

ON RANDOM KRIPKE FRAMES

池田 宏一郎 AND 岡本 圭史

ABSTRACT. このノートの目的は、命題様相論理の 0-1 法則に関する結果を紹介することである。命題様相論理では、クリプキ構造の恒真性に関する 0-1 法則とクリプキ・フレームの恒真性に関する 0-1 法則のふたつが研究されている。このノートでは、クリプキ・フレームの恒真性に関する 0-1 法則を扱う。特に、ランダム クリプキ・フレームを定義し、ランダム クリプキ・フレームによる転換定理が成り立たないことを紹介する。また、命題様相論理に不慣れな読者のために、命題様相論理の基本的な事柄についても解説する。

1. 一階述語論理の 0-1 法則

この節では、命題様相論理における 0-1 法則について述べる前に、一階述語論理の 0-1 法則について述べる。一階述語論理の 0-1 法則に関する文献には [4, 6] などがある。

言語として二変数述語記号 E のみを考え、グラフを一階述語論理の構造として扱う。

定義 1. $\mathbf{G}_n$ は頂点 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上のグラフ全体の集合、 φ は論理式とする。このとき、 φ の漸近確率 (*asymptotic probability*) $P_n(\varphi)$ を次で定義する：

$$P_n(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\{G \in \mathbf{G}_n \mid G \models \varphi\}|}{|\mathbf{G}_n|}$$

$\mathbf{G}_n$ からグラフ G が選ばれる確率は全て等しいと仮定すると、 $P_n(\varphi)$ は、 $\mathbf{G}_n$ からひとつグラフを選んだとき、それが φ を満たす確率に等しい。

このように定義された漸近確率に対し、次の定理が成り立つ。

定理 2 (0-1 法則 [7, 8]). 任意の閉論理式 φ に対し、次の性質が成り立つ：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi) = 0 \text{ または } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi) = 1$$

一階述語論理が持つこの性質を **0-1 法則**(0-1 law) と呼ぶ。

0-1 法則を証明する手法として、“ランダムグラフ”と呼ばれる可算無限構造による“転換定理”(transfer theorem) から 0-1 法則を示す手法がある [7]。この節の残りでは、ランダムグラフと転換定理について述べる。

定義 3 (拡張公理). 性質“互いに共通部分の無い濃度 k の部分グラフ X, Y に対し、 X, Y に含まれない頂点 z で、 X の全ての要素と繋がっているが、 Y の全ての要素と繋がっていないものが存在する”を表す (一階述語論理の) 論理式を σ_k と書く。

このように定義した σ_k に対し、次の命題が成り立つ。

命題 4. 次が成り立つ：

- (1) $\{\sigma_k\}_{k \in \omega}$ は無矛盾である、

Date: 2007 年 10 月 31 日.

(2) $\{\sigma_k\}_{k \in \omega}$ は $\aleph_0$ -範疇的 (よって, 完全) である.

$\{\sigma_k\}_{k \in \omega}$ を満たす可算無限グラフは, 同型を除いて一意に決まるので, この可算無限グラフをランダムグラフ (the random graph) と呼び, G^r と書く.

定理 5 (転換定理 [7]). 任意の閉論理式 φ に対し, 次が成り立つ:

$$G^r \models \varphi \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi) = 1$$

証明 $k \in \omega$ とする. 確率計算により, 以下の等式と不等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} P_n(\neg \sigma_k) &\leq \frac{\binom{n}{k} \binom{n-k}{k} \cdot 2^{\binom{2k}{2}} \cdot 2^{\binom{n-2k}{2}} \cdot (2^{2k} - 1)^{n-2k}}{2^{\binom{n}{2}}} \\ &= \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)^{n-2k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

したがって, 任意の $k \in \omega$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\sigma_k) = 1$ が成り立つ.

φ を論理式とする. 上の等式から, 次の関係成り立つ:

$$\begin{aligned} G^r \models \varphi &\Leftrightarrow \{\sigma_k\}_{k \in \omega} \vdash \varphi \quad (\because \{\sigma_k\}_{k \in \omega} \text{ は完全}) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \omega. \sigma_k \vdash \varphi \\ &\Rightarrow 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\sigma_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi) \end{aligned}$$

上の結果から, 次の関係が成り立つ:

$$G^r \not\models \varphi \Leftrightarrow G^r \models \neg \varphi \Rightarrow 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\neg \varphi) \Rightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi)$$

□

転換定理から, 0-1 法則が成り立つことが分かる. (転換定理による, 0-1 法則の証明は Fagin により与えられた [7].) さらに, この定理は, 言語を $\{E\}$ から任意の関係言語 (relational language) 拡張しても, 成り立つことが知られている.

集合 $\{\varphi \mid \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi) = 1\}$ は “ほとんど全ての” 有限構造で成り立つ論理式全体であると言える. この集合と “全ての” 有限構造で成り立つ論理式全体の間には, 次の大きな違いがある.

定理 6. (一階述語論理では) 以下の主張が成り立つ:

- (1) 全ての有限構造で成り立つ論理式全体は帰納的枚挙可能ではない [14].
- (2) 集合 $\{\varphi \mid \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi) = 1\}$ は決定可能である (実は, $PSPACE$ -完全 [10]).

