

Dieudonné module について

名大理 小田忠雄

以下に述べる事の詳細及び参考文献は、The First De Rham Cohomology Group and Dieudonné Modules (to appear in Ann. Sci. École Norm. Sup.) 及び J. Tate: Endomorphisms of Abelian Varieties over Finite Fields, II (to appear in Inventiones math.) を見ればたい。

- §1. 序
- §2. Dieudonné modules
- §3. Abelian varieties
- §4. Classification up to isogeny

§1. 序

k を標数 p の完全体としよう。 $p=0$ のときは、 k 上の有限 group scheme 及び formal group は必ず reduced であり、 (Cartier の定理)。 従って前者は、 functor

$G \longmapsto G(\bar{k})$ を考える事によつて、 $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ の作用

を持つ有限群を考へることに、後者は $G \longmapsto \text{Lie}(G)$ によつて Lie algebra を考へることに同値になる。従つて、可換有限 group scheme 及び可換 formal group は、それぞれ $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -module 及び $\bar{k}$ 上の vector space を考へる事と同値になる。

しかし $p \neq 0$ の時には、Galois module や Lie algebra のみを考へるのでは不充分であり、そのために Dieudonné module を導入する。

Dieudonné の原論文以来、既に Cartier, Manin, Barsotti 等によつて色々論じられてゐるが、いくつかの基本的な性質で未証明なものがあり、不必要的制限のついたものがある。それを整理して §2 で述べる。

§3 では、Abelian variety に関し、Dieudonné module を用ゐれば $l=p$ のときは l -adic Tate module に代るものを作れる事を述べる。§4 では、 p -divisible を up to isogeny で分類する事に就いて述べる。§3 及び §4 の新しい結果は Tate による。

最後に、最近 Cartier によつて (C.R., t. 265, p.

49 ~ 52. C. R., t. 265, p. 129 ~ 132), k を作らない場合にも、特別な可換 formal group に対して covariant な Dieudonné module を定義出来る事を示され、これを使って、Mumford 次の様な事を証明した事を付け加えておこう。即ち、標数 p の体 k の上の任意の abelian variety は (まず ordinary な標数 p の体 k の abelian variety の特殊化で得られ、従って) 標数 0 の体 K の abelian variety の特殊化 (reduction mod. p) で得られる。ここに abelian variety が ordinary とは、位数 $k-p$ の元の個数が、とりうる最大のもの、すなわち Hasse-Witt 行列が non-degenerate なもののことをさす。

§ 2. Dieudonné module

k を標数 $p \neq 0$ の完全体とする。

$\mathcal{N}$ を k 上の可換有限 group schemes の作る category とすれば、よく知られてゐる様に次の分解が出来る。

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}' \times \mathcal{N}_p$$

ここに $\mathcal{N}'$ は étale (reduced といい、これも同じ) の位数 (affine 環の k 上の vector space としての次元) が p と

素な可換有限 group schemes の作る部分 category . 又 N_p は
位数 n p の中にある素な可換有限 group scheme の作る部分
category である。

N' は、 G に対して $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -module $G(\bar{k})$ に対
応する functor による。位数 n p の素な有限 $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -
module の category と同値である。

一般に、 k 上の group scheme G に対して

$$D(G) = \text{Hom}_{k\text{-gr.sch.}}(G, G_m)$$

は可換 group functor G の Cartier dual と呼ぶ。
特に G が N の object のとき、 $D(G) = \text{Spec}(\text{dual vector}$
 $\text{space of } \Gamma(G, \mathcal{O}_G))$ であり、 $D(G)$ も N の object
である事からわかる。ここには、 $\text{Hom}_{k\text{-gr.sch.}}(?, ?)$ は、
よく知られた Hom-functor、 G_m は k 上の multiplicative
group $\text{Spec}(k[T, T^{-1}])$ である。

そうすると、 N_p は次の様に分解される。

$$N_p = N_{re} \times N_{el} \times N_{er}$$

ここには N_{re} , N_{el} 及び N_{er} は、それぞれ reduced Cartier
dual $\times$ local (即ち $\Gamma(G, \mathcal{O}_G)$ は local ring. n は G

κ connected であるといふことも同じ) なもの. これ自身及び Cartier dual κ 共に local なもの. 及び local な Cartier dual κ reduced なものの作る部分 category である.

