藤 俊幸

同心2円筒間内の流れについては、G. I. Taylor (1923)の研究以来数多くの研究がなされてきている。

特に D. Coles (1965) の行なった系統的な実験によると、数多くの定常状態が存在し、さらに履歴現象といった注目すべき現象も報告されている。本稿ではこれらの定常状態について議論する。

第1章 数学的定式化



ここでは議論を簡単にするために、同心2円筒はその共通軸にそって無限に長いと仮定する。左図のように座標系を導入する。

この座標系において、基礎方程式は Navier-Stokes の方程式；

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{T}}{\rho} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu (\Delta \mathbf{v} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} - \frac{\mathbf{v}}{r^2}) \quad (1-1a)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (1-1b)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z \quad (1-1c)$$

$R_1 \leq r \leq R_2$

及び連続の方程式;

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1-2)$$

境界条件は

$$v = (0, R_1 \Omega_1, 0) \quad \text{内筒上で} \quad (1-3a)$$

$$v = (0, R_2 \Omega_2, 0) \quad \text{外筒上で} \quad (1-3b)$$

となる。ただし $v = (v_r, v_\theta, v_z)$

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。

さらに流れはすべて軸対称であると仮定する。 ($\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$)。

この場合 v は2つのスカラー場 (Ψ, χ) で表わされる。

(Goldstein (1938))

$$v_r \equiv -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, z, t)}{\partial z}, \quad v_z \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, z, t)}{\partial r}, \quad v_\theta \equiv \frac{\chi(r, z, t)}{r} \quad (1-4)$$

Ψ は (r, z) 面内での流れ函数であり、これによって連続の方程式 (1-2) は自動的に満足される。次のような無次元化を行なう;

$$\begin{cases} * = R_1 \chi, & v = R_1 \Omega_1 v, & \tau = t / \Omega_1 \\ \Psi = R_1^3 \Omega_1 \psi, & \chi = R_1^2 \Omega_1 \chi, & R = \frac{R_1^2 \Omega_1}{\nu} \text{ (レイノルズ数)} \end{cases} \quad (1-5)$$

$$\mu = \Omega_2 / \Omega_1, \quad \eta = R_2 / R_1 \quad \text{形状パラメータ} \quad (1-6)$$

以上述べた事により基礎方程式及び境界条件を書き直す;

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{D}^2 \psi) + \frac{2\Omega}{r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi, \tilde{D}^2 \psi)}{\partial (r, z)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \tilde{D}^2 \psi = \frac{1}{R} \tilde{D}^4 \psi \quad (1-7a)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi, \Omega)}{\partial (r, z)} = \frac{1}{R} \tilde{D}^2 \Omega \quad 1 \leq r \leq 1/2 \quad (1-7b)$$

$$\begin{cases} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 & r = 1, 1/2 \\ \Omega = 1 & r = 1 \\ \Omega = \mu / \eta^2 & r = 1/2 \end{cases} \quad (1-8)$$

ここで, $\tilde{D}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

$$\frac{\partial (A, B)}{\partial (x, y)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial y} \end{vmatrix}$$

である。

さて、境界条件(1-8)を満足する主流、即ち定常かつ z によらない解は次の様に与えられる。

$$\psi_0 = (0, \psi_0(r), 0) \quad ; \quad \psi_0(r) \equiv \frac{1}{1-\eta^2} [(\mu - \eta^2)r + (1-\mu)\frac{1}{r}] \quad (1-9)$$

即ち、

$$\psi_0 = 0, \quad \Omega_0 = r \psi_0(r) = \frac{1}{1-\eta^2} [(\mu - \eta^2)r^2 + (1-\mu)] \quad (1-10)$$

今、我々が問題とするのは、上記の主流に加えられた攪乱のふるまいである。

$$\psi(r, z, t) = \tilde{\psi}(r, z, t) \quad (1-11a)$$

$$\Omega(r, z, t) = \Omega_0(r) + \hat{\Omega}(r, z, t) \quad (1-11b)$$

と置く。 $\tilde{\psi}$, $\hat{\Omega}$ は攪乱を表わす。 これらを(1-7), (1-8)に代入して攪乱成分に対する式を引き出すと次式を得る。

$$\frac{\partial(\tilde{D}^2\tilde{\psi})}{\partial t} + \frac{2(\Omega_0 + \tilde{\Omega})}{r} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\psi}, \tilde{D}^2\tilde{\psi})}{\partial(r, z)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \tilde{D}^2\tilde{\psi} = \frac{1}{R} \tilde{D}^4\tilde{\psi} \quad (1-12a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\psi}, \Omega_0 + \tilde{\Omega})}{\partial(r, z)} = \frac{1}{R} \tilde{D}^2\tilde{\Omega} \quad 1 \leq r \leq \frac{1}{2} \quad (1-12b)$$

$$\begin{cases} \tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} = 0 \\ \tilde{\Omega} = 0 \end{cases} \quad r = 1, \frac{1}{2} \quad (1-13)$$

(1-12a)の第2項の $\frac{2\Omega_0 \partial \tilde{\Omega}}{r^2 \partial z}$, また (1-12b)の第2項の $\frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\psi}, \Omega_0)}{\partial(r, z)}$ は主流と攪乱とのエネルギーの授受を表わし, (1-12a, b)の右辺は粘性散逸を表わす。我々は(1-12), (1-13)を Galerkin法を用いて連立常微分方程式に変形し直接数値積分を行なうことによりそのふるまいを調べる。(S. Kuwabara)

まず, z 方向には渦が周期的に並ぶことによりフーリエ展開を行ない r 方向には線形安定性理論における固有関数系で展開する。(Di Prima (1967), Di Prima and Habetler (1969)).

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(r, z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(r, t) e^{in\alpha z} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} b_{0m}(t) F_{0m}(r) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}(t) F_{nm}(r) e^{in\alpha z} \end{aligned} \quad (1-14a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(r, z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_n(r, t) e^{in\alpha z} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} C_{0m}(t) G_{0m}(r) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}(t) G_{nm}(r) e^{in\alpha z} \end{aligned} \quad (1-14b)$$

$$\phi_n(r, t) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}(t) F_{nm}(r), \quad \Lambda_n(r, t) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}(t) G_{nm}(r)$$

ただし, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ は $n=0$ を除くことを示し, さらに,

$$\alpha \cdot 2L \equiv 2\pi \quad \text{である。}$$

このような展開を行なった理由は, 2章線形安定性のところで詳しく論じる。さらに $\tilde{\psi}, \tilde{\Omega}$ の実数性により,

$$\phi_n(r, t) = \phi_{-n}^*(r, t), \quad \Lambda_n(r, t) = \Lambda_{-n}^*(r, t) \quad (1-15)$$

b_{0m}, C_{0m} ; 実数

*; 複素共役

である。(1-14)を(1-12)に代入し各フーリエ成分についてまとめれば

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{a}_{nm} D_n^2 F_{nm} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{R} \tilde{L}'_{nm} + \tilde{L}^2_{nm} \right) a_{nm} \\ &\quad - i\alpha \left[\sum_{g,s=1}^{\infty} (\tilde{N}'_{n,g,s} a_{ns} b_{0g} + \tilde{N}^2_{n,g,s} a_{ns} C_{0g}) \right. \\ &\quad \left. + \sum \sum \tilde{N}^3_{n,e,g,s} a_{eg} a_{n-e,s} \right] \end{aligned} \quad (1-16a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{a}_{nm} G_{nm} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{R} \tilde{L}^3_{nm} + \tilde{L}^4_{nm} \right) a_{nm} \\ &\quad - i\alpha \left[\sum_{g,s=1}^{\infty} (\tilde{N}^4_{n,g,s} a_{ns} b_{0g} + \tilde{N}^5_{n,g,s} a_{ns} C_{0g}) \right. \\ &\quad \left. + \sum \sum \tilde{N}^6_{n,e,g,s} a_{eg} a_{n-e,s} \right] \end{aligned} \quad (1-16b)$$

$$\dot{} \equiv \frac{d}{dt}, \quad D_n^2 \equiv \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - n^2 \alpha^2$$