証明 (2) のみ示す. 定理 5 から, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \{\sigma_k\}_{k \in \omega} \vdash \varphi$ がわかる. 他方, 一般に, 完全な一階理論は決定可能である. したがって, $\{\sigma_k\}_{k \in \omega}$ は完全なので, 決定可能である. 以上の結果から, 集合 $\{\varphi \mid \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\varphi) = 1\}$ は決定可能. □

この定理が示すように, 一階述語論理では, 有限構造に対する “恒真性” を調べることが決定可能でなくても, 有限構造に対する “ほとんど恒真であること” は決定可能である.

2. 命題様相論理

本節では, 様相論理の中でも, 特に命題様相論理の構文と意味論を定義する. また命題様相論理の一階述語論理への埋め込みを提示し, ふたつの論理の関係を調べる. 様相論理に関する文献には [2, 5, 16] などがある.

2.1. **命題様相論理**. 命題様相論理 (propositional modal logic) の論理式は、命題論理の演算子に様相演算子 (modal operator) $\Box$ と $\Diamond$ を加えて得られる論理式であり、次のように定義される.

定義 7. Φ は集合とし、 Φ の要素を命題変数 (propositional variable) と呼ぶ. 命題様相論理の論理式全体を次で定義する:

- Φ の任意の要素 p は論理式である.
- $\perp$ は論理式である.
- φ と ψ が論理式ならば $(\neg\varphi)$ と $(\varphi \wedge \psi)$ も論理式である.
- φ が論理式ならば $(\Box\varphi)$ は論理式である.

以下、命題変数を $p, q, \dots$ などと表す. また、以下の省略形を用いる.

- $(\varphi \vee \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$
- $(\varphi \supset \psi) \stackrel{\text{def}}{=} ((\neg\varphi) \vee \psi)$
- $(\Diamond\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (\neg(\Box(\neg\varphi)))$
- $(\varphi \equiv \psi) \stackrel{\text{def}}{=} ((\varphi \supset \psi) \wedge (\psi \supset \varphi))$

さらに、可読性を高めるために、括弧“(”と“)”を適宜省略する. その際、各演算子の結合の強さは以下の通りとする:

$$\{\neg, \Box, \Diamond\} > \{\wedge, \vee\} > \{\supset\}$$

例えば、 $\Box\varphi \wedge \psi \supset \Box(\varphi \wedge \psi)$ は論理式 $((\Box\varphi) \wedge \psi) \supset (\Box(\varphi \wedge \psi))$ の省略形である. 以後、 φ, ψ などで論理式を表す.

次に、命題様相論理の意味論を定義する. 命題様相論理に対しては、代数意味論 (algebraic semantics) や neighborhood semantics (Scott-Montague semantics) とも呼ばれる. 文献 [3]7 章参照) など、いくつかの意味論が知られているが、今回はクリプキ意味論を用いて論理式の真偽を定義する. クリプキ意味論では、クリプキ・フレームと呼ばれる構造を基に論理式の真偽を決める.

定義 8. 空でない集合 $\mathcal{W}$ とその上の二項関係 $\mathcal{R}$ の組 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ をクリプキ・フレーム (Kripke frame) と呼ぶ. また $\mathcal{F}$ をクリプキ・フレームとする. このとき、函数 $\mathcal{V}: \Phi \rightarrow \wp(\mathcal{W})$ を ($\mathcal{F}$ における) 付値 (valuation) と呼び、組 $\langle \mathcal{F}, \mathcal{V} \rangle$ のことをクリプキ構造 (Kripke structure) と呼ぶ.

以下、クリプキ・フレームを $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ などで、付値を $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ などで、クリプキ構造を $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ などで、それぞれ表す. また $\mathcal{W}$ の要素は可能世界 (possible world) または状態 (state) と呼ばれる.

定義 9. $\mathcal{S} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ をクリプキ構造とし、さらに $w \in \mathcal{W}$ であるとする. また φ は論理式とする. このとき、関係 $\mathcal{S}, w \Vdash \varphi$ を以下で定義する:

- $p \in \Phi$ のとき、 $\mathcal{S}, w \Vdash p \stackrel{\text{def}}{\iff} w \in \mathcal{V}(p)$
- $\mathcal{S}, w \Vdash \perp$ は成り立たない
- $\mathcal{S}, w \Vdash \neg\varphi \stackrel{\text{def}}{\iff} (\mathcal{S}, w \not\Vdash \varphi)$
- $\mathcal{S}, w \Vdash \varphi \wedge \psi \stackrel{\text{def}}{\iff} (\mathcal{S}, w \Vdash \varphi \text{ かつ } \mathcal{S}, w \Vdash \psi)$
- $\mathcal{S}, w \Vdash \Box\varphi \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall w' \in \mathcal{W}. w\mathcal{R}w' \Rightarrow \mathcal{S}, w' \Vdash \varphi)$

$\mathcal{S}, w \Vdash \varphi$ が成り立つとき、「論理式 φ はクリプキ構造 $\mathcal{S}$ において、可能世界 w で真である」あるいは「論理式 φ はクリプキ構造 $\mathcal{S}$ において、可能世界 w で成り立つ」と言う. また、 $\mathcal{S}, w \not\Vdash \varphi$ が成り立たないとき、 $\mathcal{S}, w \nVdash \varphi$ と書く.

