

CR embedding theorem に関する
pde について

コロンビア大 倉西正武

MASATAKE KURANISHI

$\mathbb{C}^n$ の hypersurface M (次元 $2n-1$) が与えられたとき, $\mathbb{C}^n$ の type $(0,1)$ の complex tangent vector で M に tangent なものの全体は M の complex tangent vector bundle $\mathbb{C}TM$ の sub-bundle L になる. このような L は次の性質を持って居る:

- 1) L の fiber dimension は $n-1$,
 - 2) $L \cap \bar{L} = \{0\}$,
 - 3) L の smooth section の全体は bracket で閉じて居る.
- 上の条件を満たす sub-bundle L を CR-structure と呼ぶ. 次元 $2n-1$ の manifold M に CR-structure L が与えられたとき, M を open subset U で cover して, 各 U の上で適当な embedding $U \subset \mathbb{C}^n$ をとれば, $L|_U$ は上のように $\mathbb{C}^n$ の type $(0,1)$ vector bundle によって

induce されるとき, L に関して (local) embedding theorem が成立すると云ふ。

一般の CR structure L について embedding theorem が成立するかどうかはむづかしい問題なので, L にてき当な条件を付けて論じられて居る。

このとき L の Levi-form が使はれる。

条件 1) - 2) によつて $\dim(\mathbb{C}TM/(L+\bar{L})) = 1$ なので, $F \in TM$ をとつて, $\mathbb{C}TM = \mathbb{C}F \oplus L \oplus \bar{L}$ とかける。
 L の smooth sections X, Y に対し

$$[X, Y] \equiv \frac{1}{i} L(X, Y) F \pmod{L + \bar{L}}$$

とおけば, $L(X, Y)$ は L の各 fiber 上の hermitian form になつて居る。 $L(X, Y)$ は L の Levi form とよぶ。 L は F の取り方によるが, F の conformal class は L によつて unique にきまる。従つて L が non-degenerate か 又は definite かは L の性質である。
 L が definite のとき L は strongly pseudo convex であると言ふ。

$\dim M \geq 7$ で L が strongly pseudo convex ならば CR embedding theorem が成立することが知られて居る。
 $\dim M = 3$ のときは, L が strongly pseudo convex であっても, embedding theorem が成立するとは限らない。

ことは、Nirenberg 等の例によって知られて居る。
 $\dim M = 5$ で "strongly pseudoconvex" の場合に~~つ~~^つて
 は、未だ未解決である。Scri-form が definite
 の場合にも、 L の eigen-value の正負の~~適当~~^{適当}
 な条件のもとで embedding theorem の成立することが知
 られて居る。

Embedding theorem が成立するかどうかは、p.d.e. の
 問題としてとらえることが出来る。Complex valued の
 unknown function f に関して、p.d.e.

(1) $\sum: \quad \bar{Z}f = 0 \quad \text{for all } \bar{Z} \in L$ の上は
 を考えよう。 $\sum$ の解 $f_1, \dots, f_n$ が $U \subset M$ ~~に~~^にあつて
 独立ならば、 $U \ni p \rightarrow (f_1(p), \dots, f_n(p)) \in \mathbb{C}^n$ は

$L|U$ を type $(0,1)$ の vector bundle から induce する

embedding になつて居る。従つて Embedding theorem が
 成立するかどうかは上のような解のある open set で M
 が cover されるかどうか 云ふことと equivalent になる。現に

strongly pseudoconvex で次元 ≥ 7 の場合の embedding
 theorem は上の意味で p.d.e. $\sum$ をとくと言ふ形で