となり境界条件は、

$$F_{nm}(1) = F_{nm}(1/\eta) = F'_{nm}(1) = F'_{nm}(1/\eta) = 0 \quad (1-17)$$

$$G_{nm}(1) = G_{nm}(1/\eta) = 0$$

となる。 $n=0$ については一度 Navier-Stokes に戻ってやり

直す。同様な議論を行なえば、

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{b}_{0m} F_{0m} &= \frac{1}{R} \sum_{m=1}^{\infty} r \cdot \tilde{L}^5_{0m} b_{0m} \\ &\quad + i\alpha \sum_p \sum_{g,s} p \tilde{N}^7_{p,g,s} a_{pg} a_{-p,s} \end{aligned} \quad (1-18a)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \dot{C}_{0m} G_{0m} = \frac{1}{R} \sum_{m=1}^{\infty} r \tilde{L}_{0m}^b C_{0m} + i\omega \sum_p \sum_{g,s} p \tilde{N}_{p,g,s}^{\delta} a_{pg} a_{-p,s} \quad (1-18b)$$

$\dot{} \equiv \frac{d}{dt}$

を得る。ここに、

$\tilde{L}_{nm}^b$; H, G とその微分からなる線形な関数.

$\tilde{N}_{nm}^b$; H, G とその微分からなる非線形な関数. である。

第2章 線形安定性

線形安定性の基礎方程式は (1-16) において $a_{nm}(t) = e^{-p_{nm}t}$ ($n \neq 0$) とおいて代入し、非線形項を落せば得られる。(ここで p_{nm} は一般に複素数) $n=0$ についても同様である。

安定, 不安定はその形から明らかのように,

$$\operatorname{Re}(p_{nm}) < 0 \quad \text{不安定} \quad (2-1)$$

$$\operatorname{Re}(p_{nm}) > 0 \quad \text{安定}$$

で判定される。以下 $n \neq 0$ と, $n=0$ の2つの場合に分けて議論する。

(1) $n \neq 0$ の場合

独立変数 t を τ に変換する:

$$\begin{aligned} \tau &= k\tau + 1, & k &\equiv \frac{1-\eta}{\eta} \\ 1 \leq \tau \leq 1/\eta &\implies & 0 \leq \tau \leq 1 \end{aligned} \quad (2-2)$$

基礎方程式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} Q_n^4 & -dnf(3) \\ -dn\sigma & Q_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{nm}(3) \\ G_{nm}(3) \end{pmatrix} = \sigma_{nm} \begin{pmatrix} Q_n^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{nm}(3) \\ G_{nm}(3) \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

$$\begin{cases} F_{nm}(0) = F_{nm}(1) = F_{nm}'(0) = F_{nm}'(1) = 0 \\ G_{nm}(0) = G_{nm}(1) = 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

$$Q_n^2 \equiv \frac{1}{k^2} \left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{k}{k^2+1} \frac{d}{dz} - n^2 \alpha^2 k^2 \right]$$

$$f(3) \equiv 2\alpha R \frac{1-\mu}{1-\gamma^2} \left[\frac{1}{(k^2+1)^2} - \frac{\gamma^2-\mu}{1-\mu} \right]$$

$$\sigma \equiv 2\alpha R \frac{\gamma^2-\mu}{1-\gamma^2}$$

$$\sigma_{nm} \equiv -P_{nm} R ; \text{固有値}$$

以上より、この問題はバウメーター m , R , μ , γ を含んだ固有値問題となる。現在のところこの厳密解は得られていない。本稿ではGalerkin法を用いて近似解を求める。まず、 $F_{nm}(3)$, $G_{nm}(3)$ をそれぞれ境界条件(2-4)を満たす完備な関数列で展開する。

$$F_{nm}(3) = \sum_{k=1}^N T_k^{nm} f_k(3) \quad (2-5a)$$

$$G_{nm}(3) = \sum_{k=1}^N S_k^{nm} g_k(3) \quad (2-5b)$$

$$f_m(3) \equiv \cos n\pi 3 - \cos(n+2)\pi 3 \quad (2-6a)$$

$$g_m(3) \equiv \sin n\pi 3 \quad (2-6b)$$

(2-5)を(2-3)に代入し、左から (f_j, g_j) をかけて $[0, 1]$ で積分する。このようにして我々は次の方程式を得る。

$$P\mathbf{x} = \sigma \mathbf{Q}\mathbf{x}, \quad P, Q: (2N \times 2N \text{ 行列}) \quad (2-7)$$

この方程式より $\mathbf{x}$ が自明でない解をもつための必要十分条件として

$$|P - \sigma Q| = 0 \quad (2-8)$$

を得る。(2-8)を解けば、

$$F(\alpha, R, \sigma, \eta, \mu) = 0 \quad (2-9)$$

なる関係式が得られる。1組のパラメーター(α, R, μ, η)につき $2N$ 個の固有値が得られ、その内に1つでも $\text{Re}(\sigma) > 0$ なるものが存在すれば、そのパラメーターをもった攪乱に対し流れは不安定となる。実際の数値計算においては、次の様にパラメーターを選んだ。

$$N=20. \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} \mu=0.0; & \eta=0.5 \\ \text{(ii)} \mu=0.0; & \eta=0.875 \end{array} \quad (2-10)$$

この様にして(i),(ii)の場合について(α, R)面内に安定, 不安定な σ の分布を描いたものがそれぞれ図2-1, 図2-2である。 $\text{Re}(\sigma)=0$ なる線が図中に描いてあるが、これは中立曲線と呼ばれる。また中立曲線における最小のレイノルズ数を臨界レイノルズ数 R_c と呼び、対応する波数を臨界波数 α_c と呼ぶ。比較のためにD.Coles(1965)の実験値や、Chandrasekhar(1961)の計算値を載せておいた。これによるとよい一致が見られる。 (α, R) 面内の一点を指定すれば、 $2N$ 個の固有値が得られるがこれらを $\text{Re}(\sigma_{nm})$ の大きい順に並べかえて番号をつけ直す。これ以後添字は、 x 方向のフーリエ成分を n , y 方向の固有関数を m と定義する。

次に、固有値問題(2-3), (2-4)の数学的性質を2つ述べる。

A. 随伴固有値問題

今, L^2 空間 H において次のような部分空間 S を考える。

$$S \equiv \left\{ \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \mid \phi_1(0) = \phi_1(1) = \phi_1'(0) = \phi_1'(1) = 0, \right. \\ \left. \phi_2(0) = \phi_2(1) = 0 \right\} \subset H \quad ' \equiv \frac{d}{dx}$$

内積を次のように定義する。

$$\forall u, v \in S \\ \langle u, v \rangle \equiv \int_0^1 u^*(x) v(x) dx$$

線形作用素 L に対し, 随伴作用素 L^+ を次により定義する。

$$\langle L^+ v, u \rangle = \int_0^1 (L^+ v)^* u dx = \int_0^1 v^* (L u) dx = \langle v, L u \rangle$$