上記のように直接、三項関係 $\Vdash$ を定義するのではなく、論理式全体から $\wp(W)$ への関数 $\llbracket - \rrbracket^S$ を定義し、それを用いて上と同じ $\Vdash$ を定義する流儀もある。(ただし $S = \langle W, \mathcal{R}, \nu \rangle$ はクリプキ構造とする) 関数 $\llbracket - \rrbracket^S$ は以下のように定義される:

- 任意の $p \in \Phi$ に対し $\llbracket p \rrbracket^S \stackrel{\text{def}}{=} \nu(p)$
- $\llbracket \perp \rrbracket^S \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$
- $\llbracket \neg \varphi \rrbracket^S \stackrel{\text{def}}{=} W \setminus \llbracket \varphi \rrbracket^S$
- $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket^S \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket \varphi \rrbracket^S \cap \llbracket \psi \rrbracket^S$
- $\llbracket \Box \varphi \rrbracket^S \stackrel{\text{def}}{=} \{ w \in W \mid \forall w' \in W. w \mathcal{R} w' \Rightarrow w' \in \llbracket \varphi \rrbracket^S \}$

このとき、 $S, w \Vdash' \varphi \stackrel{\text{def}}{\iff} w \in \llbracket \varphi \rrbracket^S$ により $\Vdash'$ を定義すると、 $\Vdash'$ は前出の $\Vdash$ と一致する。

定義 9 で定義した「論理式があるクリプキ構造において、ある可能世界で成り立つこと」を用いて、論理式がクリプキ構造 (またはクリプキ・フレーム) で常に成り立つことを定義する。

定義 10. $S = \langle W, \mathcal{R}, \nu \rangle$ はクリプキ構造とする。任意の $w \in S$ に対し $S, w \Vdash \varphi$ が成り立つとき $S \Vdash \varphi$ と書くことにする。また $S \Vdash \varphi$ が成り立つとき、論理式 φ はクリプキ構造 S で恒真であるという。(構造恒真性, *structure validity*)

$\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ はクリプキ・フレームとする。 $\mathcal{F}$ における任意の付値 ν に対し $\langle \mathcal{F}, \nu \rangle \Vdash \varphi$ が成り立つとき $\mathcal{F} \Vdash \varphi$ と書くことにする。また $\mathcal{F} \Vdash \varphi$ が成り立つとき、論理式 φ はクリプキ・フレーム $\mathcal{F}$ で恒真であるという。(フレーム恒真性, *frame validity*)

さらに、任意のクリプキ・フレーム $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathcal{F} \Vdash \varphi$ が成り立つとき $\Vdash \varphi$ と書くことにする。また $\Vdash \varphi$ が成り立つとき、論理式 φ は恒真であるという。(恒真性, *validity*)

次節では、構造恒真性とフレーム恒真性を用いて、命題様相論理における 0-1 法則を定義する。すなわち、一階述語論理の 0-1 法則が基づいていた「(一階述語論理の) 構造で (一階述語論理の) 論理式が成り立つ」という性質の代わりに、「クリプキ構造で (命題様相論理の) 論理式が恒真である」という性質と、「クリプキ・フレームで (命題様相論理の) 論理式が恒真である」という性質を用いて命題様相論理の 0-1 法則をふたつ定義する。

2.2. 標準翻訳. 前項では、一階述語論理とは無関係に、命題様相論理の構文と意味論を定義した。しかし、命題様相論理の論理式と一階述語論理の論理式の間には、標準翻訳 (standard translation) と呼ばれる翻訳があることが知られている [15]。さらに、標準翻訳により、命題様相論理を一階述語論理に埋め込めることが知られている。本項では、標準翻訳を定義し、命題様相論理の一階述語論理への埋め込み定理を証明する。

定義 11. 命題変数の集合 Φ に対し、(一階述語論理の) 一変数述語記号の集合 $\{P \mid p \in \Phi\}$ と二変数述語記号 R を合わせた語彙を σ_Φ と書くことにする。 x を一階述語論理の変数記号とすると、命題様相論理の論理式全体から一階述語論理の σ_Φ -論理式全体への写像 ST_x を次で定義する:

- 任意の $p \in \Phi$ に対し、 $ST_x(p) \stackrel{\text{def}}{=} P(x)$
- $ST_x(\perp) \stackrel{\text{def}}{=} x \neq x$
- $ST_x(\neg \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \neg ST_x(\varphi)$
- $ST_x(\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{def}}{=} ST_x(\varphi) \wedge ST_x(\psi)$
- $ST_x(\Box \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \forall y. R(x, y) \supset ST_y(\varphi)$

命題様相論理の任意の論理式 φ に対し, $ST_x(\varphi)$ は一階述語論理の論理式であり, さらに唯ひとつの自由変数 x を持つ.

命題様相論理の論理式から一階述語論理の論理式への翻訳 ST_x に続き, クリプキ構造 $\mathcal{S} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ を一階述語論理の σ_Φ -構造へ翻訳したもの $\langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p \in \Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle$ を次のように決める:

- 任意の $p \in \Phi$ に対し $P^{\mathcal{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}(p) (\subseteq \mathcal{W})$
- $R^{\mathcal{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R} (\subseteq \mathcal{W}^2)$

以上のように論理式とクリプキ構造の翻訳を定義すると, 次の定理が成り立つ.