N_p に対し Dieudonné module を定義されるのである. もう少しその適用範囲を広げることになる. 即ち. まず N_p の中で. $N_{re} \times N_{el}$ は unipotent な可換有限 group schemes, N_{er} は semi-simple な位数 $\kappa \cdot p$ の中にあるような可換有限 group schemes の作る部分 category である事に注意すれば. category

$$\mathcal{P} = \left(\begin{array}{c} \text{有限とは限らない可換} \\ \text{unipotent algebraic} \\ \text{group schemes の category} \end{array} \right) \times N_{er}$$

は. $\mathcal{P}$ の適当な中倍で 0 になるような. 可換 algebraic group schemes 全体の作る category と考えることとなる. $\mathcal{P}$ の object に対し Dieudonné module を定義されるのである.

又 $\mathcal{P}$ の objects の inductive systems の作る category $\text{Ind}(\mathcal{P})$ は非常に一般的の意味での可換 "formal groups" の category と考えることとなる. 例えは. 最も特別な

意味の可換 formal group (即ち、演算が形式的な中級数で表わされるもの) は $\text{Ind}(N_{\text{el}} \times N_{\text{er}})$ の object と考えられる。

また Dieudonné module を定義する準備として、次のようなものを考えよう。

W を無限 Witt vectors の作る k 上の ring scheme. W_n を長さ n の Witt vectors の作る k 上の ring scheme とする。 k 上の ring scheme と 1, 2 の W の準同型

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \longmapsto Fx = (x_0^p, x_1^p, \dots, x_n^p, \dots)$$

及び additive k -group scheme と 1, 2 の W の準同型

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \longmapsto Vx = (0, x_0, x_1, \dots)$$

がある。 $W(k)$ は k と剰余体と見做す complete discrete valuation ring で unramified である。 $\sigma = F(k)$ は $W(k)$ の Frobenius automorphism と一致する。 このとき W 及び W_n は $W(k)$ -module scheme と考えることが出来る。 F はこの構造で σ -linear V は σ^{-1} -linear である。

従って、非可換環 $A = A(k)$ を次の様に定義すれば、 W

B_n is left A -module scheme $\in \mathcal{F} \ni \beta = \in A$ -sub β .

$$A = W(k)[F, V]$$

ここに生成元の間の関係は、 λ を $W(k)$ の勝手な元とすると

$$\begin{cases} FV = VF = P \\ F\lambda = \lambda^{\sigma}F \\ \lambda V = V\lambda^{\sigma} \end{cases}$$

W_n の点 $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in W_{n+1}$ の点 $(0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ に移す写像 ι は additive である。left A -module scheme としての準同型 ι は $\iota^* \iota = \text{id}$ 。これを正すために $W(k)$ の作用 ε を ι を left A -module scheme

$$C_{-n} = (W(k), \sigma^n) \otimes_{W(k)} W_n$$

2 定義可子。 $\therefore$ $(W(R), \sigma^n)$ は $\sigma^n \in \text{通}$ 1 2 $W(R)$ の作用可子より。 $W(R)$ 上に定義された $W(R)$ -module である。 従って、任意の (可換) k -algebra R に対して

$$C_{-n}(R) = (W(k), \sigma^n) \otimes_{W(k)} W_n(R)$$

但1. $\lambda, \mu \in W(k)$, $x \in W_n(R)$ 12. 2

$$\lambda \otimes \mu x = \lambda \mu^{a^n} \otimes x$$

$$\lambda(\mu \otimes x) = \lambda \mu \otimes x$$

$$F(\lambda \otimes x) = \lambda \otimes Fx$$

$$V(\lambda \otimes x) = \lambda^{-1} \otimes Vx$$

とすれば、 C_n 自身も left A -module functor になることは明かである。 $\psi = \delta$, 2導の分子写像

$$C_n \xrightarrow{\psi} C_{n+1}$$

は left A -module scheme と 1, 2 の準同型 とする。

Inductive system

$$C_1 \xrightarrow{\psi} C_2 \xrightarrow{\psi} C_3 \rightarrow \dots$$

の (functor と 1, 2 の) inductive limit $\in C$ とする。

Barceli に従って, Witt covectors の left A -module functor と呼ぶことにする。 C は $\text{Ind}(P)$ の object とも考えられることに注意しよう。