以上の事項によると (2-3), (2-4) に対する随伴固有値問題は,

$$\begin{pmatrix} Q_n^{+4} & \ln \delta \\ \ln f & Q_n^{+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{np} \\ G^{np} \end{pmatrix} = \sigma_{np}^* \begin{pmatrix} Q_n^{+2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{np} \\ G^{np} \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

$$\left. \begin{aligned} F^{np}(0) &= F^{np}(1) = F^{np'}(0) = F^{np'}(1) = 0 \\ G^{np}(0) &= G^{np}(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

$$Q_n^{+2} \equiv \frac{1}{k^2} \left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{k}{k_3+1} \frac{d}{dz} - \frac{k^2}{(k_3+1)^2} - n^2 \alpha^2 k^2 \right]$$

となる。(2-3) に左から (F^{np*}, G^{np*}) をかけて $[0, 1]$ で積分すれば,

$$\begin{aligned} \langle F^{np}, Q_n^{+4} F_{nm} - \ln f G_{nm} \rangle + \langle G^{np}, -\ln \delta F_{nm} + Q_n^{+2} G_{nm} \rangle \\ = \sigma_{nm} [\langle F^{np}, Q_n^{+2} F_{nm} \rangle + \langle G^{np}, G_{nm} \rangle] \quad (2-13a) \end{aligned}$$

を得、また (2-11) の複素共役になら (F_{nm}, G_{nm}) をかけて $[0, 1]$ で積分してやれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \langle F_{nm}, Q_n^{+4} F^{np} + \ln \delta G^{np} \rangle^* + \langle G_{nm}, \ln f F^{np} + Q_n^{+2} G^{np} \rangle^* \\ = \sigma_{np} [\langle F_{nm}, Q_n^{+2} F^{np} \rangle^* + \langle G_{nm}, G^{np} \rangle^*] \quad (2-13b) \end{aligned}$$

(2-13a) から (2-13b) を差し引くと、

$$(\sigma_{nm} - \sigma_{mp})[\langle F^{np}, Q_n^2 F_{nm} \rangle + \langle G^{np}, G_{nm} \rangle] = 0 \quad (2-14)$$

を得るが、ここで我々は十分条件として次を要請する。

$$\langle F^{np}, Q_n^2 F_{nm} \rangle + \langle G^{np}, G_{nm} \rangle = \sigma_{pm} \quad (2-15)$$

ただし縮退がないと仮定した。実際の数値計算においては、40個の固有値には縮退がないことが確かめられた。

B. n に関する対称性

(2-3)の複素共役をとると、 $Q_n^{2*} = Q_n^2$ であるから、

$$\begin{pmatrix} Q_n^4 & \text{cncf} \\ \text{cnc}\sigma & Q_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{nm}^* \\ G_{nm}^* \end{pmatrix} = \sigma_{nm}^* \begin{pmatrix} Q_n^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{nm}^* \\ G_{nm}^* \end{pmatrix} \quad (2-16)$$

となり、- σ (2-3)において $n \rightarrow -n$ とすると $Q_{-n}^2 = Q_n^2$ より

$$\begin{pmatrix} Q_n^4 & \text{cncf} \\ \text{cnc}\sigma & Q_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{-nm} \\ G_{-nm} \end{pmatrix} = \sigma_{nm} \begin{pmatrix} Q_n^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{-nm} \\ G_{-nm} \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

となる。(2-16), (2-17)を(2-3)と比較すると、

$$(\sigma_{nm}^* ; F_{nm}^*, G_{nm}^*), (\sigma_{-nm} ; F_{-nm}, G_{-nm})$$

は(2-3)と全く同様の作用素、境界条件に対する固有値、固有関数であることが判る。従って(2-16), (2-17)の m' と m'' を適当につけかえてやれば、(2-3)のそれと同等になる。結局次式を得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{nm}^* &= \sigma_{-nm} \\ F_{nm}^* &= F_{-nm} \\ G_{nm}^* &= G_{-nm} \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

$$\text{さらに } \alpha_{nm}^* = \alpha_{-nm} \quad \text{を得る。} \quad (2-19)$$

同様なことが随伴問題についても言える。

(2) $n=0$ の場合

$n=0$ の場合には注意を要する。(1-4)によれば、

$$\tilde{U} = \left(-\frac{1}{r} \tilde{\varphi}_z, \frac{\tilde{\varphi}_z}{r}, \frac{1}{r} \tilde{\varphi}_r \right)$$

であるが、もし(1-4a,b)の第2項の表現を直接代入して見れば次のようになる。

$$\tilde{U} = \sum_{n,m} \left(-\frac{i n d}{r} a_{nm} F_{nm} e^{i n d z}, \frac{1}{r} a_{nm} G_{nm} e^{i n d z}, \frac{1}{r} a_{nm} F_{nm} e^{i n d z} \right) \quad (2-20)$$

$n=0$ の場合は、 $\tilde{U}_r$ に対して境界条件が自動的に満たされている。

また(2-3)より $n=0$ の場合は F_{0m} と G_{0m} が分離することがわかる。

以上が(1-14)の表現をとった理由である。

$n \neq 0$ の時と同様に $b_{0m}(t) = e^{-p_m t}$, $c_{0m}(t) = e^{-q_m t}$ とおき、(1-14)に代入し非線形項を落せばよい。この場合解析解が得られる。ここには結果だけを記す。

$$F_{0m}(r) = C_m r \left[Y_0(\sqrt{\lambda_m}) J_1(\sqrt{\lambda_m} r) - J_0(\sqrt{\lambda_m}) Y_1(\sqrt{\lambda_m} r) \right] \quad (2-21)$$

$$F_{0p}(r) = C_p r \left[Y_0(\sqrt{\lambda_p}) J_0(\sqrt{\lambda_p} r) - J_0(\sqrt{\lambda_p}) Y_0(\sqrt{\lambda_p} r) \right] \quad (2-22)$$

ここには、 C_m, C_p は規格化定数であり、 λ_m, λ_p は次の超越方程式の根を小さいものから順に並べたものである。

$$J_0(\sqrt{\lambda_m}) Y_0(\sqrt{\lambda_m}/\eta) - Y_0(\sqrt{\lambda_m}) J_0(\sqrt{\lambda_m}/\eta) = 0 \quad (2-23)$$

J, Y はそれぞれ第1種、第2種のBessel関数である。

さらに十分条件として、

$$\langle F_{0p}, F_{0m}' \rangle = \delta_{pm} \quad (2-24)$$

が得られる。さらに G についても同様に次式を得る。

//

$$G_{0m}(t) = d_m t [Y_1(\sqrt{w_m}) J_1(\sqrt{w_m} t) - J_1(\sqrt{w_m}) Y_1(\sqrt{w_m} t)] \quad (2-25)$$

$$G^{0P}(t) = d_p [Y_1(\sqrt{w_p}) J_1(\sqrt{w_p} t) - J_1(\sqrt{w_p}) Y_1(\sqrt{w_p} t)] \quad (2-26)$$

d_m, d_p は規格化定数, w_m, w_p は前と同様次の超越方程式の根を小さいものから順に並べたものである。

$$J_1(\sqrt{w_m}) Y_1(\sqrt{w_m}/\eta) - Y_1(\sqrt{w_m}) J_1(\sqrt{w_m}/\eta) = 0 \quad (2-27)$$

