

1次元写像の多重混合性について

日本大学文理学部
森 真 (Makoto Mori)

1 序

一次元の expanding piecewise linear 変換 $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ で, topologically transitive なものを考える. 仮定より, Lebesgue measure に絶対連続な不変確率測度 μ が存在して, 力学系は混合的になる. さらに, Bowen および Ornstein の結果を用いれば, 力学系は Bernoulli になるので, 多重混合的である. この事実を用いて, この力学系から Brown 運動に収束する列 (例えば, 有限次元分布の収束) を構築したい. 具体的には $h \in V$ ($\int h d\mu = 0$), V は後述) について, 点列 $h(x), h(F(x)), h(F^2(x)), \dots$ から Brown 運動の path を作ることを考える. それには, 特性関数

$$\phi_\lambda(t) = E \left[\exp \left(it \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{\lambda-1} h \circ F^k \right) \right]$$

を評価することが必要になる. それにはこれをテイラー展開して

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}} \right)^n \int \left(\sum_{k=0}^{\lambda-1} h(F^k(x)) \right)^n d\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{it}{\sqrt{\lambda}} \right)^n \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\lambda-1} \int h(F^{k_1}(x)) \cdots h(F^{k_n}(x)) d\mu \end{aligned}$$

を考えれば良い. 独立確率変数の場合の Berry and Esseen の方法がそのまま適用できれば, 上のテイラー展開は3次まで評価すれば良いのだが, 我々の列の場合には $h \circ F^k$ と $h \circ F^{k+1}$ などの相関が強いために, 素朴な方法ではそのようなわけにはいかない. したがって, ちょっと変形して

$$\int h_0(x) h_1(F^{k_1}(x)) h_2(F^{k_1+k_2}(x)) \cdots h_n(F^{k_1+\cdots+k_n}(x)) d\mu \rightarrow \prod_{i=1}^n \int h_i d\mu$$

の収束のオーダーを評価することが必要になる. 本論文では, この評価を行う.

定理 1 F を $[0, 1]$ から自分自身への expanding piecewise linear 変換で topologically transitive なものとし, μ で Lebesgue measure に絶対連続な不変確率

測度を表す. このとき, $h_0, \dots, h_n \in V$ に対して, ある定数 C が存在して,

$$\left| \int h_0(x) h_1(F^{k_1}(x)) \cdots h_n(F^{k_1+\cdots+k_n}(x)) d\mu - \prod_{i=1}^n \int h_i d\mu \right| < C \lambda^n$$

をみたす. ここで

$$\begin{aligned} n &= \min\{k_1, \dots, k_n\}, \\ \lambda^{-1} &= \inf\{z \neq 1: \det(I - \Phi(z)) = 0 \text{ or } e^\xi\}, \\ \xi &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{ess\,inf}_{x \in [0,1]} \log |F^{n'}(x)| \end{aligned}$$

2 準備

$[0, 1]$ 上の piecewise linear な変換 F に対して有限集合 $\mathcal{A}$ が存在して, $\{\langle a \rangle\}_{a \in \mathcal{A}}$ は $[0, 1]$ の区間による分割で, F はその上で連続で単調とする. このとき

$$\begin{aligned} \eta_a &= |(F|_{\langle a \rangle})'(x)| \quad x \in \langle a \rangle, \\ \operatorname{sgn} a &= \begin{cases} +1 & \text{if } (F|_{\langle a \rangle})'(x) > 0 \\ -1 & \text{if } (F|_{\langle a \rangle})'(x) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

と定める. $\mathcal{A}$ の有限列 $w = a_1 \cdots a_n$ は word と呼ばれ,

1. $|w| = n$,
2. $w[k, l] = a_k \cdots a_l \quad (1 \leq k < l \leq n)$,
3. $w[k] = a_k \quad (1 \leq k \leq n)$,
4. $\langle w \rangle = \bigcap_{k=0}^{n-1} F^{-k}(\langle a_{k+1} \rangle)$,
5. $\operatorname{sgn} w = \prod_{k=1}^n \operatorname{sgn} a_k$,
6. $\eta_w = \prod_{k=1}^n \eta_{a_k}$

と定める. $\langle w \rangle \neq \emptyset$ をみたす word w を admissible とよび, admissible な word 全体を $\mathcal{W}$ で表す. 便宜上, empty word ϵ は $\mathcal{W}$ に属するものとし,

1. $|\epsilon| = 0$,
2. $\langle \epsilon \rangle = [0, 1]$,

と定める. $\mathcal{A}$ の元の無限列 $\alpha = a_1 a_2 \cdots$ についても, $\alpha[k] = a_k$ などと定める.

