

6.

ミルナーの方法による Mandelbrot 集合 の自己相似性について

小林 美千代 (上智大理工)

6.1 はじめに

$f_c(z) = z^2 + c$ という 2 次多項式に対して、 $\{c \mid c \in \mathbf{C}\}$ (parameter plane) と $\{z \mid z \in \overline{\mathbf{C}}\}$ (dynamical plane) という 2 つの複素平面における挙動を考える。

関数族 $\{f_c \mid c \in \mathbf{C}\}$ の挙動は $f'_c(z) = 0$ を満たす点 (今の場合は $z = 0$)、つまり特異点 (critical point) の軌道 $\{0, f_c(0), f_c^{\circ 2}(0), \dots\}$ により大まかに分類することができる。

定義 マンデルブロー集合 (Mandelbrot set) M とは

$$M := \{c \in \mathbf{C} \mid f_c^{\circ n}(0) \not\rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$$

である。また f_c の充填ジュリア集合 (filled-in Julia set) K_c とは

$$K_c := \{z \in \overline{\mathbf{C}} \mid f_c^{\circ n}(z) \not\rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)\}$$

である。

定義 0 が狭義の意味で f_{c_0} の前周期点となっているとき $c_0 \in M$ となる。この c_0 をミシウレビッツ点 (Misiurewicz point) と呼ぶ。すなわち、

$$\exists \ell > 0, \exists k > 0 \text{ s.t. } \begin{cases} f_{c_0}^{\circ n}(0) = f_{c_0}^{\circ n+k}(0) & \forall n \geq \ell \\ f_{c_0}^{\circ k}(0) \neq 0 \end{cases}$$

マンデルブロー集合の良く知られている性質としてコンパクト、連結ということがある。またミシウレビッツ点の近傍では自己相似のみならずジュリア集合との他者相似であることも Tan-Lei によって示されている。そして $M = \{c \in \mathbb{C} \mid |f_c^n(0)| \leq 2 \forall n \in \mathbb{N}\}$ という特徴づけもあり、この方法によりマンデルブロー集合を描くことも可能であるが細部までは描くことができない。一方下記のミルナーの方法を用いると細部まで観察することが可能となる。

6.2 ミルナーの方法

この方法はケーベの $1/4$ 円定理とドゥアディとハッバードの成果が基になっている。以下 $R \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ に対して $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ とする。

ケーベの $1/4$ 円定理 $f: D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ が正則かつ $1:1$ のとき $f(0) = 0$ かつ $|f'(0)| = 1$ ならば $D_{1/4}(0) \subset f(D_1(0))$ である。

系 $f: D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ が正則かつ $1:1$ のとき $f(0) = a$ かつ $|f'(0)| = b$ ならば $D_{b/4}(a) \subset f(D_1(0))$ である。

定理 (ドゥアディ・ハッバード) $\mathbb{C} \setminus M$ から $\mathbb{C} \setminus \overline{D_1(0)}$ への等角かつ双正則な写像 Φ が存在する。

任意の $c_0 \in \mathbb{C} \setminus M$ をとると、ドゥアディ・ハッバードの写像 Φ により $\Phi(c_0) \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_1(0)}$ である。 $r(z) = 1/z$ に対して $d = (r \circ \Phi)(c_0)$ とすると $d \in D_1(0) \setminus \{0\}$ となるが、 r は 0 において定義されていない。そこでメビウス変換

$$m_d(z) = \frac{z - d}{1 - \bar{d}z}$$

を考えると $m_d(d) = 0$, $m_d(0) = -d$ となる。したがって $m_d \circ r \circ \Phi$ は $\mathbb{C} \setminus M$ を $D_1(0) \setminus \{-d\}$ へ写像する。そこで写像 $(m_d \circ r \circ \Phi)^{-1}(z)$ を $D_{|d|}(0) \subset D_1(0) \setminus \{-d\}$ に制限すれば、ケーベの $1/4$ 円定理の系の仮定を満たす写像 Ψ_{c_0} が次のように得ることが出来る。

$$\begin{aligned} \Psi_{c_0} : D_1(0) &\rightarrow \mathbb{C} \setminus M \\ z &\mapsto (m_d \circ r \circ \Phi)^{-1}(|d|z) \end{aligned}$$

このとき

$$\Psi_{c_0}(0) = c_0 \quad |\psi'_{c_0}(0)| = R = \frac{|\Psi_{c_0}^2(c_0)| - 1}{|\Psi_{c_0}(c_0)| |\Psi'_{c_0}(c_0)|}$$