さらに十分条件として,

$$\langle G^{0P}, G_{0m} \rangle = \delta_{pm} \quad \text{を得る,} \quad (2-28)$$

第3章 非線形方程式

2章で求めた固有函数を用いて Galerkin法 を適用する。

(1-16a), (1-16b) にそれぞれ左から F^{np} , G^{np} をかけて $[0, 1]$ で積分し両者を加える。その時直交関係(2-15)を用いると次を得る。

$$\begin{aligned} \dot{a}_{np} = & \sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{R} A_m^{np} + B_m^{np} \right) a_{nm} \\ & - \left[\sum_{g,s=1}^M (D_{gs}^{np} a_{ns} b_{og} + E_{gs}^{np} a_{ns} c_{og}) \right. \\ & \left. + \sum_e \sum_{g,s}^N H_{egs}^{np} a_{eg} a_{m-e,s} \right] \end{aligned} \quad (3-1)$$

詳しくは第4章で述べるが、我々は固有関数を捨てておくパラメーターの組 $(n \alpha, R)$ を $(n \alpha_c, R_c)$ に指定した。

$n=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 図4-1参照

従ってこのパラメーターの組についての線形理論の結果,

$$\frac{1}{R_c} A_m^{np} + B_m^{np} = \frac{\sigma_m^{np}}{R_c} \delta_{pm} \quad (3-2)$$

を用い、さらに a_{nm} に関する対称性(2-19)を用いると(3-1)は

次のように書ける。

$$\begin{aligned} \dot{a}_{np} = & \frac{\sigma_{np}}{R_c} a_{np} + \sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_c} \right) A_m^{np} a_{nm} \\ & - i\omega \left[\sum_{g,s=1}^M (D_{g,s}^{np} a_{ns} b_{og} + E_{g,s}^{np} a_{ns} c_{og}) \right. \\ & + \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{g,s=1}^M H_{l,g,s}^{np} a_{lg} a_{n-l,s} \\ & \left. + \sum_{l=1}^N \sum_{g,s=1}^M (H_{-l,g,s}^{np} + H_{n+l,s,g}^{np}) a_{lg}^* a_{n+l,s} \right] \end{aligned} \quad (3-3)$$

ただし $n=1$ の時は $\sum_{l=1}^{n-1}$ の項は 0 である。

$$\dot{b}_{op} = -\frac{\lambda_p}{R} b_{op} + \sum_{n=1}^N \sum_{g,s=1}^M c_{n\alpha} J_{n,g,s}^{op} a_{ng} a_{ns}^* \quad (3-4a)$$

$$\dot{c}_{op} = -\frac{\omega_p}{R} c_{op} + \sum_{n=1}^N \sum_{g,s=1}^M c_{n\alpha} K_{n,g,s}^{op} a_{ng} a_{ns}^* \quad (3-4b)$$

我々の問題は、各初期値と各レイノルズ数に対し上記の系を数値積分してそのふるまいを調べることにある。

第4章 数値計算及び結果

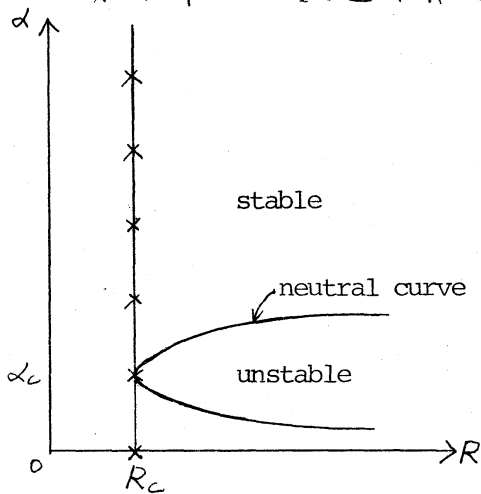
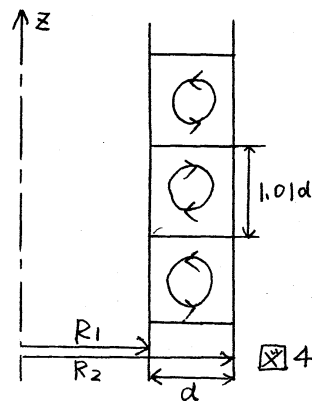


図4-1

左図4-1は $(\alpha-R)$ 面内の中立曲線の模式図である。線形理論では $(\alpha_c, R_c) = (21.88, 827.68)$ と求められた。この $\alpha_c = 21.88$ は内筒と外筒との間隔を d とすると、 z 方向に $1.01d$ のコッチで細胞状の渦列が並ぶことを意味す

る。(図4-2参照) また厳密には (α_c, R_c) は中立曲線上にあるのではなく、ごくわずかな不安定領域に入っている点である。

これは数値計算を行なうにあたり $(\alpha-R)$ 面を細かい格子点に



分割してその各格子点で固有値を求めたからである。固有函数を捨てるパラメータとして (m, c, R_c) ; $m=0, 1, 2, 3, 4, 5$ と選んだ。(図4-1におけるX印)

図4-2. そしてその各点に対し $m=1, 2$ ととった。

まとめると

z 方向	$m=0, 1, 2, 3, 4, 5$	}	(4-1) である。
t 方向	$m=1, 2$		

以後モードを (n, m) と書く。このようにパラメータを選んだのは、レイノルズ数が R_c を越えた時まず最初に励起されるのは (n_c, R_c) でのオ1固有値に属するモード $(1, 1)$ であろうと考えられるからである。合計24個の独立なモードが存在する。我々はRunge-kutta-Gill法を用いて数値積分を行なった。時間幅は、

$$\Delta t = 0.02 \quad (\Delta t = \frac{0.02}{\Omega_1}) \quad (4-2)$$

ととり、初期条件は

$$a_{11} = 10^{-4}, \quad \text{他はすべて} 0 \quad (4-3)$$

とおいた。以上の条件の許で数値積分を行なうと $m(\neq 0)$ が偶数のモードはすべて純虚数、奇数のモードはすべて実数、そして b_{0m} はすべて0, C_{0m} は実数となった。

これは、線形理論における固有値が $m=2$ ととった範囲内では、すべて実数であり、また固有関数はすべて実数が純虚数であ

ったためと、Z方向への一様流を表わす b_{0m} が励起されなかったためと考えられる。結局12個の独立なモードが存在する。今、 $\gamma \equiv R/R_c$ を定義する。

(4-3)の初期値で $\gamma (>1)$ の任意の値に対し数値積分すると、すべてのモードが定常状態に行った。また時間幅 Δt に対する安定性を見るために $\Delta t = 0.01$ とし計算してみたがやはり同じ結果を得た。 γ の値に対する各モードの定常状態をプロットしたものが図4-3, 4-4, 4-5である。図4-3は Co_2 だけをプロットしてあるがこれには次のような物理的意味がある。モード Co_2 は (1-14) より $(r-\theta)$ 面内の流れを表わし、このモードに対する速度分布は図4-6 (b) の様になっている。

