

特異点をもつ非線型偏微分方程式の 解の一意性について

上智大理工 田原 秀敏 (Hidetoshi TAHARA)

本稿では

$$(E) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^m u = F\left(t, x, \left\{\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}}\right)$$

という形の非線型偏微分方程式の解の一意性について論じる. 目的は「解の一意性の結果を導き, それを解の特異点の研究に応用する」ことにある. 特異点に関係してくるのは, $t=0$ が方程式 (E) の特異点になっているためである.

1 方程式の条件など

$m \in \mathbf{N}^*(= \{1, 2, \dots\})$, $t \in \mathbf{C}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ とし, $u(= u(t, x))$ を未知関数とする次の形の非線型偏微分方程式を考える:

$$(E) \quad \left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^m u = F\left(t, x, \left\{\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right\}_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}}\right).$$

ここで, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n (= \{0, 1, 2, \dots\}^n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

とする.

$$Z = \{Z_{j,\alpha}\}_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}}, \quad Z_{j,\alpha} \in \mathbf{C}$$

とおく. $F(t, x, Z)$ は (t, x, Z) を複素変数とする関数であって次の条件を満たすものとする.

- A₁) $F(t, x, Z)$ は $(0, 0, 0)$ の近傍で正則;
- A₂) $x = 0$ の近傍で $F(0, x, 0) \equiv 0$;
- A₃) $|\alpha| > 0$ ならば, $x = 0$ の近傍で $\frac{\partial F}{\partial Z_{j,\alpha}}(0, x, 0) \equiv 0$.

問題 1 $A_1), A_2), A_3)$ のもとで方程式 (E) の解の構造を決定せよ.

今, (E) に対して

$$C(\rho, x) = \rho^m - \sum_{j < m} \frac{\partial F}{\partial Z_{j,0}}(0, x, 0) \rho^j$$

とおき, ρ に関する方程式 $C(\rho, x) = 0$ の解を $\rho_1(x), \dots, \rho_m(x)$ とおく. この $\rho_1(x), \dots, \rho_m(x)$ を (E) の特性指数という.

正則解については, 次の結果が基本的である.

定理 1 (Gérard-Tahara [2]) もしも $\rho_1(0), \dots, \rho_m(0) \notin \{1, 2, \dots\}$ ならば, 方程式 (E) は 原点の近傍で正則な解 $u(t, x)$ で $u(0, x) \equiv 0$ を満たすものを唯一つもつ.

2 特異点の研究と解の一意性

定理 1 で得られた正則解を u_0 , (E) の解 $u(t, x)$ で

「 $x = 0$ の近傍で x に関して一様に $u(t, x) = o(1)$ ($t \rightarrow 0$)」

を満たすものの全体を $\mathcal{S}$ とおく. 状況は

- 1) $u_0 \in \mathcal{S}$ で u_0 は唯一つの正則解であり,
 - 2) 従って u_0 以外の解はすべて何等かの特異点をもっている,
- となっている. 方程式 (E) は, 言わば, 「非線型の Fuchs 型」とでもいうべき形をしており, (E) の特徴的な性質は多分殆どすべて「 $t = 0$ に特異点をもつ解」の中に現れると思われる. 次の問題設定は当然であろう.

問題 2 方程式 (E) の解に現れるすべての特異点を決定せよ.

以後, 本稿では「特異点をもつ解」のことを「特異解」とよぶことにする.

もしも すべての特異解を具体的に構成出来たなら, 上の問題 2 は直ちに即解決. しかし, 実際に「すべての特異解を具体的に構成する」ことはそう簡単ではなさそうである. そこで, 上の問題 2 を 2 つに分けて考えてみたい.

(2-1) どんな種類の特異点が現れるのか？

(2-2) どんな種類の特異点は、実際には現れないのか？

(2-1) は「特異点の存在の問題」であり、(2-2) は「特異点の非存在の問題」である。(2-1) を解くには、「実際に解を構成してしまう」というのが普通考えられる方法だろう。幾つかの場合については、Gérard-Tahara [2] の中で実行されている。参照されたい。本稿では (2-2) を考えてみたい。戦略は「解の一意性を使って特異点の非存在を示す」というものである。アイデアは次のとおり。

[アイデア] S の部分集合 S_0 で次の性質をもつものを見つける。

- i) $S_0 \ni u_0$;
- ii) S_0 は見掛け上、設定の段階で特異点を許容している；
- iii) S_0 の中では 解の一意性が成り立つ。

この時 $S_0 = \{u_0\}$ であり、従って「見掛け上、設定の段階で許容していた種類の特異点は S の中には実際には出てこない」と結論できる。

3 一意性定理 (1)

はじめに、Gérard-Tahara [2] の中で使われた一意性の結果を述べておく。次の記号を使う。

- $\mathcal{R}(C \setminus \{0\})$ を $C \setminus \{0\}$ の普遍被覆面とする；
- $S_\theta(\delta) = \{t \in \mathcal{R}(C \setminus \{0\}) ; 0 < |t| < \delta, |\arg t| < \theta\}$;
- $D_r = \{x \in C^m ; |x| \leq r\}$.