定理 12. $\mathcal{S} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ はクリプキ構造, φ は命題様相論理の論理式とする. また $w \in \mathcal{W}$ であるとする. このとき, 下の関係が成り立つ:

$$\mathcal{S}, w \Vdash \varphi \Leftrightarrow \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p \in \Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models ST_x(\varphi)[w/x]$$

証明 論理式 φ の構成に関する帰納法で証明する. φ が $\Box\psi$ の形のときのみ示す.

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}, w \Vdash \Box\psi \\ \Leftrightarrow & \forall w' \in \mathcal{W}. w\mathcal{R}w' \Rightarrow \mathcal{S}, w' \Vdash \psi \\ \Leftrightarrow & \forall w' \in \mathcal{W}. ((w, w') \in R^{\mathcal{S}}) \Rightarrow (\langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p \in \Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models ST_y(\psi)[w'/y]) \\ \Leftrightarrow & \forall w' \in \mathcal{W}. \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p \in \Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models (R(x, y)[w/x][w'/y]) \supset (ST_y(\psi)[w'/y]) \\ \Leftrightarrow & \forall w' \in \mathcal{W}. \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p \in \Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models (R(x, y) \supset ST_y(\psi))[w/x][w'/y] \\ \Leftrightarrow & \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p \in \Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models (\forall y. R(x, y) \supset ST_y(\psi))[w/x] \\ \Leftrightarrow & \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p \in \Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models ST_x(\Box\psi)[w/x] \end{aligned}$$

□

定理 12 から, 次の系が導かれる.

系 13. $\mathcal{S} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ はクリプキ構造, φ は命題様相論理の論理式とする. このとき, 以下の関係が成り立つ:

- (1) $\mathcal{S} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \langle \mathcal{W}, \{P^{\mathcal{S}}\}_{p \in \Phi}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models \forall x. ST_x(\varphi)$
- (2) $\mathcal{F} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \langle \mathcal{W}, R^{\mathcal{S}} \rangle \models \forall P_1 \dots P_n. \forall x. ST_x(\varphi)$

ただし $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, $P_1, \dots, P_n$ は $ST_x(\varphi)$ に自由に出現する一変数述語全体とする.

証明 (1) は定理 12 と構造恒真性の定義から, (2) は定理 12 とフレーム恒真性の定義から, それぞれ導かれる. □

3. 命題様相論理における 0-1 法則

文献 [11] にあるように, 命題様相論理では, 構造恒真性に関する 0-1 法則と, フレーム恒真性に関する 0-1 法則のふたつの 0-1 法則が研究されている. (文献 [11] に対しては, 訂正 [12] が発表されている) 3.1 項では, これらふたつの 0-1 法則を定義し, 構造恒真性に関する 0-1 法則が成り立つことを示す. 3.2 項では, フレーム恒真性に関する 0-1 法則に関するふたつの結果について述べる. ひとつ目の結果として, ランダム クリプキ・フレームの定義を与え, ランダム クリプキ・フレームによる転換定理が成り立たないことを示す [9]. ふたつ目の結果として, フレーム恒真性に関する 0-1 法則が成り立たないという結果 [1] を紹介する.

3.1. 命題様相論理におけるふたつの 0-1 法則. $\mathbb{F}_n$ は $\mathcal{W} = \{1, 2, \dots, n\}$ であるクリプキ・フレーム $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ 全体を表わし, $\mathbb{S}_n$ は $\mathcal{W} = \{1, 2, \dots, n\}$ であるクリプキ構造 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ 全体を表すとする.

定義 14. φ は命題様相論理の論理式, n は 1 以上の自然数とする. このとき, φ の構造恒真性に関する漸近確率 (asymptotic probability) $P_n^s(\varphi)$ を次で定義する:

$$P_n^s(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\{S \in \mathbb{S}_n \mid S \models \varphi\}|}{|\mathbb{S}_n|}$$

また, φ のフレーム恒真性に関する漸近確率 $P_n^f(\varphi)$ を次で定義する:

$$P_n^f(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\{F \in \mathbb{F}_n \mid F \models \varphi\}|}{|\mathbb{F}_n|}$$

$P_n^s(\varphi)$ は, $\mathbb{S}_n$ の中から各クリプキ構造を取り出す確率が全て等しいときに, 取り出したクリプキ構造で φ が恒真である確率と等しい. 同様に, $P_n^f(\varphi)$ は, $\mathbb{F}_n$ の中から各クリプキ・フレームを取り出す確率が全て等しいときに, 取り出したクリプキ・フレームで φ が恒真である確率と等しい.

命題 15 ([11]). 命題様相論理の任意の論理式 φ に対し, 次の等式が成り立つ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^s(\varphi) = 1$$

すなわち, 命題様相論理の構造恒真性に関する 0-1 法則が成り立つ.