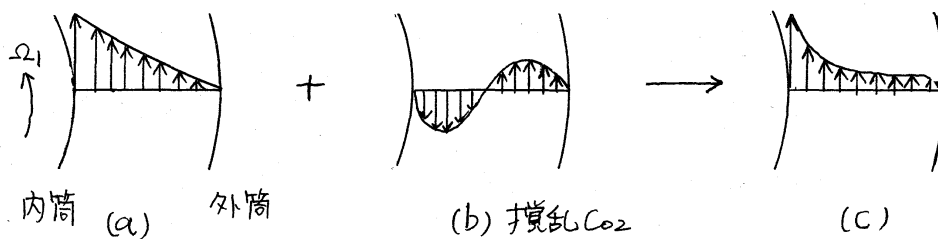


図4-6

これが主流(a)に重ね合わせられると(c)の様になる。一方、円筒の単位長さ当り回転に必要なトルクを Γ とすると、

$$\Gamma \propto \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \quad (4-4)$$

であるから、(a)の時よりも(c)の時の方が Γ は大きくなる。従って、 Co_2 の定性的な変化はトルクに現われるという意味で重要である。

図4-3を見て明らかなことは、 $\gamma=4.1$ 付近には不連続と11^つてもよいほどの跳びがあり、また $\gamma=7.5$ 付近には1^つの折れ目があることである。この様なふるまいが初期値(4-3)に対してのみ得られるかどうかを見るために、次のような初期値に対して、特に $\gamma=2.5\sim 5.0$ にわたり調べてみた。

$$\begin{array}{ll} a_{11}=10^{-3} & \text{他はすべて0} \\ a_{11}=10^{-2} & \text{〃} \\ a_{12}=10^{-2} & \text{〃} \end{array}$$

その結果全く同じふるまいを示すことが確かめられた。その他、かなりランダムな初期値と γ の値に対して計算したがどれも同じ曲線上に載った。図4-4, 4-5においても $\gamma=4.2$ 付近と $\gamma=7.0\sim 7.5$ 付近で大きな変化があることがわかる。特に $\gamma=4.1$ 付近に話を限ると、 $\gamma<4.1$ では a_{11} モードが支配的であるが(図4-4)、 $\gamma\geq 4.2$ では急に a_{22} モードが成長してきて支配的になり(図4-5)、逆に a_{11} モードが死んでゆく。以上の事実から、上に述べた初期値の範囲内ではあるが、 $\gamma=4.1$ 付近に解の分枝があると考えられる。同様なことが $\gamma=7.0\sim 7.5$ 近傍についても起っていると考えられる。

ただ注意しなければならないのは、 $\gamma=4.1$ 近傍で解の分枝があるといっても、これは軸対称という仮定を入れたモデルであるから、現実の流れに対しそのような大きな定性的変化があるとは言い切れないという事である。現実の流れでは、

$\gamma \geq 1.2$ 以上で軸対称の仮定が破れている。

さて、 $\gamma=4.1$ 付近では解が特異なふるまいを示しているのを、より詳細に調べてみた。今度はいくらか異なった初期値のとり方をした。まず $\gamma=5.0$, $a_{11}=10^{-3}$, 他はすべて 0. という初期値で始めて定常状態に達したとする。次にこの定常状態を初期値として断熱的に γ を 4.4 にして …… という具合にして γ を徐々に小さくしてゆき再びもとの大きさに戻していった。各ステップに対する Co_2 の定常状態の変化をプロットしたものが図 4-7 である。番号と矢印は γ を変化していった順と変化の方向を示している。

図 4-7 からわかるように、大きな特徴が見い出される。それは、 γ を大きい方から徐々に下げてきた時の Co_2 の定常状態が通る経路と、小さい方から徐々に大きくしていった時の経路が異なるということである。また、各ステップにおける収束に必要な時間を調べると、図中の番号 $7 \rightarrow 8$, $17 \rightarrow 18$ の過程では非常に大きくなっていることが確かめられた。加えて、 $17 \rightarrow 18$ の過程では、まず $17 \rightarrow Q$ 矢へ非常に長い時間かかって近づき、その後非常に短い時間で 18 に収束していることがわかった。他のモード a_{nm} のふるまいについて見ると、図 4-7 の S-T ライン上の a_{nm} はほぼ図 4-4, 4-5 の $\gamma=4.2$ のふるまいと同様であり、図 4-7 の P-Q ライン

よでの Q_{nm} は図 4-4, 4-5 での $\nu=3\sim 4$ でのふるまいと同様であることがわかった。従って $\nu=4.0$ 近傍と $\nu=4.16$ 近傍で定常状態に大きな遷移が起っていることがわかる。

以上の事実をまとめると次のようになる。

今、ある定常状態 (A) があつたとすると、 R を上げていってある点 R_c で他の定常状態 (B) へ遷移が起こる。こうして (A) とは異なつた状態 (B) が一旦実現されてしまうと、今度はレイノルズ数を下げても、その新しく実現された状態 (B) は同じ R_c で以前の状態 (A) に戻るのではなく、しばらくはその状態が続く。そしてさらに R を下げていくと、あるレイノルズ数 R_c' でようやく (A) の状態に復帰するのである。即ち、遷移のレイノルズ数が異なっているのである。このような事実の存在については Landau (1959) もすでに指摘していたし、現実の流れにおいても見い出されている。

(W.D. George and J.D. Hellums (1972), D. Coles (1965)).

我々の系 (3-3), (3-4) はそのような流れの 1 つのモデルと考えられる。

References

Chandrasekhar, S. 1961 Hydrodynamic and hydromagnetic stability.
Oxford University Press.

Coles, D. 1965 J.F.M. vol-21 pp-385.

Diprima, R.C. 1967 Nonlinear partial differential equations. (Ames. Ed)
Academic Press.

Diprima,R.C. and Habetler,G.J. 1969 Arch.Rat.Mech.Anal. 34 pp-218.

George,W.D. and Hellums,J.D. 1972 J.F.M. vol-51 pp-687.

Goldstein,S.(Ed) 1938 Mordern developments in fluid dynamics. vol-1.

Clarendon Press. Oxford.

Kuwabara,S. to appear in the Proceedings of the 4th International

Summer School on Physics and Contemporary Need,Plenum Publ. Co,

Landau,L.D. and Lifshitz,E.M. 1959 Fluid Mechanics. pp-107.

Saltzman,B. 1962 J.atmos.Sci.,19,pp-329.

Taylor,G.I. 1923 Phil.Trans.Roy.Soc.London. pp-289.