証明された。この解き方は次のようになる：まず M
 の点をきめて、 $\sum \in p$ のまはりて formal power series
 として解くことを考へる。条件 3) を使えば formal

power series の解 $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ で独立なものを作れることがわかる。 f_j^1 を smooth な函数で γ の p での Taylor series が $\tilde{f}_j$ に近づくものをとれば、 $\omega_j(\bar{z}) = \bar{z} f_j^1$ are 小さい。もし小さい f_j^2 で $\omega_j(\bar{z}) = \bar{z} f_j^2$ に近づくものがあれば、 $f_j = f_j^1 - f_j^2$ が求めるものになつて居る。上で "小さい" と云ふのは、smooth な函数の vector space に topology を入れて、その意味で小さいと云ふことである。" $f_1^1, \dots, f_n^1$ が独立のとき、 f_j^2 が充分小さければ、 $f_1^1 - f_1^2, \dots, f_n^1 - f_n^2$ も独立になる" と云ふ性質をもつ topology であれば上の議論は成立することになる。High order の Sobolev norm はこのような topology を定義する。

上の $\omega_j(\bar{z})$ を L の 1-form _{ω_j} として捉えれば、方程式 $\omega_j(\bar{z}) = \bar{z} f_j^1$ は

$$(2) \quad \omega_j = \bar{\partial}_b f_j^1$$

とわかる。ここで $\bar{\partial}_b$ は 函数 f を 1-form $\omega(\bar{z}) = \bar{z} f$ に対応させる operator である。従つて embedding theorem は方程式

$$(3) \quad \omega = \bar{\partial}_b f$$

を与えられた ω に対して連続的にとくと云ふ問題で置きかえられる。

Open set $U \subset M$ をきめて, U の上での L の ^{smooth な} $\wedge^p$ -form
(skew-symmetric) の全体を $\wedge^p(L)$ と書けば, U の
 $\bar{\partial}$ は $\wedge^0(L) \rightarrow \wedge^1(L)$. これは De Rham の
exterior derivative $\wedge^0 \rightarrow \wedge^1$ を L に restrict したもの
に外ならない。このようにして同じように $\bar{\partial}$ -complex

$$(4) \quad \bar{\partial}: \wedge^p(L) \rightarrow \wedge^{p+1}(L) \quad (=0)$$

がつかれる。(3) がとけるためには $\bar{\partial} \omega = 0$ が必要条件
であることは明らかであるから、

(5) 問題: 適当な U をえらんで, $\bar{\partial}$ -complex の $\wedge^1(L)$
での exactness を連続性をこめて確立せよ
として embedding theorem を捉えることになる。この
問題を とくことはかなり手間のかかる仕事で
あった。

或る問題を pde をとく問題にかくことは 古えが あるこ
とであるが, このような pde は unique にきまるわけでは
ない。例へば Newton の力学の方程式は Hamilton 函数
をつくって Hamilton の方程式にかける。こうした方が
解の或種の性質がよく見えると云ふ利点がある。難
しかった ^{カル}Riemann geometry の embedding theorem も うまい
pde を使うことによつて かなりかんたんな証明が出来る
ようになった。CR embedding theorem も 新しい立場か

ら問題をみることによつて新しい証明をみつけると云ふ、
試みがなされて居る。

Catlin は " $U \times [0, -1)$ の適当な open set $\tilde{U}$ をとつて
その上に complex structure をみつけて、もとの L が $\tilde{U}$ の type
(0,1) vector bundle から induce されるようにする" と云ふ。
問題として embedding theorem をあつかつて居る。これを
pde の形にするには、 L の formal な embedding があること
を使つて、 L に近い embeddable な CR structure L_1 をつく
れることに注目する。従つて $\tilde{U} \subseteq \mathbb{C}^n$ で $U \times \{0\}$ に
induce される CR structure は L_1 であるとしてよい。 L の
 $\tilde{U}$ への拡張は $\mathbb{C}^n$ の type (0,1) bundle T_1 の deformation
と考えられる。だから standard の complex structure の
deformation theorem が使えて、 T_1 -valued type (0,1) の 1-form
で現される。従つて吾々の pde は

$$(5) \quad \bar{\partial}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

に " ω が $U \times \{0\}$ に induce する CR structure が L になると
云ふ boundary condition を加えたものになる。この boundary
condition が嫌ならは、 T_1 のかわりに L の almost complex
structure としての拡張 T_0 を使ふはよい。 T_0 の deformation
of integrability condition も integrable complex structure の
deformation を論ずるとまと同じやり方でかけるから、(5) の