証明 $\hat{\mathbb{S}}_n$ は領域が $\{1, 2, \dots, n\}$ である一階述語論理の σ_Φ -構造全体を表すとする. $S = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle \in \mathbb{S}_n$ とすると, σ_Φ -構造 $\langle \mathcal{W}, \{P^S\}_{p \in \Phi}, R^S \rangle$ は $\hat{\mathbb{S}}_n$ の要素である. さらに, 系 13 から次の関係が成り立つ:

$$S \models \varphi \Leftrightarrow \langle \mathcal{W}, \{P^S\}_{p \in \Phi}, R^S \rangle \models \forall x. ST_x(\varphi)$$

上の関係が成り立つことと, $\mathbb{S}_n$ と $\hat{\mathbb{S}}_n$ の間に自然な全単射が存在することから, 次の等式が成り立つ:

$$\frac{|\{S \in \mathbb{S}_n \mid S \models \varphi\}|}{|\mathbb{S}_n|} = \frac{|\{A \in \hat{\mathbb{S}}_n \mid A \models \forall x. ST_x(\varphi)\}|}{|\hat{\mathbb{S}}_n|}$$

上の等式と, 述語記号のみを持つ一階述語論理で 0-1 法則が成り立つことから, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^s(\varphi) = 1$ が成り立つ. $\square$

$\hat{\mathbb{F}}_n$ を領域が $\{1, 2, \dots, n\}$ である一階述語論理の $\{R\}$ -構造全体とする. (R は語彙 σ_Φ に含まれる唯一の二変数述語記号) このとき, クリプキ・フレーム $F = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ を, $R^R \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}$ をであるような一階述語論理の $\{R\}$ -構造 $\langle \mathcal{W}, R^R \rangle$ に対応させる写像は, $\mathbb{F}_n$ と $\hat{\mathbb{F}}_n$ の間の自然な全単射になる. このことと, 系 13 から, 次の事実が成り立つ.

事実 16 ([11]). 命題様相論理の任意の論理式 φ に対し, 次の等式が成り立つ:

$$\frac{|\{F \in \mathbb{F}_n \mid F \models \varphi\}|}{|\mathbb{F}_n|} = \frac{|\{A \in \hat{\mathbb{F}}_n \mid A \models \forall P_1, \dots, P_m. \forall x. ST_x(\varphi)\}|}{|\hat{\mathbb{F}}_n|}$$

ただし $P_1, \dots, P_m$ は $\forall x. ST_x(\varphi)$ に自由に出現する一変数述語記号全体とする.

$\forall P_1, \dots, P_m. \forall x. ST_x(\varphi)$ は一階述語論理の論理式ではないので, 命題様相論理のフレーム恒真性に関する 0-1 法則を, 一階述語論理で 0-1 法則が成り立つという事実から導くことはできない.

3.2. ランダム クリプキ・フレーム. 一階述語論理では, ランダムグラフによる転換定理を用いて, 0-1 法則を示すことが出来た [7]. この項では, “ランダム クリプキ・フレーム” を定義し, ランダム クリプキ・フレームによる転換定理が成り立たないことを示す [9]. さらに, フレーム恒真性に関する 0-1 法則が成り立たないことを紹介する [1].

定義 17. • 次の形の論理式を拡張公理(*extension axiom*) と呼ぶ:

$$\forall \bar{x} \exists y \left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \rightarrow \left(\bigwedge_{i \in [n]} x_i \neq y \wedge T(y, y) \wedge \bigwedge_{i \in I} R(x_i, y) \wedge \bigwedge_{i \in [n] - I} \neg R(x_i, y) \wedge \bigwedge_{i \in J} R(y, x_i) \wedge \bigwedge_{j \in [n] - J} \neg R(y, x_j) \right) \right)$$

ただし, $\bar{x} = x_1 \dots x_n$ で, $T(y, y)$ は論理式 $R(y, y)$ または $\neg R(y, y)$ を表す. さらに, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ かつ $I, J \subseteq [n]$ であるとする.

- $\theta_k \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge \{ \text{高々 } k\text{-個以下の変数だけを含む拡張公理} \}$
- $EXT \stackrel{\text{def}}{=} \text{拡張公理全体のなす集合}$

一階述語論理におけるランダムグラフ同様, 次の主張が成り立つ.

事実 18. 次が成り立つ:

- (1) 任意の自然数 $k \geq 1$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\theta_k) = 1$
- (2) 理論 EXT は $\aleph_0$ -範疇的 ($\aleph_0$ -categorical), したがって完全 (*complete*)

事実 18 により, 理論 EXT の可算モデルは同型を除いて一意に決まる. 他方, 一階述語論理の $\{R\}$ -構造全体とクリプキ・フレーム全体の間には, 自然な対応が存在するので, この可算モデルはクリプキ・フレームと同一視できる. そこで, この可算無限モデルをランダム クリプキ・フレーム (the random Kripke frame) と呼び, $\mathcal{F}^r = \langle \mathcal{W}^r, R^r \rangle$ で表す. また, $\mathcal{F}^r$ に対応する $\{R\}$ -構造を $\langle \mathcal{W}^r, R^r \rangle$ で表す.

ここから, ランダム クリプキ・フレーム $\mathcal{F}^r$ による転換定理について述べる. すなわち, 命題論理の任意の論理式 φ に対し, 次の主張が成り立つか否かを調べる:

$$\mathcal{F}^r \models \varphi \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(\varphi) = 1 \quad (\dagger)$$

最初に, 命題論理の任意の論理式 φ に対し $\mathcal{F}^r \models \varphi \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(\varphi) = 1$ が成り立つことを示す. そのために, 次の補題を示す.

補題 19 ([13]). 任意の Π_1^1 -閉論理式 φ に対し, 次が成り立つ:

$$\langle \mathcal{W}^r, R^r \rangle \models \varphi \Leftrightarrow \exists k \in \omega. \theta_k \vdash \varphi$$

したがって, 上の条件を満たす Π_1^1 -閉論理式 φ は $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(\varphi) = 1$ を満たす.

証明 ($\Leftarrow$) は $\langle \mathcal{W}^r, R^r \rangle$ の定義から明らか.

