

古典 spin 鎖の spin wave と Irregular motion

福岡工大 中 村 勝 弘

Hamiltonian 系の dynamics における Irregular あるいは chaotic states の研究は天体力学や原子・分子のレベル（量子準位の random distribution）で活発になっているが、固体物理のレベルになると、話が一層興味深くなる。

Nonlinear coupling で結合した調和振動子系の研究 (Fermi-Pasta-Ulam) は、非可積分系における KAM の概念を産み出すと同時に、高次の非線型項を繰りこんだ完全可積分な指数格子（戸田格子）を産みだした。しかし、戸田格子の出現は、同時に、一つの歴史の終りを意味する。実際、この格子は、soliton, phonon など、いわゆる regular orbit 以外の orbit, つまり Irregular state を産み出さない。

他方、Spin lattice 系における Irregular state の研究はまだない。今、XXZ 型の spin Hamiltonian

$$H = J \sum_{\langle ij \rangle} \{ (S_i^+ S_j^- + \text{c.c.})/2 + W \cdot S_i^z S_j^z \} \quad (1)$$

を考えよう。(1)において、spin 1/2 の 1-d 量子 spin 鎖は完全可積分であるが、(1)の古典版はどうであろうか？ Faddeev (1982) と Ishimori (1982) により指摘されたように、

$$\begin{aligned} H'_{cl} &= J \sum_{\langle ij \rangle} \{ \vec{S}_i \vec{S}_j - \frac{1}{2} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j)^2 + \dots \} \\ &= J \sum_{\langle ij \rangle} \ln (1 + \vec{S}_i \vec{S}_j) \end{aligned} \quad (2)$$

という Hamiltonian からえられる運動方程式は、discrete な Lax pair を持ち、discrete な Nonlinear Schrödinger eq. と Gauge 同等である。又、(1)で J が強磁性結合の時、lattice const $\rightarrow 0$ 等の極限でえられる Hamiltonian

$$H''_{cl} = \int \left\{ \frac{\hat{J}}{2} (\nabla_x \vec{S})^2 + \vec{S} \vec{D} \vec{S} \right\} dx \quad (3)$$

は、Landau-Lifshitz eq. を運動方程式に持つ。Nakamura-Sasada (1982) によって示されたように、これは continuum Nonlinear Schrödinger eq. と Gauge 同等である。しかし、最も familiar な