か は り に

$$(7) \quad \bar{\partial}_{T_0''} \Phi + R(\Phi) = 0, \quad \Phi(L) = 0$$

を考へることになる。ここで Φ は $\overline{T_0''}$ -valued の T_0'' の上
の 1-form のつくる space $\Lambda^1(T_0'', \overline{T_0''})$ の unknown を元, $\bar{\partial}_{T_0''}$
は standard exterior derivative の construction を T_0'' の場合
にあてはめて使った $\wedge$ operator

$$(8) \quad \bar{\partial}_{T_0''} : \Lambda^p(T_0'', \overline{T_0''}) \rightarrow \Lambda^{p+1}(T_0'', \overline{T_0''}),$$

$R(\Phi)$ は T_0'' によってきまる Φ とその partial derivatives との
函数で, $T_0'' = T_1''$ の場合には, $\frac{1}{2}[\omega, \omega]$ に等しいもの
である。 T_0'' は integrable ではないので, $\bar{\partial}_{T_0''} \circ \bar{\partial}_{T_0''}$ は zero
map ではない。 (7) では boundary condition をかんたん
にするかほりに, (6) より ふくざつな p.d.e. を考えることになつ
て居る。 しかし elliptic p.d.e. の一般論的立場からみると
この二つの間にはたいしたちがいはないのである。実際
Catlin は方程式 (6) をつかつて居る。

筆者は今上の CR frame bundle_M を使って CR
embedding theorem を論ずる方法を開発中である。下
中には上の local な geometric property はすべて store されて
居るから, CR structure のきろんに上の geometric structure
(特に curvature) がいかに密着して居るかを浮き彫りに
するのがこの方法の狙いである。 M が complex domain D の

boundary で L が D から induce された CR structure の場合、 D の Bergman kernel の singularity of asymptote をこの方法 ~~に~~^{によ}って L の curvature とその derivatives を使って書き現されること が 期待 される。

この方法は E. Cartan に由来する 次の 考へ 方が 基礎 になつて居る： 或る mathematical structure を 考へるとき、一つの model case (これは homogeneous structure) をきめて、~~一般~~^{一般}の場合を model structure の deformation として捉える。吾々の場合、model structure ^には complex ball B の boundary CR structure sphere S をとる。Strongly pseudocomplex L on M ~~には~~^{には} formal embedding があること ~~を使~~^え ~~て~~^ば, embeddable な L_1 ~~を~~^を L の ~~非常~~^{非常に} 近く ~~つく~~^つ ~~ける~~^く。 $M \subset \mathbb{C}^n$ と L_1 を 実現 する embedding としたとき、 $\mathbb{C}^n$ の 適当な 座標変換 をすれば、 M の方程式を S の方程式に (local に) 非常に 近く 来る。従つて CR structure M は CR structure S に 非常に 近いと 考えられるのである。そして M を open submanifold $M \subset S$ と identify して、 $L \in \mathbb{C}TM \subseteq \mathbb{C}TS$ の sub-bundle で S の CR structure $L_S \subset \mathbb{C}TS$ に 非常に 近いものとしてよいことになる。

(9) $M \subset S$ and $L, \overset{L_S}{\square} \subset \mathbb{C}TS$. automorphism
 S の CR automorphism group G は B の holomorphic group ^に