$x \in [0, 1]$ について, x の展開 $a_1^x a_2^x \cdots$ は $F^n(x) \in \langle a_{n+1}^x \rangle$ によって定める. また, word $w \in \mathcal{W}$ に対して,

$$\begin{aligned} w^+ &= \lim_{y \uparrow x_1} a_1^y a_2^y \cdots, \\ w^- &= \lim_{y \downarrow x_2} a_1^y a_2^y \cdots \end{aligned}$$

と定める, ここで $x_1 = \sup\{x \in \langle w \rangle\}$, $x_2 = \inf\{x \in \langle w \rangle\}$ を表す. さらに

$$\tilde{A} = \{a^\sigma : a \in A, \sigma = +, -\}$$

$$\tilde{W} = \{a^\sigma : w \in W, \sigma = +, -\}$$

とおく. 一般の区間 J についても同様に J^+ , J^- を定義するさらに, 点 $x \in [0, 1]$ に対しても

$$x^+ = \lim_{y \uparrow x} a_1^y a_2^y \cdots,$$

$$x^- = \lim_{y \downarrow x} a_1^y a_2^y \cdots$$

と定める. $\tilde{S} = \{x^\sigma : x \in [0, 1], \sigma = +, -\}$ とおく. $\tilde{S}$ の元は, 混乱しない場合には $[0, 1]$ の点と同一視する.

θ で W , $\tilde{W}$ または $\tilde{S}$ 上の shift operator を表す. また, 記号として

$$x <_\sigma y = \begin{cases} x < y & \text{if } \sigma = +, \\ x > y & \text{if } \sigma = -, \end{cases}$$

$$\delta[L] = \begin{cases} 1 & \text{if the statement } L \text{ is true,} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$1_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in J, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定める. 2つの列 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{S}$ について, $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ であるとは, 以下のうちの1つが成立することとする.

1. ある $x \in [0, 1]$ が存在して, $\tilde{\alpha} = x^+$ かつ $\tilde{\beta} = x^-$,
2. ある k が存在して, $\tilde{\alpha}[1, k] = \tilde{\beta}[1, k]$, かつ

$$\tilde{\alpha}[k+1] <_{\text{sgn } \tilde{\alpha}[1, k]} \tilde{\beta}[k+1]$$

3 空間と作用素

$\tilde{S}$ から C への関数で

1. $\sup_{\tilde{\alpha} \in \tilde{S}} |f(\tilde{\alpha})| < \infty$,
2. x が $\langle a \rangle$ ($a \in A$) の内点ならば, $f(x^+) = -f(x^-)$
3. $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \langle x[1] \rangle}} f(y^\sigma) = f(x^\sigma) \quad (\sigma \in \{+, -\})$

をみたすものの全体を次の同値関係

$$f \sim g \text{ とは } f(x^+) + f(x^-) = g(x^+) + g(x^-) \text{ が成立すること}$$

で割ったものを考え、その部分集合で、 $(0 < r < 1 \text{ or } r = \infty)$ について、 $\|f\|_r < \infty$ をみたすものの全体を B_r とおく。ここで

$$\begin{aligned}\|f\|_r &= \sup_{w \in \mathcal{W}} r^{-|w|} |f(w^+) + f(w^-)| \quad (0 < r < 1) \\ \|f\|_\infty &= \inf_{g \sim f} \left\{ \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \right\}\end{aligned}$$

である。さらに $B = (\cup_{0 < r < 1} B_r) \cap B_\infty$ とおく。

また、 $[0, 1]$ から C への関数 h について

$$\begin{aligned}\|h\|_r &= \inf \sum_w |C_w| r^{|w|} \quad (0 < r < 1) \\ \|h\|_\infty &< \infty\end{aligned}$$