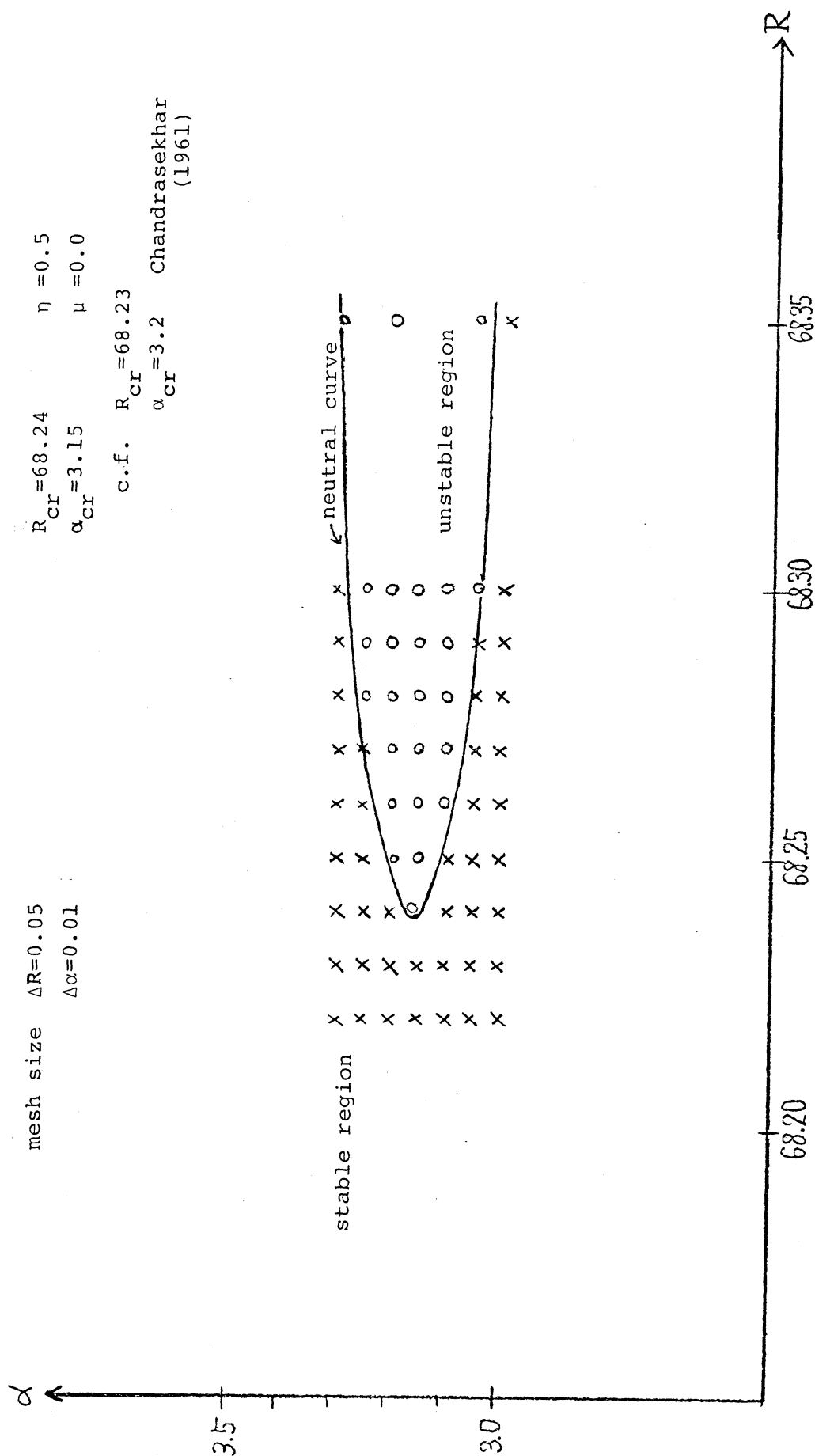
x stable point
 O unstable point

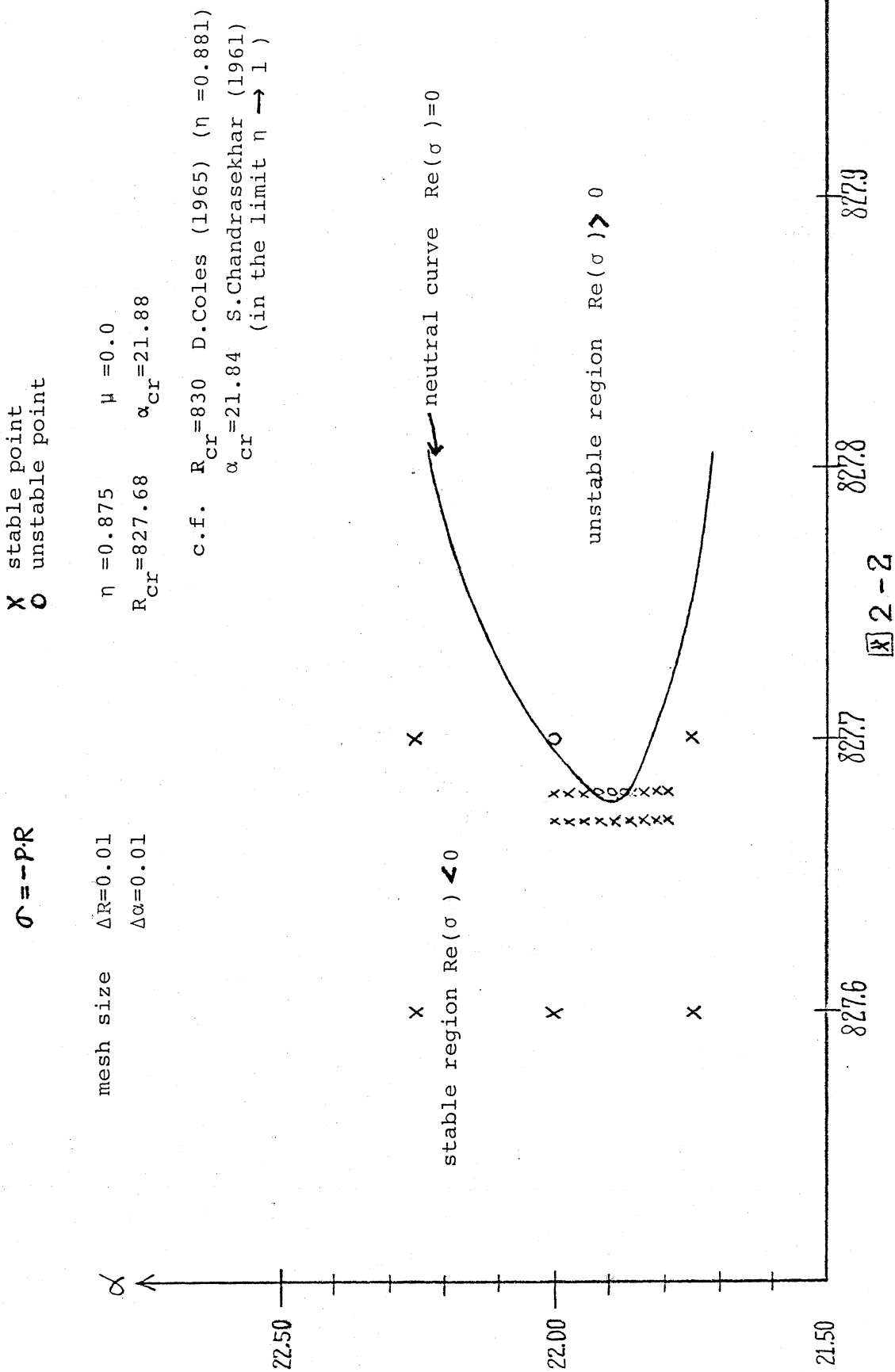
$R_{cr} = 68.24$ $\eta = 0.5$
 $\alpha_{cr} = 3.15$ $\mu = 0.0$

c.f. $R_{cr} = 68.23$

$\alpha_{cr} = 3.2$ Chandrasekhar
 (1961)

