

On 2-reducible cycles in graphs

大阪市大工 岡村 治子 (Haruko Okamura)

$G=(V(G), E(G))$ を辺に向きのない有限グラフ (多重辺を含んでもよい) とし、 $V(G)$ を点の集合、 $E(G)$ を辺の集合とする。サイクルまたはパスは、辺は高々一回しか通らないが点は二回以上通ってもよいとする。

定義 1. G が k -辺連結 (k -edge-connected)

$\longleftrightarrow$ k 本以上の辺を除去しないと G は非連結にならない。

2. G の辺連結度は k ($\lambda(G)=k$ で表す)

$\longleftrightarrow$ G は k -辺連結であるが、 $(k+1)$ -辺連結ではない。

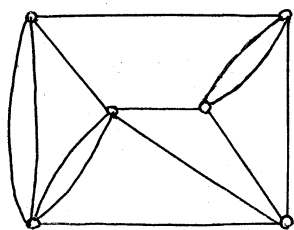
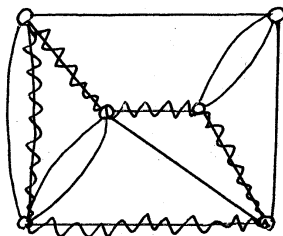
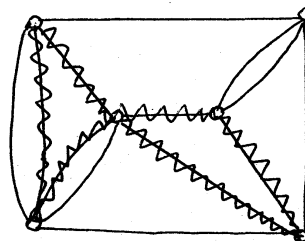
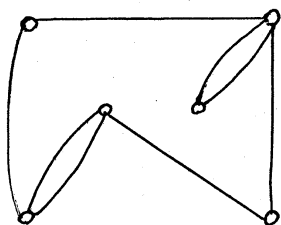
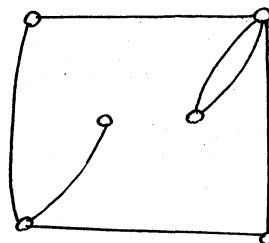
3. k を固定して、 $\lambda(G) \geq k$ のとき、 G のサイクル (またはパス) C が 2-reducible

$\longleftrightarrow \lambda(G-E(C)) \geq k-2$

(i.e. G から C の辺を除いたグラフが $(k-2)$ -辺連結)。

例 1. 図-1のグラフを G とすると、 $\lambda(G)=4$ 。図-2の波線

で示されるサイクル C は 2-reducible であるが、図-3のサイクル D は 2-reducible ではない。

図-1 G 図-2 C 図-3 D  $G-E(C)$  $G-E(D)$

$X, Y \subseteq V(G)$, $X \cap Y = \emptyset$ のとき、 $\partial(X, Y; G) = \partial(X, Y)$ は、 X の点と Y の点を結ぶ辺からなる集合とし、次のように定義する。

$\partial(X; G) = \partial(X) := \partial(X, V(G) - X)$, $e(X, Y) := |\partial(X, Y)|$, $e(X) := |\partial(X)|$ 。

$\lambda(G) \geq k$, f_0, f_1, f_2 は G の辺とする。次のことが既知である。

P1. f_1 と f_2 が接合するとき $([3], [2])$ 、または k が偶

数のとき [4]、 G は f_1 と f_2 を通る 2-reducible cycle をもつ。

P2. k が奇数のとき、次のようなグラフ G を構成できる [1]。 G は x と y を通る任意のサイクルが 2-reducible でないような距離 3 の 2 点 x と y をふくむ。

特に、 f_1, f_0, f_2 が図 -4 のように連続しているとき、
 $T = \{v_1, v_2, u_1, u_2\} \subseteq V(G)$ とすると、

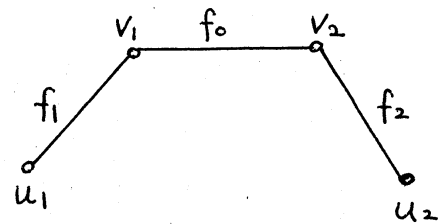


図 -4

P3. k が偶数で、 $X \cap T = \{v_1, u_2\}$ である各 $X \subseteq V(G)$ に対して $e(X) \geq k+2$ のとき、 G は f_1, f_2, f_3 を通る 2-reducible cycle を含む [5]。

P4. k が奇数のとき、 f_1 と f_2 を通る 2-reducible cycle をもたないグラフを特徴づけることができる [6]。

ここでは、 f_1, f_0, f_2 を通る 2-reducible cycle をもたないグラフを特徴づける。

定理 1. (i) $k \geq 5$ は奇数, $\lambda(G) \geq k$, $T = \{v_1, v_2, u_1, u_2\} \subseteq V(G)$, $f_0 \in \partial(v_1, v_2)$, $f_i \in \partial(v_i, u_i) - f_0$ ($i=1, 2$),

(ii) $X \cap T = \{v_1, u_2\}$ である各 $X \subseteq V(G)$ に対して、 $e(X) \geq k+2$,
 が成り立つとき、次の (1) と (2) は同値である。