別の方法で functor C を定義することも出来る。 即ち。

任意の可換 k -algebra R に対して $C(R)$ は R の元の無限列

$$x = (\dots, x_{-n-1}, x_{-n}, \dots, x_{-2}, x_{-1})$$

で有限個の $x_i \in R$ を除く 20 であるものの全体とし、left

A -module の構造を 1, 2 する。 加法は phantom components

$$x^{(m)} = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{p^i} x_{m-i}^{p^i} = \dots + \frac{1}{p^i} x_{m-i}^{p^i} + \dots + \frac{1}{p} x_{m-1}^p + x_m$$

($m = -1, -2, -3, \dots$) を使って 2.

$$(x+y)^{(m)} = x^{(m)} + y^{(m)}$$

と対応するように定義し、又 $W(k)$ の元

$$\{a\} = (a, 0, 0, \dots)$$

の作用は

$$\{a\}x = (\dots, a^{p^{-n}}x_{-n}, \dots, a^{p^{-1}}x_{-1})$$

F, V の作用は

$$Fx = (\dots, x_{-n}^p, \dots, x_{-1}^p)$$

$$Vx = (\dots, x_{-n-1}, \dots, x_{-2})$$

と定義する。

例えば $C(k)$ は $W(k)$ -module として

$$B(k)/W(k)$$

($\because B(k)$ は $W(k)$ の商体、with bivectors!) と一致し、 F は σ と、 V は $p\sigma^{-1}$ と一致する。特に $k = \mathbb{F}_p$ のとき、 $W(k) = \mathbb{Z}_p$, $B(k) = \mathbb{Q}_p$, $C(k) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ となる。これ及び同様の様には $C(k)$ は $W(k)$ -module として唯一の simple object k の injective envelope となり、有限生成の $W(k)$ -module に対する dualizing module となる。

2.2以上の準備をすませる. 以下は Dieudonné module
を定義しよう.

$\mathcal{P}$ の object G に対し, その Dieudonné module
は

$$M(G) = \text{Hom}_{k\text{-gr. functor}}(G, C) \\ \oplus \{ W(\bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}} D(G)(\bar{k}) \}^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

である. 以前にも述べた様に.

$$D(G)(\bar{k}) = \text{Hom}_{\bar{k}\text{-gr.}}(G_{\bar{k}}, G_{m\bar{k}})$$

2. $G_{\bar{k}}$ は G の $\bar{k}$ への base extension. $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ は k
の代数閉体 $\bar{k}$ の k 上の Galois 群. 又右肩についた $\text{Gal}(\bar{k}/k)$
は, 'その作用で不変なものの全体' ということを意味する.

$M(G)$ には left A -module の構造を次の様に与える. まず
 $\mathcal{P}$ の直和因子には, C の left A -module functor として
の構造を導かれるもの. $\mathcal{P}$ の直和因子には.

$$\lambda \in W(k), \lambda' \in W(\bar{k}), \quad x \in D(G)(\bar{k}) \text{ に対し}$$

$$\lambda(\lambda' \otimes x) = \lambda \lambda' \otimes x$$

$$F(\lambda' \otimes x) = \lambda'^{\sigma} \otimes p x$$

$$V(\lambda' \otimes x) = \lambda'^{\sigma^{-1}} \otimes x$$

で導かれるものを与える.