となるので $R/4 < d(c_0, M)$ である。この式を $G(c) = \log |\Phi(c)|$ で置き換え、知られている上からの評価式と組み合わせると

$$\frac{\sinh G(c_0)}{2e^{G(c_0)} |G'(c_0)|} < d(c_0, M) < \frac{2 \sinh G(c_0)}{e^{G(c_0)} |G'(c_0)|}$$

がいえる。この $\mathbf{C} \setminus M$ 上のポテンシャル関数 $G(c)$ は $\mathbf{C} \setminus M$ 上の調和関数になっていて

$$G(c_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |z_n|}{2^n} \quad (z_n = f_{c_0}^{on}(c_0))$$

ということを距離の評価式に適用する。このとき c_0 が M の近傍であれば $G(c_0)$ は 0 に近いので $\sinh G(c_0) \approx G(c_0)$ という近似と、十分大きな n に対して $1/|z_n|^{\frac{1}{2}}$ は 1 に近いということを用いると

$$d(c_0, M) \approx \frac{|z_n|}{2|z'_n|} \log |z_n| \quad (z_n = f_{c_0}^{on}(c_0), z'_n = \frac{d}{dc} f_{c_0}^{on}(c_0))$$

注意 [2] の付録 D 263 ページにおけるアルゴリズムで、 $\mathbf{C}$ 平面と仮想描画平面との変換式にミスがあるので注意する必要がある。

誤

正

$$\text{irad} := \text{INT}(\text{dist} * \text{side}) \implies \text{irad} := \text{INT}(\text{dist} * (n-1) / \text{side})$$

6.3 自己相似性

ミルナーにより一般化されたファイゲンバウム点の近傍での自己相似性が予想されているので、ミルナーの方法を用いてマンデルブロー集合を描画し、検証および考察する。

定義 0 が f_s の周期点となっているとき $s \in M$ を超安定点 (*superstable point*) という。すなわち

$$\exists p \in \mathbf{N} \text{ s.t. } \begin{cases} f_s^{op}(0) = 0 \\ f_s^{oj}(0) \neq 0 \quad 0 < j < p \end{cases}$$

定理 (ドゥアディ・ハッバード) 超安定点の集合を S とするとき、任意の $s \in S$ に対してドゥアディ・ハッバード積 (*Douady-Hubbard product*) による 0 を s にうつす M から M への埋め込み写像 Φ_s が存在する。

$S \ni s, s'$ がそれぞれ p, q 周期の超安定点のとき s と s' のドゥアディ・ハッバード積 (D-H 積) $s * s' \in S$ は $p \times q$ 周期の超安定点となる。この D-H 積において単位元 ($s = 0$) が存在し、結合法則

が成り立つので S はモノイドである。さらに S は無限巡回半群の自由積となっていることより自由モノイドという代数的構造が入る。

定義 2 べき分岐 (period-doubling bifurcation) の集積点をファイゲンバウム点 (Feigenbaum point) という。

D-H 積で考えると f_c の 2 周期の超安定点 $s_2 (= -1)$ に対して、 $s_2, s_2 * s_2, s_2 * s_2 * s_2, \dots, s_2^\infty$ を考えたときの s_2^∞ のことである。

ミルナーの予想 -1- ある p に対する p 周期超安定点 s を一つとり固定すると D-H 積により $s, s * s (= s^{*2}), s * s * s (= s^{*3}), \dots$ の列が決まる。このとき

$$\delta_s^n = \frac{s^{*n} - s^{*(n-1)}}{s^{*(n+1)} - s^{*n}}$$

は $n \rightarrow \infty$ とするとき、ある複素数 δ_s^∞ ($|\delta_s^\infty| > 1$) に収束し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s^{*n} = s^\infty$$

となる s^∞ が存在する。

定義 この s^∞ を一般化されたファイゲンバウム点 (generalized Feigenbaum point) という。

ミルナーの予想 -2- 一般化されたファイゲンバウム点の近傍では自己相似である。

6.4 自己相似性の検証

6.4.1 ファイゲンバウム点

ファイゲンバウム点は 2 周期の超安定点 ($s_2 = -1$) の集積点とみなせ、ファイゲンバウム定数 δ は 4.669201609 である。

s_2	s_2^{*2}	s_2^{*3}	s_2^{*4}	$\dots$	s_2^∞
-1	-1.310703	-1.381547	-1.396945	$\dots$	-1.401155189