とおく。ここで上の式の $\inf$ は h の word の定義関数による分割全体についてとるものとする。 V で $0 < r < 1$ と $r = \infty$ について $\|h\|_r < \infty$ をみたす関数全体を表す。

補題 1 V はノルム達 $(\|\cdot\|_r, 0 < r < 1 \text{ and } r = \infty)$ によって, *locally convex space* になり, 完備である。

補題 2 $h_1, h_2 \in V$ ならば, $h_1 h_2 \in V$

いずれも証明は難しくない。また、上の定義から、 $f \in B$ は

$$f(h) = \sum_w C_w (f(w^+) + f(w^-)) \quad (h = \sum_w C_w 1_{\langle w \rangle})$$

とおくことで、 V から C への関数とみなすことができる。

補題 3 任意の区間 $J \subset \langle w \rangle$ ($w \in \mathcal{W}$) と $0 < r < 1$ について

$$r^{-|w|} |f(1_J)| \leq (\#A - 1) \|f\|_r / (1 - r)$$

4 母関数

以上で準備が終ったので、多重混合性について考えよう。これには母関数

$$\begin{aligned}\tilde{s}(J_0, \dots, J_p; t_1, \dots, t_p) \\ = \sum_{q=1}^p \sum_{k_q=0}^{\infty} \prod_{j=1}^p t_j^{k_j} \int 1_{J_0}(x) 1_{J_1}(F^{k_1}(x)) \cdots 1_{J_p}(F^{k_1+\dots+k_p}(x)) dx.\end{aligned}$$

を考えれば良い。しかし、これを用いて renewal equation を作るには端点の軌道を同時に追わねばならないので、signed symbolic dynamics を用いる。そ

ここで $\tilde{\alpha} \in \tilde{S}$ について,

$$\begin{aligned} s(\tilde{\alpha} | J_1, \dots, J_p : t_1, \dots, t_p) \\ = \sum_{q=1}^p \sum_{k_q=0}^{\infty} \prod_{j=1}^p t_j^{k_j} \int \sum_{|w|=k_1} \eta_w \delta[(wx)[1] = \tilde{\alpha}[1], \exists \theta wx] \\ \times \left\{ \delta[wx <_{\epsilon(\tilde{\alpha})} \tilde{\alpha}] - \frac{1}{2} \right\} 1_{J_1}(x) \cdots 1_{J_p}(F^{k_2+\dots+k_p}(x)) dx. \end{aligned}$$

とおく. とくに $p=0$ のとき

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= \int \delta[x[1] = \tilde{\alpha}[1]] \left\{ \delta[x <_{\epsilon(\tilde{\alpha})} \tilde{\alpha}] - \frac{1}{2} \right\} dx \\ &= \int_{\langle \tilde{\alpha}[1] \rangle} \left\{ \delta[x <_{\epsilon(\tilde{\alpha})} \tilde{\alpha}] - \frac{1}{2} \right\} dx \end{aligned}$$

が成り立つことに注意しよう.

定理 2 (1) $J_0 \subset \langle a \rangle$ ($a \in \mathcal{A}$) について,

$$\tilde{s}(J_0, J_1, \dots, J_p : t_1, \dots, t_p) = \sum_{\sigma \in \{+, -\}} s(J_0^\sigma | J_1, \dots, J_p : t_1, \dots, t_p)$$

(2) とくに $p=0$ かつ $J_0 \subset \langle a \rangle$ ($a \in \mathcal{A}$) のとき

$$s(J_0^+) + s(J_0^-) = |J_0|$$

ここで, $|J_0|$ は区間 J_0 の Lebesgue 測度を表す.

この定理は 1 次元写像の Perron–Frobenius 作用素を求めるときに用いた方法と全く同様に示せる ([5], [6]). 多重混合性のオーダーを求めるには $\tilde{s}(J_0, J_1, \dots, J_p : t_1, \dots, t_p)$ の特異点, すなわち上の定理を用いれば, $s(J_0^\sigma | J_1, \dots, J_p : t_1, \dots, t_p)$ の特異点を求めれば良い. ここで次の作用素を定義しよう.