M は category $\mathcal{P}$ から left A -module の category への contravariant functor である。

定理

- (i) M による 2 可換 unipotent algebraic k -group schemes の作る category である。有限生成 left A -modules である V の作用で消える様なものの作る category と逆同値である。
- (ii) M による 2 Category $N_p = (\text{可換有限 } k\text{-group schemes の位数が } p \text{ の中})$ と category $(W(k) \text{ 上 長さ有限の left } A\text{-modules})$ と双逆同値になる。

$$\text{rank}_k(G) = p^{\text{length}_{W(k)}(M(G))}$$

が成り立つ。又これによる N_{le} と category $(W(k) \text{ 上 長さ有限の left } A\text{-modules } V \text{ が nilpotent に、} F \text{ が bijective に作用するもの})$ 、 N_{el} と category $(W(k) \text{ 上 長さ有限の left } A\text{-modules } V \text{ が } F \text{ が nilpotent に作用するもの})$ 及び N_{er} と category $(W(k) \text{ 上 長さ有限の left } A\text{-modules } V \text{ が } F \text{ が nilpotent に、} V \text{ が bijective に作用するもの})$ と双逆同値になる。

k 上の group scheme G に対し k 上の group scheme $G^{(p)} = (k, \sigma) \times_k G$ が定義出来る。ここには (k, σ) は $k \in$

$\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ は k -algebra と見なせるものがある。よって k 上の Frobenius homomorphism $F_G: G \rightarrow G^{(p)}$ 及び k 上の Verschiebung $V_G: G^{(p)} \rightarrow G$ が定義される。 $F_G \circ V_G = p$, $V_G \circ F_G = p$ が成り立つことが知られている。特に G が k の object であるとき、 $M(G^{(p)}) \cong (W(k), \sigma) \otimes_{W(k)} M(G)$ とは容易にわかる。 $M(F_G): (W(k), \sigma) \otimes_{W(k)} M(G) \rightarrow M(G)$ は $\lambda \otimes x \in \lambda Fx$ に移す写像であり、 $M(V_G): M(G) \rightarrow (W(k), \sigma) \otimes_{W(k)} M(G)$ は $x \in 1 \otimes Vx$ に移す写像であることも容易にわかる。

又 K/k は完全域大域とすると、 $A(K) = W(K)[F, V]$ $A(k) = W(k)[F, V]$ と書くことにする。 $\mathcal{P}_k$ の object G に対して

$$M(G_K) = A(K) \otimes_{A(k)} M(G) = W(K) \otimes_{W(k)} M(G)$$

と表すことも容易にわかる。

例

$$(i) \quad M(W_n) \cong A/AV^n \cong W_n(k)[F][V]/(V^n)$$

$$\text{特に } M(G_2) \cong A/AV \cong k[F]$$

$$(ii) \quad M(\mathbb{Z}/(p^n)) \cong A/AV^n + A(F-1) \cong W_n(k)$$

但し F は σ^n V は $p\sigma^{-1}$ に対応する。

これは $\mathbb{Z}/(p^n) = \ker(W_n \xrightarrow{F-1} W_n)$ である。

$$(iii) \quad M(\alpha_{p^n}) \cong A/AV + AF^n \cong k[F]/(F^n)$$

これは $\alpha_{p^n} = \ker(G_n \xrightarrow{F^n} G_n)$ である。

$$(iv) \quad M(\mu_{p^n}) \cong A/AF^n + A(V-1) \cong W_n(k)$$

但し F は p の n 乗。

V は σ^{-1} の n 乗。

これは 定義 8.7 明かである。

Cartier duality D は category $\mathcal{N}_p \in \mathcal{N}_p$ に与えられる。

$\times$ Dieudonné module functor M は $\mathcal{N}_p$ から category $\mathcal{F} = (\text{left } A\text{-module of } W(k)\text{-finite length})$ に送る同値である。また M は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{N}_p$ に送る同値である。left A -module M は $\mathcal{F}$ に属する。left A -module E は $\mathcal{F}$ に属する。

$$D(M) = \text{Hom}_{W(k)}(M, C(k))$$

$$\text{但し } \varphi \in D(M), x \in M \text{ に対して } (F\varphi)(x) = \varphi(Vx)^\sigma,$$

$$(V\varphi)(x) = \varphi(Fx)^{\sigma^{-1}} \text{ と定義される。 } D \text{ は } \mathcal{F} \text{ に属する。}$$

この duality D は定義される。($C(k)$ は $W(k)$ -module k の injective envelope)