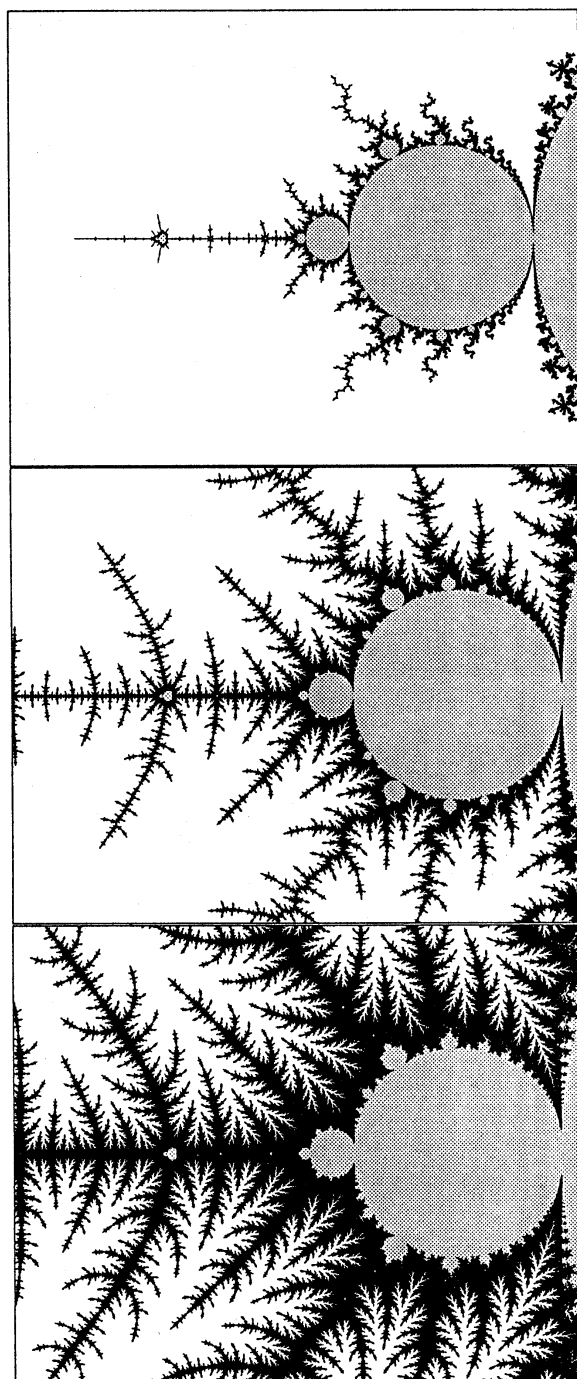


表 1 ファイゲンバウム点 $s_2^\infty = -1.401155189$ を中心とした拡大図

表 1 では反復回数の最大値を 1024 回、反復中止のための大きな数を 10^{12} 、微係数の最大値を 100000.0 としている。また実軸の幅はそれぞれ上から 1.55, $0.33(1.55/\delta)$, $0.071(0.33/\delta)$ である。

6.4.2 一般化されたファイゲンバウム点

4 周期の超安定点 s は定義より

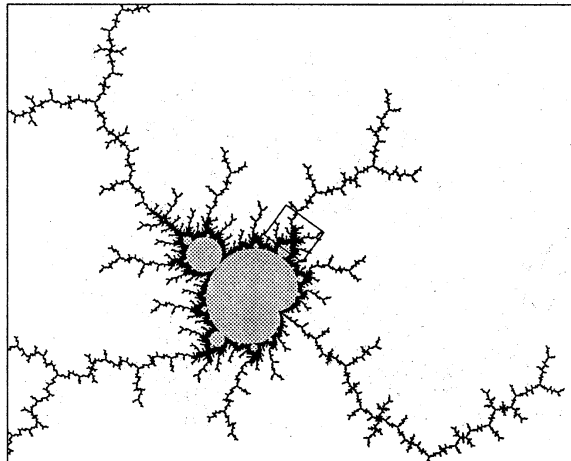
$$\frac{f_s^{\circ 4}(0)}{s(s+1)} = \frac{((s^2+s)^2+s)^2+s}{s(s+1)} = s^6 + 3s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 1 = 0$$

を満たす。上記方程式の解は

$$\begin{aligned} s &= -1.940799806530759, -1.310702641333667, \\ &0.2822713907659142 \pm 0.5300606175788218i, \\ &-0.1565201668337011 \pm 1.032247108921586i \end{aligned}$$