の restriction に ~~等~~ つて居るから、 S と B との reference point p_S と p_B とを定めて、

$$(10) \quad S = G/H_S, \quad B = G/H_B$$

とかける。上によつて ~~principal bundles~~ principal bundles (G, S, H_S, p_S) , (G, B, H_B, p_B) がそれぞれ S, B の上に定まる。 (G, S, H_S, p_S) が S の上の frame bundle の定義である。 B の complex structure J が S の CR structure とし G の Maurer-Cartan form を使って書き現はすようにすると云ふのが E. Cartan の重要な idea である。Maurer-Cartan form は上の principal bundle の場合には Cartan connection の一つであるから、 (S, L_S) の小さな deformation である (M, L) についても適当な principal bundle (F_L, M, H_S, p_M) とその上の Cartan connection ~~を~~^を 作つて、CR structure L を ω_L で代表せしめると云ふ道がとらけることになる。Tanaka, Chern-Moser による CR equivalence 問題の解決 ~~は~~^は 上の線によつてなされた見ることが出来る。 S が euclidean space G が the group of euclidean motion で M が Riemann manifold の場合と上に述べた方法をあてはめて考へていなければ、それが Levi-Civita connection の construction になつて居ることになり、この方法の有用性が理解出来ると思ふ。

上に述べた E. Cartan の考えを要々の場合に実行にうつしてみよう。 $\mathbb{C}^n$ の standard complex chart $(z^1, \dots, z^n)$ を使って $(\omega^i)_e = (p_B^* dz^i)_e$ と書こう。 B の complex structure は G -invariant であるから、上の単位元 e での 1-form $(\omega^i)_e$ を G の transformation を使って G の上の Maurer-Cartan form に拡張したものを ω^i とおけば、 ω^i によって B の complex structure が定まることになる。もう少し詳しく言えば

$$(11) \quad \Sigma_B = \mathbb{C}\omega^1 + \dots + \mathbb{C}\omega^n \subset \mathbb{C}T^*G$$

とおき、 G の上の函数 h が Σ_B の integral であることと、 dh が Σ_B の section であることとを定義しよう。言うおれば、 Σ_B の integrals の全体は B の holomorphic functions の pull-back から作った sheaf に一致して居ることになる。 G の Lie algebra を $\mathfrak{g}$ とし、 G の Maurer-Cartan form の全体を

$$(11)' \quad \omega_G : TG \longrightarrow \mathfrak{g}$$

としたとき、適当な projection $\pi_B : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_1$ があって

$$(12) \quad \Sigma_B = \pi_B \circ \omega_G$$

とすることが出来る。目にはようにして S の CR-functions も ~~適当な projection~~ $\pi_S : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_0$ を使って

$$(13) \quad \Sigma_S = \pi_S \circ \omega_S$$

の integral として捉えることが出来る。

E-Cartan plan は上の (G, S, H_S, P_S) と Σ_S との construction を (M, L) の場合に出来るだけ実現することにある。先づ

CR structure の定義をよくみると, unknown ^{H_S} principal

bundle F_M ~~unknown~~ unknown Cartan connection $\omega_M \in \mathfrak{g}$

使って、 M の CR-function Σ ^{上の意味で} characterise する sub-bundle $\Sigma_M \in$

$$(14) \quad \Sigma_M = \pi_S \circ \omega_M$$

^{ここがわかる} ^{としてわかる}。これに Cartan connection の ~~定義~~ 定義と適当な

torsion free ~~条件~~ 条件 ~~をつ~~ つけ加えると、先づ F_M が

unique に定まることが解る。 ω_M に unique に定まるので

更に適当な条件をつけ加えて ω_M を unique にする。 ^(これを ~~CR~~ CR Cartan connection とする)