定理

$G \in \text{category } \mathcal{N}_p$ の object である。

$$M(D(G)) = D(M(G)).$$

この定理の証明には Artin-Hase exponential series を使う。
長くなるのを省略する。

Dieudonné module functor M は明に $\mathcal{A} = \bigwedge$ "formal groups"
の category $\text{Ind}(\mathcal{P})$ 上の $\text{Pro}(\text{left } A\text{-modules})$ への
contravariant functor に拡張することになる。これも
又可換 formal group の Dieudonné module と呼ぶことに
する。

$$\boxed{1311} \text{ (i) } \hat{G}_m = \mu_{p^\infty} = \varprojlim_n \mu_{p^n}$$

従って,

$$M(\hat{G}_m) = \varprojlim_n M(\mu_{p^n}) \cong \varprojlim_n W_n(k) \cong W(k)$$

但し F は $p\sigma$ であり V は σ^{-1} であり得る。

$$\text{(ii) } \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/(p^n)$$

従って,

$$M(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \varprojlim_n M(\mathbb{Z}/(p^n)) \cong W(k)$$

但し $F = \sigma$ であり $V = p\sigma^{-1}$ であり得る。

$$\text{(iii) } M(C) \cong \varprojlim_n M(C_{-n}) = W(k)[F][[V]]$$

$\text{Ind}(\mathcal{N}_p) \subset \text{Ind}(\mathcal{P})$ の object $G = \varprojlim_n G_n$ である。

ある自然数 n (G の height または corank と呼ぶ) に対して
 1. $\text{rank}(G_n) = p^{n h}$ であり、 $G_n \hookrightarrow G_{n+1}$
 2. G_n は G_{n+1} に p^n の核と同型になるもの
 と p -divisible group (scheme) と呼ぶ。

p 倍写 $f: G_{n+1} \rightarrow G_n$ に対して $D(f): D(G_n) \hookrightarrow D(G_{n+1})$ として p -divisible
 group $G^t = \varinjlim_n D(G_n)$ を作る。これは G の Serre
 dual と呼ぶ。

Dieudonné module functor M は p -divisible category
 (p -divisible groups) は category (left A -modules
 $W(k)$ -free of finite rank) と逐同値になることを示す。
 このとき $\text{rank}_{W(k)}(M(G)) = \text{corank}(G)$ と
 なることもわかる。

left A -module M に対して left A -module M^t は

$$M^t = \text{Hom}_{W(k)}(M, W(k))$$

 但し $\varphi \in M^t, x \in M$ に対して $(F\varphi)(x) = \varphi(Vx)^\sigma,$
 $(V\varphi)(x) = \varphi(Fx)^{\sigma^{-1}}$ と定義する。

定理

p -divisible group G に対して

$$M(G^t) = M(G)^t$$

§.3 Abelian varieties

X を完全体 k 上の abelian variety としよう。一般に整数 m に対して $mX \in$ 、 m 倍写準同型 $m_X: X \rightarrow X$ の核 (group scheme とする) としよう。

$l \neq p = \text{char}(k)$ とするとき、 l -divisible group scheme $X(l) = \varinjlim_n l^n X$ は étale とある。 $\text{corank} = 2 \dim X$ の l -divisible $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -module $X(l)(\bar{k}) = \{ l\text{-torsion elements in } X(\bar{k}) \}$ と表すことができ、 l と同値がある。又、 $\text{rank} = 2 \dim X$ の $\mathbb{Z}_l$ -free $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -module $T_l(X) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_l, X(\bar{k}))$ と表すことも同値がある。これは X に対して covariant であり、 $\mathbb{Z}_l$ -係数の 1 次元 homology 群の役割をたつ。

$l = p$ のときは、 p -divisible group scheme ($\text{corank} = 2 \dim X$)

$$X(p) = \varinjlim_n p^n X$$

の Drinfeld module $M(X(p))$ は $W(k) \subseteq \text{free}$

rank = 2 dim X となり (contravariant である)

$W(\bar{k})$ -係数の 1 次 cohomology 群が分割に果す。

簡単な計算によつて

$$M(X(p)) = T_p \left(H^1(X_{\text{zan}}, \mathbb{C}) \oplus \{ W(\bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Pic}(X_{\bar{k}}) \}^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \right)$$