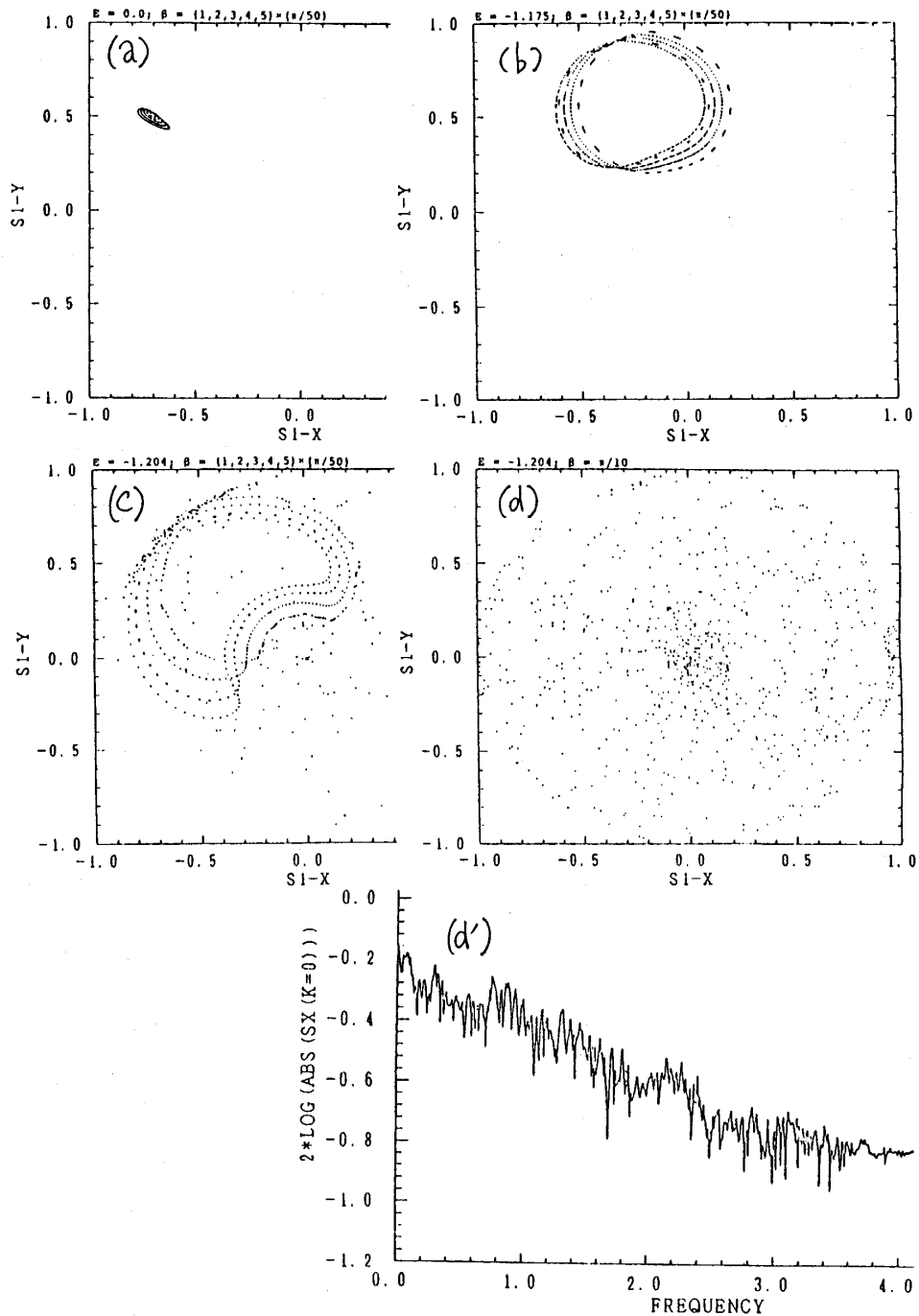


図1 (a) $E = 0.0$
 (b) $E = -1.175$
 (c) $E = -1.204$
 (d) $E = -1.204$
 (d') $E = -1.204$

• (a) ~ (d) は $\frac{d S_1^z}{d t} = 0$ できる

Poincare断面の $S_1^x - S_1^y$ 面への projection

• (d') は (d) の power spectrum

$$H_{cl} = J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

あるいはその一般化である(1)式の古典版は可積分ではない。実際(1)の古典的な運動方程式

$$\frac{d}{dt} \vec{S}_j = \vec{S}_j \times (-\delta H / \delta \vec{S}_j) \quad (4)$$

は、磁化 M_z と energy E 以外の保存量を持たない ($W = 1.0$ の等方的な場合は、他に M_x , M_y が保存量である)。戸田格子と異なり、spin は lattice sites に固定されているので、運動量に相当する保存量はない。

今、3個の spin からなる周期鎖を考える。これは三角格子状になっているので 2-d triangular lattice への足場にもなる。以下、結合は反強磁性交換相互作用に限る。XXZ型の結合の時、位相空間の自由度は6(3個の spin の polar and azimuthal angles) - 1(E) - 1(M_z) = 4で chaos が期待できる。変分方程式

$$\frac{d}{dt} \delta \vec{S}_j = -\delta \vec{S}_j \times \frac{\delta H}{\delta \vec{S}_j} - \vec{S}_j \times \sum_i \frac{\delta^2 H}{\delta \vec{S}_i \delta \vec{S}_j} \delta \vec{S}_i \quad (5)$$

の linearized version からえられる固有値問題を解くことにより、orbit の local stability がわかる。これは位相空間の負曲率領域を求める問題である。解析によると、負曲率領域は高 energy 領域ではなく、低 energy 領域に存在している！これは、Henon-Heiles 系や Sinai の Billiard と決定的に異なり、Q.C.D. の真空 (Savidy) の場合をほうふつさせる。

以下、(4)式の spin dynamics を数値的に解き、得られた結果を示す。図1(a)→(b)→(c)は高 energy 領域から energy を下げていった時の orbit の Poincare surface of section である(各図には、5種類の orbit が記されている)。1(c)図から、KAMの一部(第5番目の orbit)が崩れ、chaos が出現することがわかる。この orbit だけの long-run が1(d)図である。1(d')図は、1(d)の global chaos に対応する transverse power spectrum で broad な構造を示している。

他方、基底状態(120°構造)の energy ($-1.5 J$)から energy をあげていった時の orbit (この場合は一種類)が、2(a)→(b)→(c)であり、それらに対応する transverse power spectrum が2(a')→(b')→(c')である。2(a)ではKAMが局在しており、spin wave に対応する。2(b)は、一種の分岐を示しており、2(b')の power spectrum から判断して、局在 chaos をあらわしている。2(c)は phase symmetry が回復した状態での global chaos である。更に energy を高めると、中空部分に軌道が進出して1(d)図に近づいていく。

