

学 位 審 査 報 告 書

(ふりがな) 氏 名	まえだ まさや 前田 昌也
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) Instability of bound states of nonlinear Schrödinger equations with Morse index equal to two (非線形シュレディンガー方程式に対するモース指数2の束縛状態の不安定性)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 堤 誉志雄 教 授 穴倉 光広 教 授 泉 正己 教 授

理 学 研 究 科

京都大学	博士（理 学）	氏 名	前田 昌也
論文題目	Instability of bound states of nonlinear Schrödinger equations with Morse index equal to two		
(論文内容の要旨)			
非線形シュレディンガー方程式の束縛状態は定在波解とも呼ばれ、ソリトン状解の一つであり、その安定性解析は数学的に興味深いだけでなく、数理物理的にも重要である。1987年に Grillakis-Shatah-Strauss (GSS) は与えられた定在波解 ϕ_ω に対し ϕ_ω を臨界点にもつ保存量 S_ω を導入し、S_ω を ϕ_ω のまわりで Taylor 展開することにより安定性を解析した。その結果、$d(\omega) = S_\omega(\phi_\omega)$ に対し Morse 指数 ($S''_\omega(\phi_\omega)$ の負の固有値の個数) が 1 の場合 $d''(\omega) > 0$ ならば安定、$d''(\omega) < 0$ ならば不安定であることを示した。この $d''(\omega)$ の符号の条件は S_ω を超曲面 $M = \{u \in H^1; \ u\ _{L^2} = \ \phi_\omega\ _{L^2}\}$ に制限したときに ϕ_ω が $S_\omega _M$ の極小点であるかを判定する。つまり、$d''(\omega) > 0$ ならば ϕ_ω は $S_\omega _M$ の極小点となり、$d''(\omega) < 0$ ならば ϕ_ω は極小点ではなく鞍点となる。ここで、L^2 ノルムは非線形シュレディンガー方程式の保存量であるため、ϕ_ω が $S_\omega _M$ の極小点ならば ϕ_ω が安定であることは導かれるが、勾配系の場合と異なり、ϕ_ω が $S_\omega _M$ の鞍点であることが直ちに不安定性に結びつくわけではないことに注意したい。 GSS の結果は定在波解 ϕ_ω が Morse 指数 1 の場合を扱っているのにたいし、申請者は Morse 指数が 2 である場合の安定性解析を行った。正值な定在波解は Morse 指数が 1 であるものが多いが、プラズマの 3 波相互作用にあらわれる非線形シュレディンガー方程式の連立方程式を考えると正值であっても Morse 指数が 2 である定在波解が数多く見つかる。申請者は $d''(\omega) > 0$ のときこのような定在波解は不安定であることを示した。 このような定在波解は Grillakis などにより線形不安定性 (定在波解周りの線形化作用素が正の固有値をもつこと) が示されているが、高次元では不安定性を線形不安定性から導くことは難しい。これは、1 次元の場合と違って $H^1 \hookrightarrow L^\infty$ の埋め込みが成立しないことや想定している非線形項 (冪乗型) が滑らかとは限らないことによる。また、線形化することによりエネルギーや L^2 ノルムなどの不変量が使えなくなり、不安定方向以外の“よい”方向の制御ができなくなることも原因の一つと考えられる。このような理由で線形不安定性を経由せずに不安定性を示すことが必要となってくる。 申請者の証明のアイデアは GSS の安定性の証明と不安定性の証明の両方の方法を組み合わせることであった。まず、Morse 指数が 1 で、$d''(\omega) > 0$ の場合、$S_\omega _M$ は ϕ_ω で極小値をとる。これが GSS の安定性の証明方法であった。申請者はこの議論を用いて、Morse 指数が 2 で $d''(\omega) > 0$ の場合、$S_\omega _M$ が減少する方向は一方向だけになることが示した。さらに、減少する方向が一方向だけのとき、			

ϕ_ω の管状近傍かつ $S_\omega(\phi_\omega) > S_\omega(u)$ となる領域で解に対し時間について単調増大 (もしくは単調減少) する関数が構成できることを示し, $S_\omega(\phi_\omega) > S_\omega(u)$ となる解は ϕ_ω の管状近傍から “押し出される” ことを示すことにより不安定性を証明した.

この結果の応用としては 3 波相互作用方程式の semi-trivial な定在波解や, Gross-Pitaevsky (線形ポテンシャル付きの非線形シュレディンガー方程式) のポテンシャルの極大点に集中する定在波解の不安定性が挙げられる. この結果の証明のアイディアは, GSS の結果を $d''(\omega) = 0$ の場合を含むよう拡張する場合にも適用できる. 具体的には, $d(\omega)$ と $S_\omega|_M$ の ϕ_ω の近傍での形状の関係を精密に評価することにより, 退化していて線形不安定でない場合においても非線形不安定性を示すことができる.

以上が本論文の主要結果である.

(論文審査の結果の要旨)

非線形シュレディンガー方程式は波動をエネルギーの散逸なしに空間全体に広げる“分散性”と波動を集中させようとする“非線形性”という相反する性質をもち、波動の自己集約や分散、安定形状の形成など様々な振る舞いを示す。それゆえ非線形シュレディンガー方程式の解の時間大域挙動を理解することは方程式をモデルとする物理現象を理解することにとどまらず、非線形性と分散性という大きく異なる性質の相互作用を解析するという意味で数学的にも重要な問題である。ソリトン状解とは上で述べた分散性と非線形性のバランスの結果として現れる解であり、空間的に局在してその形や速さを変えないものである。実験や数値計算などにおいてもソリトン状解は観測されており、これは非線形シュレディンガー方程式の一つの典型的な時間大域挙動を表現していると考えられている。それゆえ、ソリトン状解の性質、ソリトン状解の周りの解の挙動の理解は非線形シュレディンガー方程式の研究における一つの目標である。申請者は、ソリトン状解のうち、定在波解と呼ばれる $u(x, t) = e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ という形をした非線形シュレディンガー方程式の研究を行った。定在波解とは $u(x, t) = e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ という形をした非線形シュレディンガー方程式の解であり、 $\phi_\omega(x)$ は次の半線形楕円型方程式の解である。

$$\Delta \phi - \omega \phi + g(x, |\phi|^2) \phi = 0.$$

このとき、定在波解 u は次の非線形シュレディンガー方程式を満たす。

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + g(x, |u|^2) u = 0.$$

申請者は学位論文において、Morse 指数が 2 である定在波解の不安定性を証明することに成功した。従来、Morse 指数が 1 である場合には、安定性・不安定性を判定する十分条件が色々知られていたが、Morse 指数が 2 である場合は一般論はなかった。多くの場合、Morse 指数が 2 である定在波解は不安定であると予想されるが、不安定方向が 2 つある場合、それら複数の不安定モードの相互作用を評価するのが困難であったからである。申請者は、安定性を示すときの議論を用い、不安定モードのうち一つを制御し、残りの不安定モードが定在波解の不安定性を引き起こすことを証明した。証明のアイディアは他の問題にも応用できる可能性があり、今後の研究の進展も期待される。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成 23 年 1 月 25 日に試問を行った結果、合格と認めた。