であるが、 $s_4 = -0.1565202 + 1.032247i$ について一般化されたファイゲンバウム点 s_4^∞ における自己相似を観察する。

$$\begin{aligned} s_4^\infty &= -0.15284673572977 + 1.03969513783306i \\ \delta_4^\infty &= 100.43119 + 69.34045i \\ \arg \delta_4^\infty &= 0.1923459101475946\pi \\ |\delta_4^\infty| &= 122.0431150496356 \end{aligned}$$



上記図は表 2 の一番上の図の中心付近を縦横に 10 倍拡大したものである。図中の長方形が表 2 の上から二番目の図を示している。二番目と一番下の図の関係も同様の関係 (倍率と回転率) である。

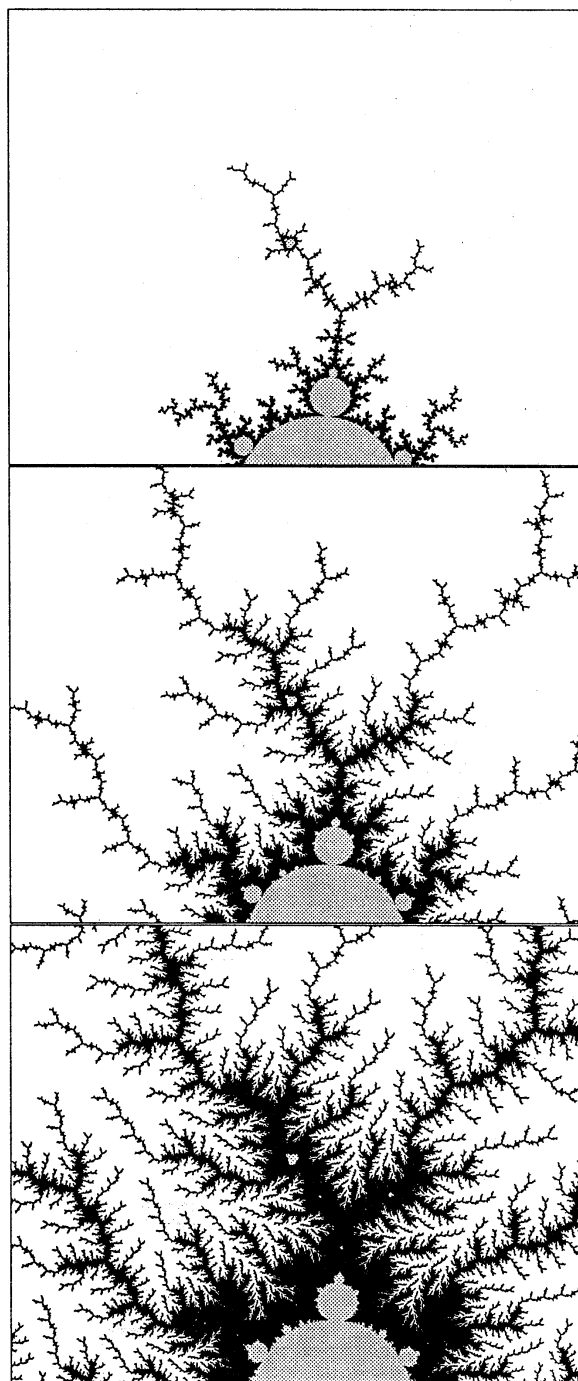


表 2 一般化されたファイゲンバウム点 $s_4^\infty = -0.1528 + 1.0397i$ を中心とした拡大図

	反復回数の最大値	反復中止のための大きな数	微係数の最大値	横幅
表 2 の上の図	1024	10^{12}	100000.0	0.64
表 2 の中の図	1024	10^{12}	100000.0	$0.0052(.64/ \delta_4^\infty)$
表 2 の下の図	1500	10^{15}	1000000.0	$0.000043(.0052/ \delta_4^\infty)$

6.5 考察

いくつかの一般化されたファイゲンバウム点の近傍をミルナーの方法を用いて拡大したところ、一般化されたファイゲンバウム定数ともいえる δ_∞ が拡大率、回転の角度を支配していることが観察された。

Reference

- [1] J. Milnor, Self-Similarity and Hairness in the Mandelbrot Set, Institute for advanced Study Princeton, New Jersey
- [2] H.-O. Peitgen, D. Saupe 編, 山口昌哉監訳, フラクタル・イメージ (理論とプログラミング), シュプリンガー・フェアラーク東京 (株)