mesh size $\Delta R = 0.05$
 $\Delta \alpha = 0.01$





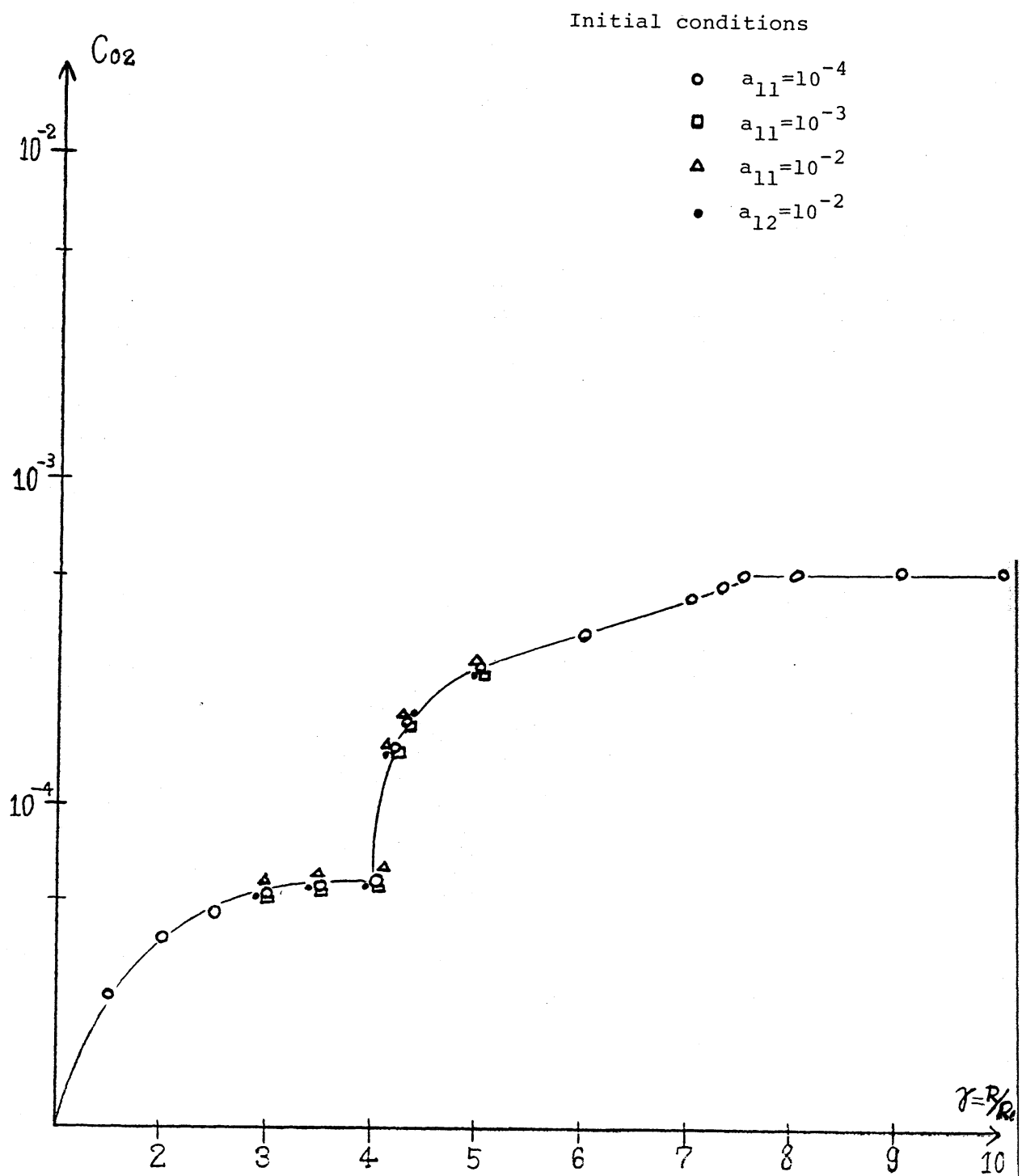
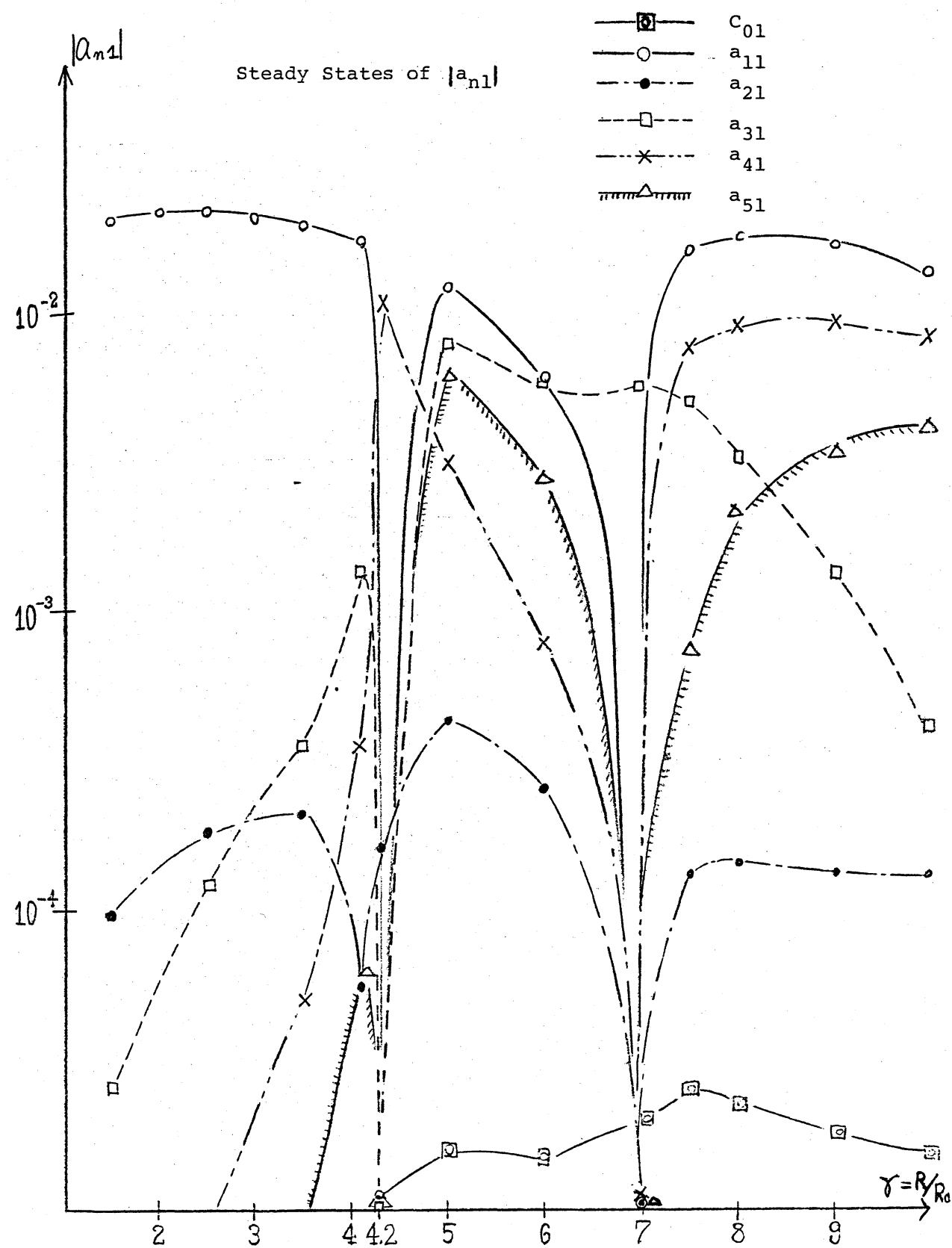
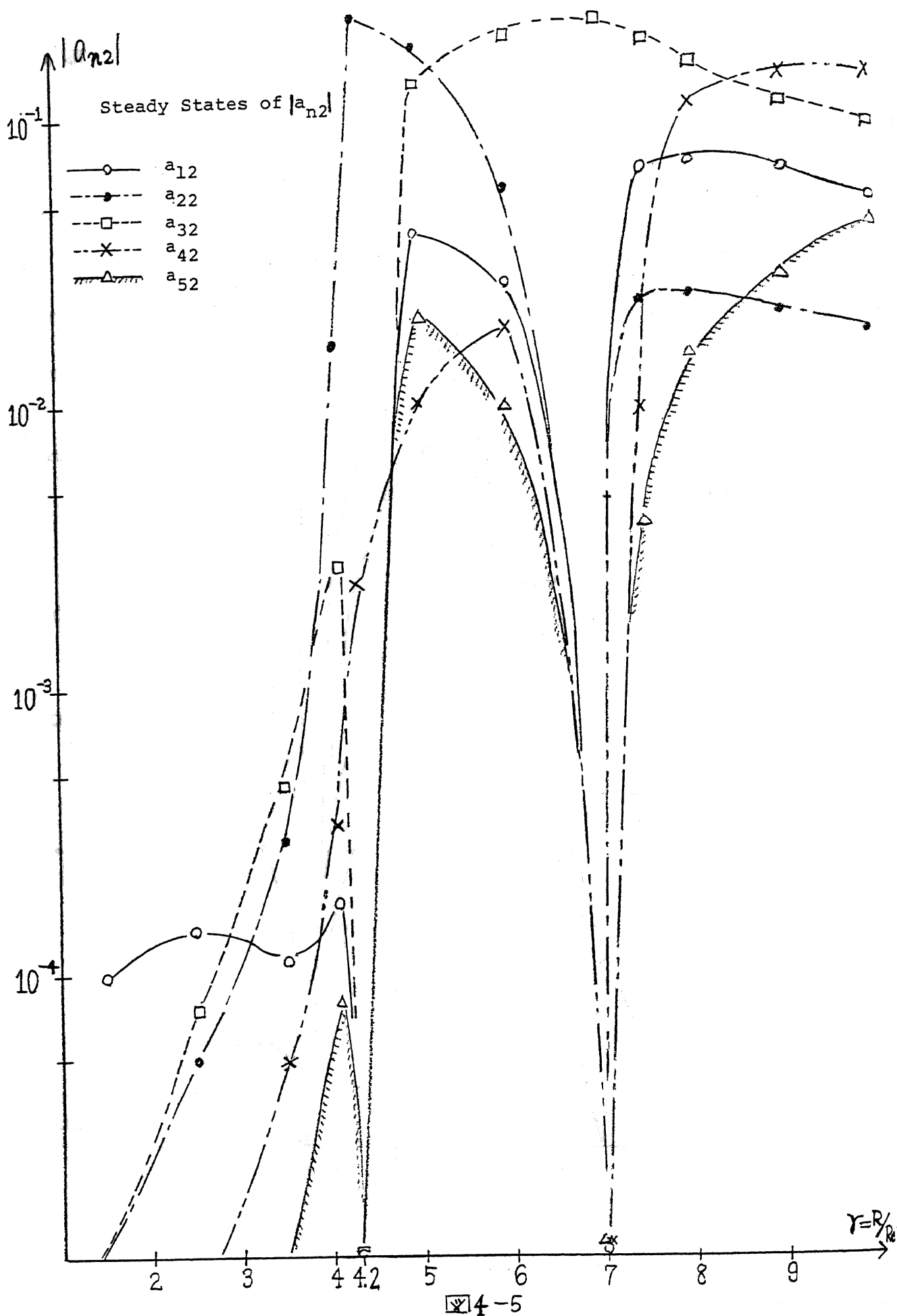
Steady States of C_{O_2} 