となりこゝからわかる。こゝに $T_p(?) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, ?)$

X_{zan} は X の Zariski topology である。この場合

には $T_p(H^1(X_{\text{zan}}, \mathbb{C})) \cong H^1(X_{\text{zan}}, W)$ となる。

Serre の考へたものを一般化したこととわかる。 X が

abelian variety ならば、特に $H^1(X_{\text{zan}}, W)$ より

$H^1(X_{\text{zan}}, \mathbb{C})$ を考へる方が、より豊富な情報を得られる。

通常のように、 X の dual abelian variety を X^t で表わそう。このとき次の定理が成り立つ。

定理 $X \in \text{abelian variety}$ としたとき、任意の素数 p に対して、canonical な p -divisible group とした同型

$$\psi_X : X^t(p) \xrightarrow{\sim} X(p)^t$$

があり、しかも ψ_X は交代的である。即ち、同型

$\psi_X : X \xrightarrow{\sim} X^{tt}$ によつて $X(p)$ と $X^{tt}(p)$ とを同一視し、

又、Serre duality により $X(p) \subset X(p)^{tt}$ と ε 同視する
ことにすれば、 $\Rightarrow$ の同型

$$(\psi_x)^t: X(p) = X(p)^{tt} \xrightarrow{\sim} X^t(p)^t$$

及び

$$\psi_{x^t}: X(p) = X^{tt}(p) \xrightarrow{\sim} X^t(p)^t$$

の間に

$$(\psi_x)^t = -\psi_{x^t}$$

の関係が成り立つ。

p が標数 $\neq 2$ の場合には、これは良く知られている。一般には、Cartier duality theorem の一番一般的形式のものを使う。特に交代性 Cartier duality theorem に対応されることに注意しよう。即ち、

定理

$X, Y \in \text{abelian varieties}$, $\varphi: X \rightarrow Y \in \text{isogeny}$ とする。そのとき、

$$(i) \quad \ker(\varphi^t: Y^t \rightarrow X^t) \cong D(\ker(\varphi: X \rightarrow Y))$$

(ii) (交代性)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \ker(\varphi) & \rightarrow & X & \xrightarrow{\varphi} & Y \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \kappa_X & & \downarrow \kappa_Y \\ 0 & \rightarrow & \ker(\varphi^{tt}) & \rightarrow & X^{tt} & \xrightarrow{\varphi^{tt}} & Y^{tt} \rightarrow 0 \end{array}$$

を考えると、(i) は、 $\ker(\varphi^{tt}) \cong D(\ker(\varphi^t)) \cong DD(\ker(\varphi))$ であり、この同型は k_X を導く同型とは符号が異なる。

上記の二つの定理は、base 系が異なる場合にも成り立つ。

特に X が標数 p の完全体であれば、left A -module としての同型

$$\Psi_X : M(X(p))^t \cong M(X(p)^t) \xrightarrow[\sim]{M(\psi_X)} M(X^t(p))$$

が、canonical に存在し、交代性

$$(\Psi_X)^t = -\Psi_{X^t}$$

が成り立つことがわかる。

X 上の invertible sheaf (又は Divisor) $\mathcal{L}$ に対して定義された準同型

$$\Delta(\mathcal{L}) : X \longrightarrow X^t$$

を考えると、left A -module としての準同型

$$f(\mathcal{L}) : M(X(p))^t \xrightarrow[\sim]{\Psi_X} M(X^t(p)) \xrightarrow{M(\Delta(\mathcal{L}))} M(X(p))$$

が得られる。 $f(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の定める Riemann 準同型 と呼ぶことになる。 $f(\mathcal{L})$ も交代的である。

簡単のため $M = M(X(p))$ と書くことにすれば M は $W(k)$ -free で有限生成であることより left A -module としての準同型 $f(x)$ の存在と M^t 上の交代形式 $W(k)$ 上双線型型可 $\phi = \phi(x)$ で $x, y \in M^t$ に対して

$$\phi(Fx, y) = \phi(x, Vy)^{-1}$$

の成り立つものの存在と $\phi(x)$ が $\mathcal{L}$ に属する。また $Riemann$ form と呼ぶことにすれば $M^t = M(X(p))^t$ は X の $W(k)$ -係数の一次元 homology 群の役割を担っていることがわかる。双対的に $\mathcal{L}$ は