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{\alpha} | J^\sigma : t) f &= \sum_{l=0}^{\infty} \delta[J \subset \langle \tilde{\alpha}[l+1] \rangle] \left\{ \delta[J^\sigma <_{\epsilon(\tilde{\alpha})} \theta^l \tilde{\alpha}] - \frac{1}{2} \right\} \\ &\quad \times \operatorname{sgn} \tilde{\alpha}[1, l] \eta_{\tilde{\alpha}[1, l]} t^l f(J^\sigma), \\ I(\tilde{\alpha} | J : t) f &= \sum_{l=0}^{\infty} \delta[\theta^l \tilde{\alpha} \in J] \operatorname{sgn} \tilde{\alpha}[1, l] \eta_{\tilde{\alpha}[1, l]} t^l f(\theta^l \tilde{\alpha}), \\ \chi(\tilde{\alpha} | J : t) f &= \chi(\tilde{\alpha} | J^+ : t) f + \chi(\tilde{\alpha} | J^- : t) f + I(\tilde{\alpha} | J : t) f, \\ \phi^{\tilde{\alpha}}(\tilde{b} : t) &= \epsilon(\tilde{\alpha}) \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{sgn} \tilde{\alpha}[1, l] \eta_{\tilde{\alpha}[1, l]} \left\{ \delta[\tilde{b} < \theta^l \tilde{\alpha}] - \frac{1}{2} \right\} t^l, \\ \Phi(\tilde{\alpha} | t) f &= \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{A}}} \phi^{\tilde{\alpha}}(\tilde{b} : t) f(\tilde{b}), \\ \Psi(\tilde{\alpha} | J : t) f &= [\chi(\tilde{\alpha} | J : t) + \Phi(\tilde{\alpha} | t)(I - \Phi(t))^{-1} \chi(J : t)] f \end{aligned}$$

ここで, $f \in B$, J は区間, $\tilde{\alpha} \in \tilde{S}$, $t \in C$, $\sigma \in \{+, -\}$ である. ここで, Φ の定義を考えると, Ψ の定義における $(I - \Phi(t))^{-1}$ は $\tilde{A} \times \tilde{A}$ 行列とみなすことができる. renewal equationを構成することで次の定理を得る.

定理 3

$$s(\tilde{\alpha}|J_1, \dots, J_p : t_1, \dots, t_p) = \Psi(\tilde{\alpha}|J_1 : t_1) \cdots \Psi(J_p : t_p)s$$

$s(\tilde{\alpha}|J_1, \dots, J_p : t_1, \dots, t_p)$ たちを B の元とみて, 補題3, 4を用いることで, $h_0, h_1, \dots, h_p \in V$ について,

$$\sum_{k_1, \dots, k_p} t_1^{k_1} \cdots t_p^{k_p} \int h_0(x) h_1(F^{k_1}(x)) \cdots h_p(F^{k_1 + \cdots + k_p}(x)) dx$$

の特異点が $|t_i| < e^\varepsilon$ では $\det(I - \Phi(t_i))$ の零点であることがわかる. とくに $t_i = 1$ は零点であるが, ここでの留数は不変測度に対応する. 以上をまとめれば, 定理1の証明を得る.

参考文献

- [1] V.Baladi and G.Keller, Zeta functions and transfer operators for piecewise monotone transformations, Commun. Math. Phys., vol. 127 (1990), 459-478.
- [2] F.Hofbauer and G.Keller, Zeta functions and transfer-operators for piecewise linear transformations, J.Reine Angew. Math., vol. 352 (1984), 100-113.
- [3] G.Keller, Ergodicité et mesures invariantes pour les transformations dilatantes par morceaux d'une région bornée du plan, C.R. Acad. Sc. Paris, vol. 289, (1979), 625-627.
- [4] A.Lasota and J.A.Yorke, On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 186 (1973), 481-488.
- [5] M.Mori, Fredholm determinant for piecewise linear transformations, Osaka J. Math., vol. 27 (1990), 81-116.
- [6] M.Mori, Fredholm determinant for piecewise monotonic transformations, Osaka J. Math., vol. 29 (1992), 497-529.
- [7] M.Mori, Fredholm determinant for piecewise linear transformations on a plane, Tokyo J. Math., vol. 21 (1998), 477-510.

- [8] M.Mori, Zeta function and Perron–Frobenius Operator of Piecewise linear transformations on R^k , Tokyo J. Math., vol. 18 (1995), 401–416.