图 4-3



4-4



The variation of steady state of C_{O_2} for successive small changes of γ .
The arrow indicates the direction of the variation.

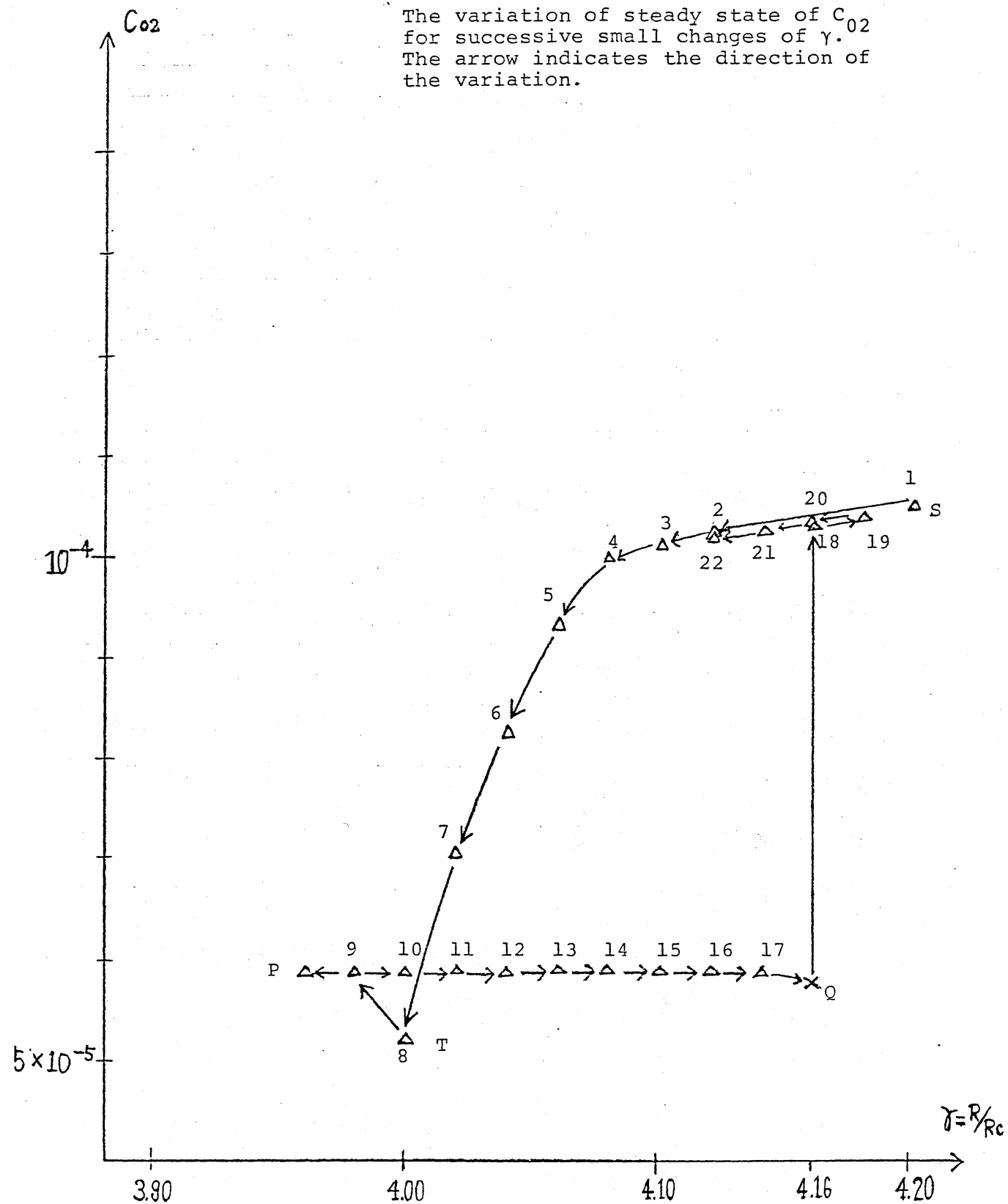


图 4 - 7