より $M \otimes_{W(k)} M$ 上の交代形式 $c(x)$ で F, V に対して簡単な条件を充てるものの存在を示すことが出来る。これは $M \otimes_{W(k)} M$ が $W(k)$ -係数の二次元 cohomology 群と考えると $\mathcal{L}$ に F, V に対する fundamental class $c(x)$ がありと考えることが出来る。

これに対して示すのは $l \neq p$ のとき $T_l(X)$ に対しては知られている。

§4. Classification up to isogeny

p -divisible groups を isogeny で分類することは、その Dieudonné module M に対して $D_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M = M'$

ε . $A' = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} A = B(R)[F, V] = B(R)[F, F^{-1}]$ の
 module と (2). 同型に分類するとは (1) に 2 あり。こ
 こに $B(R)$ は $W(R)$ の商体である。つまり $B(R)$ 上有限次元
 の left A' -module M' 2. F 及び $V = pF^{-1}$ 2 stable 2
 $W(R)$ -lattice の存在するものを同型に分類すればよい。

Jacobson: Theory of rings (AMS Survey II,
 1943). Chap. III にもくわしく述べられているように。
 A' は left, right principal ideal domain である。
 従って、任意の left A' -module は (cyclic 2) indecomposable
 left A' -modules の直和に書ける。又上の性質を充つ $W(R)$ -
 lattice の存在も保存される。従って、 $\bigwedge_{B(R) \text{ 上有限次元の}} (\text{cyclic})$ indecomposable
 left A' -modules 2. F 及び pF^{-1} 2 stable 2 $W(R)$ -lattice
 の存在するものを分類すればよい。

A' の中心は、 σ が k 2 位数 ∞ 限 (即ち k 2 ∞ 限体) の
 とき、 $\mathbb{Q}_p = B(\mathbb{F}_p)$ に、 σ の位数が a (即ち $k = \mathbb{F}_{p^a}$) の
 とき、 $\mathbb{Q}_p[F^a, F^{-a}]$ に一致する。いずれの場合にも
 A' の両側 ideals は、中心の元で生成されることもわかる。

次に、特別な場合 (1) k が代数閉体 (2) $k = \mathbb{F}_{p^a}$ について

更に詳しく見てみよう。

(1) k が代数閉体の場合

この場合には、Dieudonné, Manin の結果から知られる。
 $B(k)$ 上の有限次元の A' -module は A' -simple であることが知られる。更に、simple left A' -module は $A'/A'(F^h - p^n)$ $h > 0, n \geq 0$ は整数で $(h, n) = 1$ に同型である。又 $W(k)$ -lattice F と $V = pF^{-1}$ が stable であるための必要十分条件は、 $h \geq n$ となる (h, n) がある。実際、 $n < h$ と $m = h - n \geq 0$ とすれば $(m, n) = 1$ である。

$$A'/A'(F^h - p^n) \cong A'/A'(F^m - V^n) \cong \frac{B(k) \otimes_{W(k)} A}{A(F^m - V^n)}$$

$n \in \mathbb{N}$ は simple left A' -module の dimension, $m \in \mathbb{N}$ は codimension である。
 A は height 1-整域。
 $\wedge$ 例として $n=0, m=1$ のとき $A/A(F-1) = M(\mathbb{D}_p/\mathbb{Z}_p)$