($\Rightarrow$) φ は Π_1^1 -閉論理式とする. すなわち, 一変数述語記号の有限列 $P_1 \dots P_m$ と一階述語論理の論理式 ψ が存在して, $\varphi \equiv \forall P_1 \dots P_m. \psi$ となっているとする. さらに, 任意の $k \in \omega$ に対し $\not\vdash \theta_k \supset \forall P_1 \dots P_m. \psi$ であると仮定する. $P_1 \dots P_m$ が θ_k 現れないことに注意すると, $\not\vdash \theta_k \supset \psi$ となる. したがって, 集合 $\{\theta_k, \neg\psi\}$ は無矛盾である. θ_k, ψ は一階述語論理の論理式なので, コンパクト性定理から, $\{\theta_k\}_{k \in \omega} \cup \{\neg\psi\}$ も無矛盾である. したがって, $\{\theta_k\}_{k \in \omega} \cup \{\neg\psi\}$ の可算モデル $\mathcal{F}$ が存在する. また, $\{\theta_k\}_{k \in \omega}$ は $\aleph_0$ -範疇的なので, $\mathcal{F}$ は $\langle \mathcal{W}^r, R^r \rangle$ の $\{P_1 \dots P_m\}$ -拡張 (expansion) になる. よって, $\langle \mathcal{W}^r, R^r \rangle \not\models \forall P_1 \dots P_m. \psi$ が成り立つ. $\square$

この補題から, 次の命題が証明される.

命題 20. 命題様相論理の任意の論理式 φ に対し、以下の関係が成り立つ：

$$\mathcal{F}^r \Vdash \varphi \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(\varphi) = 1$$

証明 φ は命題論理の論理式とする。このとき、以下の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{W}^r, \mathcal{R}^r \rangle \Vdash \varphi &\Leftrightarrow \langle \mathcal{W}^r, \mathcal{R}^r \rangle \models \forall P_1, \dots, P_m \forall x. ST_x(\varphi) \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\forall P_1, \dots, P_m \forall x. ST_x(\varphi)) = 1 \quad (\because \text{補題 19}) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(\varphi) = 1 \quad (\because \text{事実 16}) \end{aligned}$$

□

以下では、クリプキ・フレーム $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ と一階述語論理の論理式 φ に対し、 $\mathcal{F}$ に対応する一階述語論理の $\{R\}$ -構造 $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}^{\mathcal{R}} \rangle$ で $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}^{\mathcal{R}} \rangle \models \varphi$ が成り立つとき、 $\mathcal{F} \models \varphi$ と書くことにする。

ここから、命題様相論理の論理式 φ で $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(\varphi) = 1$ かつ $\mathcal{F}^r \nVdash \varphi$ となるものを具体的に提示する。すなわち、ランダム クリプキ・フレームによる転換定理が成り立たないことを示す。

準備として、命題様相論理に、新たな記号 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{A}$ を加えて拡張した論理 $\mathcal{L}$ を以下のように定義する。

定義 21. 論理 $\mathcal{L}$ の論理式を以下のように定義する：

- 命題様相論理の論理式は、 $\mathcal{L}$ の論理式、
- φ が $\mathcal{L}$ の論理式ならば、 $\mathbf{E}\varphi$ は $\mathcal{L}$ の論理式、
- φ が $\mathcal{L}$ の論理式ならば、 $\mathbf{A}\varphi$ は $\mathcal{L}$ の論理式。

$S = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ はクリプキ構造とし、 $w \in \mathcal{W}$ であるとする。このとき、 $\mathcal{L}$ の論理式 φ に対し、関係 $S, w \Vdash \varphi$ を以下のように定義する：

- $S, w \Vdash \mathbf{E}\varphi \stackrel{\text{def}}{\iff}$ ある $w' \in \mathcal{W}$ が存在して $S, w' \Vdash \varphi$
- $S, w \Vdash \mathbf{A}\varphi \stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $w' \in \mathcal{W}$ に対し $S, w' \Vdash \varphi$
- 上の形以外の $\mathcal{L}$ の論理式に対しては、命題様相論理のときと同様に定義する。

このように定義された論理式 $\mathbf{E}\varphi$ と $\mathbf{A}\psi$ に関し、次の注意を記す。

注意 22. 次が成り立つ：

- $\mathcal{F}^r \models \theta_3$
- 任意のクリプキ・フレーム $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathcal{F} \models \theta_3 \Rightarrow \mathcal{F} \Vdash \mathbf{E}p \equiv \Diamond\Diamond p$,
- $\mathcal{F}^r \Vdash \mathbf{E}p \equiv \Diamond\Diamond p$ (同様に $\mathcal{F}^r \Vdash \mathbf{A}p \equiv \Box\Box p$)

したがって、 θ_3 が成り立つクリプキ・フレームでは、 $\mathcal{L}$ の論理式 $\mathbf{E}\varphi$ は、命題様相論理の論理式 $\Diamond\Diamond\varphi$ の略記であると考えられる。以下の議論では、 θ_3 を満たすクリプキ・フレームのみを考えるので、定義 21 のように命題様相論理を拡張するのではなく、 $\mathbf{E}\varphi$ は $\Diamond\Diamond\varphi$ の略記であるとする。同様に $\mathbf{A}\varphi$ は $\Box\Box\varphi$ の略記であるとする。