$\rho_1(x), \dots, \rho_m(x)$ を (E) の特性指数とし

$$\rho^* = \max_{1 \leq i \leq m} \operatorname{Re} \rho_i(0)$$

とおく。

定義 1 (解のクラス S_+^*) 次の条件を満たす関数 $u(t, x)$ の全体を S_+^* とかく。

- 1) $u(t, x)$ は $S_\theta(\delta) \times D_r$ で正則であり、

2) ある $a > \max\{0, \rho^*\}$ があって、次が成り立つ.

$$\max_{x \in D_r} |u(t, x)| = O(|t|^a) \quad (S_\theta(\delta) \ni t \rightarrow 0 \text{ のとき}).$$

定理 2 (Gérard-Tahara [2]) 方程式 (E) に対して, S_+^* の中で解の一意性が成り立つ.

一見, $\rho^* \geq 1$ のときは S_+^* は正則解 u_0 を含まないようにみえる. しかし「もしも $S_+^* \neq \emptyset$ ならば適合条件から自動的に $S_+^* \ni u_0$ となる」ことが分かる. よって次を得ることは易しい.

定理 2 の系 方程式 (E) の解の中には「ある $a > \max\{0, \rho^*\}$ に対して,

$$\max_{x \in D_r} |u(t, x)| = O(|t|^a) \quad (S_\theta(\delta) \ni t \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

となる」ような特異点は出てこない.

定理 2 の系の意味を解説しておく. [2] の中で次の結果が示されている.

結果 もしも

- 1) $\rho^* > 0$,
- 2) $\operatorname{Re} \rho_p(0) = \rho^*$ となる $\rho_p(x)$ が正則で,
- 3) $\rho_1(0), \dots, \rho_m(0) \notin \{1, 2, \dots\}$

ならば, 方程式 (E) は次のような特異解をもっている.

$$U(t, x) = u_0(t, x) + t^{\rho_p(x)} (\varphi(x) + w(t, x)).$$

(但し, $u_0(t, x)$ は定理 1 の正則解, $\varphi(x)$ は $\varphi(0) \neq 0$ なる正則関数, $w(t, x)$ は $S_\theta(\delta) \times D_r$ 上で正則で $w(t, x) = o(1) (t \rightarrow 0)$ を満たすもの.)

上の結果は「特異点の存在」を主張するものである. 解 $U(t, x)$ の特異点の主要部は $t^{\rho_p(x)}$ であり, $x = 0$ に固定して考えると

$$|t^{\rho_p(0)}| = |t|^{\operatorname{Re} \rho_p(0)} = |t|^{\rho^*}$$

である. このことを考え合わせれば, 定理 2 の系の「特異点の非存在の条件 $a > \max\{0, \rho^*\}$ 」は「 $\rho^* > 0$ のときはギリギリの条件である」と言っても言い過ぎではあるまい.

4 一意性定理(2)

次の例を見てみよう.

例 $(t, x) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ として次の方程式を考える.

$$(e) \quad t \frac{\partial u}{\partial t} = u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^k.$$

このとき, $\rho^* = 0$ であって次が成り立つ.

- 1) (e) の唯一つの正則解は $u_0 \equiv 0$ であり,
- 2) 更に (e) は次の形の特異解をもっている.

$$u_{\alpha, c}(t, x) = \left(\frac{1}{k} \right)^{1/k} \frac{x + \alpha}{(c - \log t)^{1/k}}, \quad \alpha, c \in \mathbf{C}.$$

上の方程式 (e) に対しては「 S_+^* の中で解の一意性が成り立つ」が, それは $u_{\alpha, c} \notin S_+^*$ だからである. 解のクラスを $u_{\alpha, c}$ を含むように もう少し広く設定してみよう.

定義 2 (解のクラス S_{log}) 次の条件を満たす関数 $u(t, x)$ の全体を S_{log} とかく.

- 1) $u(t, x)$ は $S_\theta(\delta) \times D_r$ で正則であり,
- 2) ある $a > 0$ があって, 次が成り立つ.

$$\max_{x \in D_r} |u(t, x)| = O \left(\frac{1}{(-\log |t|)^a} \right) \quad (S_\theta(\delta) \ni t \rightarrow 0 \text{ のとき}).$$

このように解のクラスを設定すると, 方程式 (e) に対して「 S_{log} の中では, 解の一意性は成り立たない」. しかし $\rho^* < 0$ ならば次が成り立つ.

定理 3 (Tahara [4]) もしも $\rho^* < 0$ ならば, 方程式 (E) に対して S_{log} の中で解の一意性が成り立つ.

もちろん, 本節ははじめの例から分かるように $\rho^* < 0$ という条件は「 S_{log} の中で解の一意性が成り立つ」ギリギリの条件である. 次を得ることは易しい.

定理 3 の系 もしも $\rho^* < 0$ ならば, 方程式 (E) の解の中には「ある $a > 0$ に対して,

$$\max_{x \in D_r} |u(t, x)| = O\left(\frac{1}{(-\log |t|)^a}\right) \quad (S_\theta(\delta) \ni t \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

となる」ような特異点は出てこない.

参考文献

- [1] R. Gérard and H. Tahara : *Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular first order partial differential equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 26 (1990), 979-1000.
- [2] R. Gérard and H. Tahara : *Solutions holomorphes et singulières d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 29 (1993), 121-151.
- [3] R. Gérard and H. Tahara : *Singular nonlinear partial differential equations*, Aspects of Mathematics, E 28, Vieweg-Verlag, 1996
- [4] H. Tahara: *Uniqueness of the solution of non-linear singular partial differential equations*, to appear.