このように基底状態の近くで Irregular states が出現することは、3個あるいは三角格子上の

反強磁性 spin 系の特徴で, Frustration-induced chaos といえる。強磁性結合の時は, 少なくとも低 energy 領域では chaos は出現しない。

Chaos の出現する energy range が spin の数を増すにつれ (1-d のまま, 又は, 2-d 三角格子状に), どのように変動するか? 3 個の古典 spin 系の Chaos や KAM は, 量子版, 特に半古典極限での性質にどのように反映するのか? 量子論から古典論への transition において, Chaos の概念がいかなる役割を演じるのか? は, 今後の課題である。

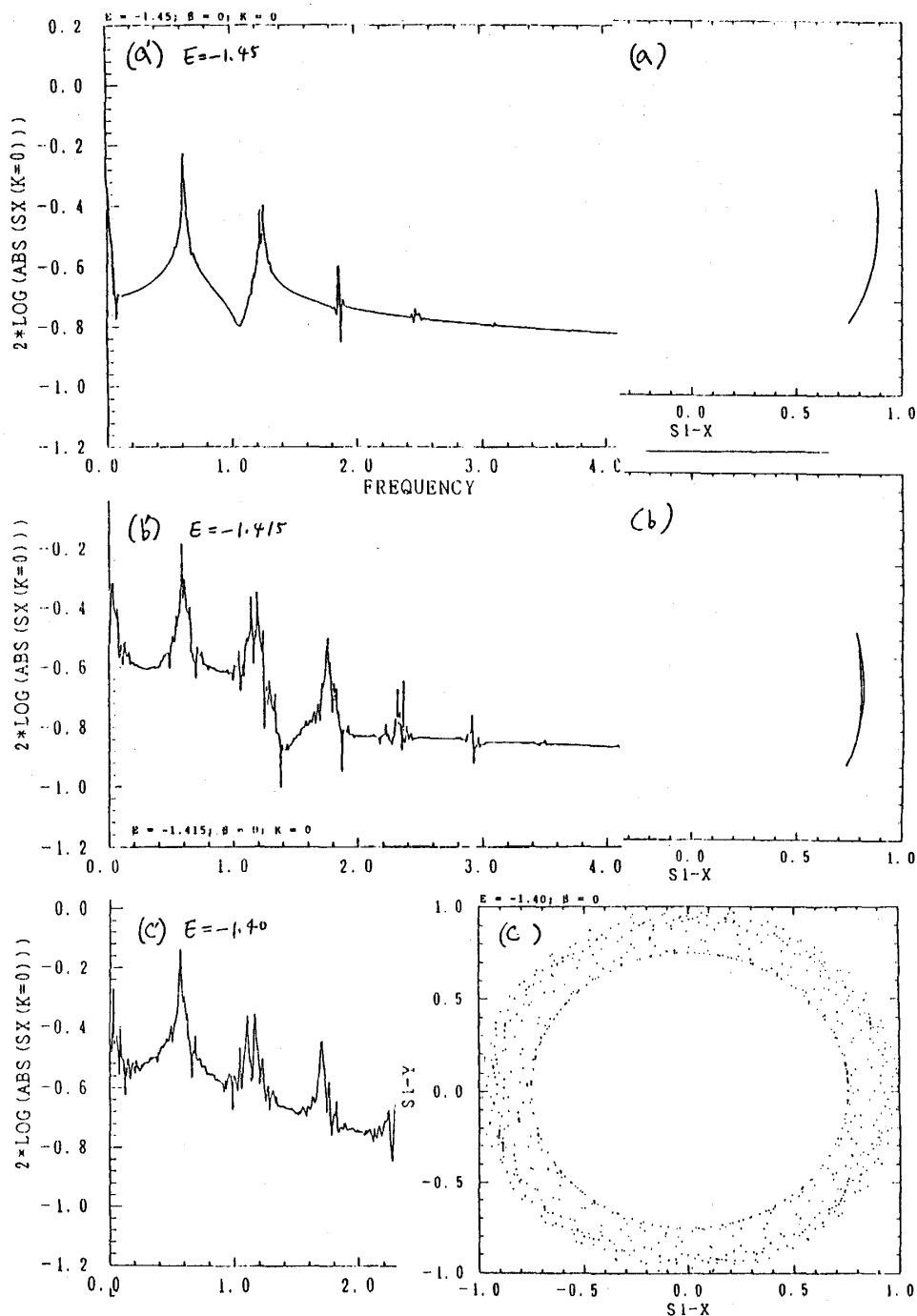


図 2