ここから、ランダム クリプキ・フレームによる転換定理の反例のアイディアである“対核”を定義する。

定義 23. $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ はクリプキ・フレーム、 A は $\mathcal{W}$ の空でない部分集合とする。

- A の任意の要素 x, y に対し $(x, y) \notin \mathcal{R}$ となるとき、 A は独立(*independent*)であるという。
- A が独立で、さらに、以下の条件を満たす A の部分集合 A_1 と A_2 が存在するとき、 A は対核(*double kernel*)と呼ばれる：

- $A = A_1 \cup A_2$
- 任意の要素 $x \in W - A$ に対し, 要素 $y_1 \in A_1$ が存在し, $(x, y_1) \in \mathcal{R}$
- 任意の要素 $x \in W - A$ に対し, 要素 $y_2 \in A_2$ が存在し, $(x, y_2) \in \mathcal{R}$

また, 次の論理式の省略形を用いる:

$$\text{NO-DKER} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}((p \vee q) \wedge \Diamond(p \vee q)) \vee \mathbf{E}(\neg(p \vee q) \wedge (\Box \neg p \vee \Box \neg q))$$

ただし p, q は命題変数とする.

ここから, $\mathcal{F} \Vdash \text{NO-DKER}$ が成り立つことを示す. 先ずは, この主張を示すために, いくつかの定義と命題を用意する.

定義 24. $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ はクリプキ・フレームとする. 可能世界 $w \in W$ が, 任意の可能世界 $w' \in W$ に対し $(w, w'), (w', w) \in \mathcal{R}$ を満たすとき, w は $\mathcal{F}$ の中央点(*central point*)であるという.

定義 25. $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ と $\mathcal{F}' = \langle W', \mathcal{R}' \rangle$ はクリプキ・フレームとする. $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}'$ への写像 f で, 以下の条件を満たすものを p -モルフィズム (p -morphism) と呼ぶ:

- (1) $\forall w, x \in W. ((w, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow (f(w), f(x)) \in \mathcal{R}')$,
- (2) $\forall w \in W. \forall x' \in W'. (f(w), x') \in \mathcal{R}' \Rightarrow \exists x \in W. f(x) = x' \text{ かつ } (w, x) \in \mathcal{R}.$

証明は省略させていただくが, 以下の補題が成り立つ.

補題 26. $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ は有限クリプキ・フレームとする. 以下は同値:

- (1) $\mathcal{F}$ は中央点を持つ
- (2) $\mathcal{F}^*$ から $\mathcal{F}$ への p -モルフィズムが存在する

$\mathcal{F}_3$ は有限クリプキ・フレーム $\langle \{x, y_1, y_2\}, \{(x, x), (x, y_1), (x, y_2), (y_1, x), (y_2, x)\} \rangle$ の略記とする. このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 27 ([9]). $\mathcal{F}$ は, $\mathcal{F} \models \theta_3$ を満たす, クリプキ・フレームとする. このとき, 以下の関係が成り立つ:

$$\mathcal{F} \text{ は対核を持つ} \Leftrightarrow \mathcal{F}_3 \text{ は } \mathcal{F} \text{ の } p\text{-モルフィズムによる像である}$$

特に, $\mathcal{F}^*$ は対核を持つ.

証明 $\mathcal{F} = \langle W, \mathcal{R} \rangle$ は, $\mathcal{F} \models \theta_3$ を満たす, クリプキ・フレームとする.

($\Rightarrow$) $\mathcal{F}$ は対核 $A = A_1 \cup A_2$ を持つとする. $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}_3$ への写像 f を次のように定義する:

$$f(w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x & (w \in W - A), \\ y_1 & (w \in A_1), \\ y_2 & (w \in A_2). \end{cases}$$

$\mathcal{F} \models \theta_3$ が成り立つことから, f が p -モルフィズムになることがわかる.

($\Leftarrow$) $\mathcal{F}_3$ は, p -モルフィズム f による, $\mathcal{F}$ の像であるとする. このとき, 次の性質が成り立つ:

- $\forall w \in W - (f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)). \exists w_1 \in f^{-1}(y_1). (w, w_1) \in \mathcal{R}$
- $\forall w \in W - (f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)). \exists w_2 \in f^{-1}(y_2). (w, w_2) \in \mathcal{R}$

したがって, 集合 $f^{-1}(y_1) \cup f^{-1}(y_2)$ は $\mathcal{F}$ の対核である.

ここから, ふたつ目の主張を証明する. $\mathcal{F}_3$ は中央点を持つので, 補題 26 から, $\mathcal{F}_3$ は $\mathcal{F}^*$ の p -モルフィズムによる像である. したがって, ひとつ目の主張から, $\mathcal{F}^*$ は対核を持つ. □

命題 28 ([9]). p, q は命題変数とする. $\mathcal{F} \models \theta_3$ を満たす, 任意のクリプキ・フレーム $\mathcal{F}$ に対し, 次の関係が成り立つ:

$$\mathcal{F} \Vdash \text{NO-DKER} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ は対核を持つ}$$