$n=1, m=0$ のとき $A/A(1-V) = M(\hat{G}_m)$ 、 $n=m=1$

のとき $A/A(F-V) = M(E(p))$ 、ここに E は Hasse invariant

が 0 であるような elliptic curve である。Manin によれば、

left A -module の isogeny class を考えれば、

それらに属する isomorphism classes は一般に ∞ 個あり、

代数多様体 $\mathcal{M}$ を parametrize される。

(2) $k = \mathbb{F}_{p^2}$ の場合。

より簡単のため A' の中の $\mathbb{Q}_p[F^a, F^{-a}] \in R$ とする。
 $L = B(R)[F^a, F^{-a}]$ と書く。 L は可換で、 $A' = B(R)[F, F^{-1}]$
 は、 $A' = L \oplus FL \oplus F^2L \oplus \dots \oplus F^{a-1}L$ と書ける。
 L は $\text{rank} = a$ の free module である。容易にわかる。
 ことがあまる。

$$B(R) \otimes_{\mathbb{Q}_p} A' = L \otimes_R A' \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\text{right } L\text{-module}}(A')$$

となるから、実は A' は R 上の Azumaya algebra となり。
 L は maximal etale subalgebra となることもわかる。
 前に述べたように、 A' の two-sided ideals は R の元¹²⁰で生成される。
 従って、 $(B(R)$ 上有限次元の) left A' -module
 M' に対して $\text{Ann}_{A'}(M')$ (Jacobson の言葉では M' の
 bound) は、 R の元¹²⁰で生成される。これは、本質的に
 は、 M' の Frobenius 自己同型 F^a の最小多項式である。
 Jacobson によれば、 $(B(R)$ 上有限次元の) M' の left
 A' -module が同型であるためには、 R 上同
 型であることが必要十分である。これを更に詳しくみる。

$M' = A'/A'\varphi \in$ indecomposable な left A' -module
 とする。このとき、 $\text{Ann}_{A'}(M')$ は、 A' の ²³two
 sided ideal φ の IP. $\varphi \in$ A' に一致する。 φ は自乗的

に $R = \mathbb{Q}_p[F^a, F^{-a}]$ の既約多項式 A' によつて生成される。

従つて F^a の M における最小多項式は $\mathbb{Q}_p$ 上の既約多項式の中に一致する。又

$$M'/\mathfrak{p}e \cong (A'/A'\varphi)^{\text{length}_{A'}(\mathfrak{p}e)}$$

となる。従つて A' 上の indecomposable な left module

($B(R)$ 上有限次元の) の同型類は R 上の indecomposable

な module の同型類とは一対一に対応する。(1) 又

functorial である。) 容易にわかるように、前者は

$W(R)$ -lattice $\mathfrak{z}$ $F \mathfrak{z} \cup \mathfrak{p}F^{-1}\mathfrak{z}$ stable なものかあること

と、後者は $\mathbb{Z}_p$ -lattice $\mathfrak{z}$ $F^a \mathfrak{z} \cup V^a \mathfrak{z} = \mathfrak{p}^a F^{-a} \mathfrak{z}$ stable

なものかあることは同値である。

従つて結局 $K = \mathbb{F}_{p^a}$ 上の indecomposable な p -divisible

group schemes の isogeny classes の全体は $\mathbb{Q}_p$ 上既約

な F^a の多項式 A' の中で、その係数の根 α に対して $\text{ord}_p(\alpha) \geq 0$

なる $\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{p}^a/\alpha$ の $\text{ord}_p(\mathfrak{p}^a/\alpha) \geq 0$ となるもの全体の集合と一対

一に対応することになる。

これらの事実を使つて Tate は次の事を証明した。 $X \in$

$K = \mathbb{F}_{p^a}$ 上の abelian variety であるとき、

$$\text{End}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong \text{End}_A(M(X(p))) = \text{End}_{\substack{p\text{-div.} \\ \text{gr. over } k}}(X(p))$$

これは、Tate の lX 前の結果

$$l \neq p$$

$$\begin{aligned} \text{End}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l &\cong \text{End}_{\mathbb{Z}_l\text{-Gal}(\bar{k}/k)}(T_l(X)) \\ &= \text{End}_{\substack{l\text{-div. gr.} \\ \text{over } k}}(X(l)) \end{aligned}$$

を述べたものがあり、これは $l \neq p$ の $\bar{k}$ に X が k 上 simple
 ならば $\text{End}_k(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の invariants が $1, 2, \dots, l$
 の固有多項式 χ_l である。簡単のため $l \neq p$ の場合 $l \neq p$ の
 場合である。