(1) G は f_1, f_0, f_2 を含む 2-reducible cycle をもたない。

(2) $n \geq 2$ に対して次のような $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ がある。

$$V(G) = X_1 \cup \dots \cup X_n \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_n \text{ (disjoint union),}$$

$$v_1 \in X_1, v_2 \in Y_n, e(X_1) = e(Y_n) = k+1,$$

$$e(X_i) = e(Y_j) = k \quad (2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1),$$

$$e(X_i, X_{i+1}) = e(Y_i, Y_{i+1}) = (k-1)/2 \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$e(X_i, Y_i) = 1 \quad (2 \leq i \leq n-1),$$

を満たし、次の (a) または (b) が成り立つ。

$$(a) \quad u_1 \in Y_1, u_2 \in X_n, e(X_1, Y_1) = e(X_n, Y_n) = (k+1)/2.$$

$$(b) \quad u_1 \in X_n, u_2 \in Y_1, e(X_1, Y_1) = e(X_n, Y_n) = (k-1)/2.$$

系 2. (i) $k \geq 5$ 奇数, $\lambda(G) \geq k$, $T = \{v_1, v_2, u_1, u_2\} \subseteq V(G)$,
 $f_0 \in \partial(v_1, v_2)$, $f_i \in \partial(v_i, u_i) - f_0$ ($i=1, 2$),

$$(ii) \quad X \subseteq V(G), X \cap T = \{v_1, u_1\} \text{ ならば、} e(X) \geq k+1,$$

$$(iii) \quad X \subseteq V(G), X \cap T = \{v_1, u_2\} \text{ ならば、} e(X) \geq k+3,$$

が成り立つとき、 f_1, f_0, f_2 を通る 2-reducible cycle が存

在する。

図-5の2つのグラフは、 $k=5$ で定理1の(2)を満たしている。

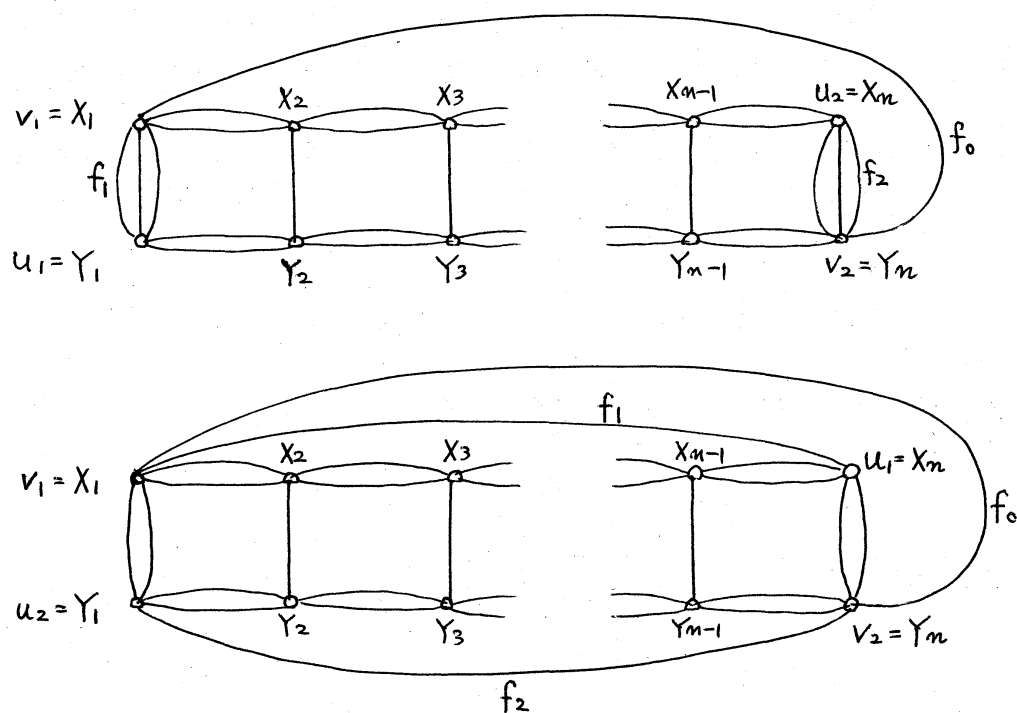


図-5

references

1. A. Huck and H. Okamura, Counterexamples to a conjecture of Mader about cycles through specified vertices in n -edge-connected graphs, *Graphs and Combinatorics* 8 (1992), 253-258.
2. W. Mader, Paths in graphs, reducing the edge-

- connectivity only by two, *Graphs and Combinatorics* 1 (1985), 81-89.
3. H. Okamura, Paths and edge-connectivity in graphs, *J. Combinatorial Theory Ser. B* 37 (1984), 151-172.
4. H. Okamura, Paths in k -edge-connected graphs, *J. Combinatorial Theory Ser. B* 45 (1988), 345-355.
5. H. Okamura, Cycles containing three consecutive edges in $2k$ -edge-connected graphs, *Topics in Combinatorics and Graph Theory* (eds. R. Bodendiek and R. Henn), *Physica-Verlag Heiderberg* (1990), 549-553.
6. H. Okamura, 2-reducible cycles containing two specified edges in $(2k+1)$ -edge-connected graphs, to appear.