証明 $\mathcal{F}$ は, $\mathcal{F} \models \theta_3$ を満たす, クリプキ・フレームとする. このとき, 以下の関係が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \Vdash \text{NO-DKER} \\ \Leftrightarrow & \mathcal{F} \Vdash \mathbf{E}((p \vee q) \wedge \Diamond(p \vee q)) \vee \mathbf{E}(\neg(p \vee q) \wedge (\Box \neg p \vee \Box \neg q)) \\ \Leftrightarrow & \exists \mathcal{V}, \exists w \in \mathcal{W}. \mathcal{F}, \mathcal{V}, w \Vdash \mathbf{E}((p \vee q) \wedge \Diamond(p \vee q)) \vee \mathbf{E}(\neg(p \vee q) \wedge (\Box \neg p \vee \Box \neg q)) \\ \Leftrightarrow & \exists \mathcal{V}, \exists w \in \mathcal{W}. \mathcal{F}, \mathcal{V}, w \Vdash \neg(\mathbf{E}((p \vee q) \wedge \Diamond(p \vee q)) \vee \mathbf{E}(\neg(p \vee q) \wedge (\Box \neg p \vee \Box \neg q))) \\ \Leftrightarrow & \exists \mathcal{V}, \exists w \in \mathcal{W}. \mathcal{F}, \mathcal{V}, w \Vdash \mathbf{A}((p \vee q) \supset \neg \Diamond(p \vee q)) \wedge \mathbf{A}(\neg(p \vee q) \supset (\Diamond p \wedge \Diamond q)) \\ \Leftrightarrow & \exists \mathcal{V}. \mathcal{F}, \mathcal{V} \Vdash \mathbf{A}((p \vee q) \supset \neg \Diamond(p \vee q)) \wedge \mathbf{A}(\neg(p \vee q) \supset (\Diamond p \wedge \Diamond q)) \\ \Leftrightarrow & \exists \mathcal{V}. \mathcal{F} \text{ は対核 } \mathcal{V}(p) \cup \mathcal{V}(q) \text{ を持つ} \\ \Leftrightarrow & \mathcal{F} \text{ は対核を持つ} \end{aligned}$$

□

命題 27 と命題 28 から, $\mathcal{F} \Vdash \text{NO-DKER}$ が成り立つことが分かる. したがって, 次の定理を示せば, NO-DKER が主張 (†) の反例であることが分かる.

定理 29 ([9]). $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(\text{NO-DKER}) = 1$

証明 文献 [9] では, 確率を具体的に計算して証明している. しかし, ここでは, 証明を省略させていただく. □

以上の結果により, ランダムクリプキ・フレームによる, フレーム恒真に関する転換定理は成立しないことが示された. しかし, この事実だけからでは, フレーム恒真性に関する 0-1 法則が成り立たないことが証明されたことにはならない. しかし, これらの結果が証明された後で, Le Bars により, フレーム恒真性に関する 0-1 法則が成り立たないことが証明された.

定理 30 ([1]). p と q は命題変数とする. このとき, 以下の極限は存在しない:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(q \wedge \neg p \wedge \Box \Box((p \vee q) \supset \neg \Diamond(p \vee q)) \wedge \Box \Diamond p)$$

REFERENCES

- [1] Jean-Marie Le Bars. The 0-1 law fails for frame satisfiability of propositional modal logic. In *Proceedings of the 17th IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'02)*, pages 225–234, Los Alamitos, July 22–25 2002. IEEE Computer Society.
- [2] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic*. Number 53 in Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge, 2001.
- [3] Brian F. Chellas. *Modal Logic: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1980.
- [4] K. J. Compton. 0-1 laws in logic and combinatorics. In I. Rival, editor, *NATO Adv. Study Inst. on Algorithms and Order*, pages 353–383. D. Reidel, 1988.
- [5] Max J. Cresswell and G. E. Hughes. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, London, 1995.
- [6] Heinz-Dieter Ebbinghaus and Jörg Flum. *Finite Model Theory Second Revised and Enlarged Edition 1999*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer, 1999.
- [7] R. Fagin. Probabilities on finite models. *jsl*, 41(1):50–58, 1976.
- [8] Y. V. Glebskiĭ, D. I. Kogan, M. I. Liogon'kiĭ, and V. A. Talanov. Range and degree of realizability of formulas in the restricted predicate calculus. *Kibernetika*, 2:17–28, 1969.

ON RANDOM KRIPKE FRAMES

- [9] Valentin Goranko and Bruce M. Kapron. The modal logic of the countable random frame. *Arch. Math. Log.*, 42(3):221–243, 2003.
- [10] E. Grandjean. Complexity of the first-order theory of almost all structures. *Information and Control*, 52:180–204, 1983.
- [11] Joseph Y. Halpern and Bruce Kapron. Zero-one laws for modal logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 69(2–3):157–193, 14 October 1994.
- [12] Joseph Y. Halpern and Bruce Kapron. Erratum to “zero-one laws for modal logic”. *ANALSPAL: Annals of Pure and Applied Logic*, 121, 2003.
- [13] Phokion Kolaitis and Moshe Vardi. 0–1 laws and decision problems for fragments of second-order logic. *Information and Computation*, 87(1/2):301–337, July/August 1990.
- [14] B. A. Trakhtenbrot. Impossibility of an algorithm for the decision problem in finite classes. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 70:569–572, 1950.
- [15] Johan van Benthem. *Modal Logic and Classical Logic*. Bibliopolis, Naples, 1983.
- [16] 小野 寛晰. 情報科学における論理. 情報数学セミナー. 日本評論社, 1994.

(池田 宏一郎) 法政大学

(岡本 圭史) 産業技術総合研究所