こうして CR structure $M \in$ frame bundle (F_M, M, H_S, P_M) と

CR Cartan connection ω_F とによって定められることになった。こ

いてみると、 B が Σ_B を使って現はされたとに注目すれば、

~~embedding~~ ^{M の} embedding theorem は Σ_B に相当する sub-bundle Σ_M

を F_M の上につくると云ふ、問題で置き換えられることにな

る。それではどんな条件が Σ_M に必要であらうか？ 先

づ $\Sigma = \Sigma_B$ は次の条件を満たすことがよくわかる。

1° Σ の fiber dimension は n , 2° $\Sigma \cap \Sigma = \{0\}$

3° Σ の component で生成される exterior algebra の ideal

は d で閉じて居る。

$\tilde{M}$ の上の

$\Sigma \subset \mathbb{C}T\tilde{M}$ で $\tilde{M}$ の real dim. が $2n$ の場合、上は T 度 $\checkmark$
 $\text{integrable almost complex structure}$ の定義 Σ $\wedge$ 1-form を使って

書き下したものに成って居る。従って この場合 には
 Nirenberg-Newlander theorem に依つて

Σ によって $\tilde{M}$ の complex structure が定まる。このことは

$\tilde{M}$ の次元 $2n$ によつて $\wedge$ かわかつて居る。

projection

(5) THEOREM. Σ が $\tilde{M}$ の上で上の条件をみたすならば $\downarrow$

(local に) $\tilde{M} \xrightarrow{\nu} D$ と D の上の complex structure

が存在して、 ν^* (D の holomorphic functions) $\circ \nu$ が Σ
 の integrals となるように出来る。

従つて CR embedding theorem は 次の 2つの 問題 毎
 帰着されたことになる。

(i) $\mathbb{C}T^*M$ の sub-bundle Σ で 条件 1), 2), 3) を満たす
 ものを みつけよ。 Σ で定まる complex manifold を D とする。

(ii) M を D の boundary に attach して L が D の complex
 structure から induce される CR structure になる様にせよ。

実際には (ii) が出来る Σ を (i) で求むと云ふ、問題で
 ある。

問題 (i) は 次のようにして pde の問題 に変化する: Σ_B
 が (12) の様にかけることに注目すれば、 Σ の σ -基底補は
 $\Sigma_1 = \pi_B^* \omega_M$ である。 L が L_B に近いから、条件 1) と 2)

と満足して居るが、3)°は満足して居るとはかぎらない。実際に計算してみると curvature が 3)°をみたすための obstruction になって居る。従って Σ_1 の deformations Σ の中から (i) の条件をみたすものをさがすことになる。そうするには、 F_M の 1-form $\bar{\mathbb{P}}^\alpha$ (α=1, ..., n) で Σ_1 を generate するようなものをきめて、unknown 1-form A^α で $\bar{\mathbb{P}}^\alpha + A^\alpha$ が (i) の条件をみたすための A^α の条件が書き下せよう。こうして unknown n -vector valued 1-form A^α に
 関する pde $= (\dots, A^\alpha, \dots)$

$$(13) \quad R(A) = 0$$

を解く問題として問題 (i) を捉えることが出来た。 F_S と F_M とは近いので、 F_S と F_M とを適当な diffeomorphism で identify してよく計算に便である。

$R(A)$ を具体的に記述する前に、Embedding theorem を

とくために考へられた 3 つの pde (3), (7), (13) をとく一般

な方法をのべよう。今までのところ、これらはいつも

successive approximation の方法でとかれて居る。先づ最初

に充分近似度の高い近似解から出発して、successive に

より近似度の高い近似解の sequence を作って解に

しゅうめんさせるのである。このとき pde の linear approximation

を使うことになる。(13) の場合で言えば、 A での linear approximation は ~~A を変化する linear pde~~ $R_A(u)$

で $R(A + \varepsilon u) \equiv R(A) + \varepsilon R_A(u) \mod \varepsilon^2$ でま

るものである。(3) の場合には、pde が linear なのでも

linear approximation は (3) と一致する。(7) の場合には $\bar{\Sigma}_{T_0}$ の small deformation になつて居る。(13) の場合には R'_A をかき下すには少し準備が必要。

B のかわりにその Cayley transform を使う方が便利である。これは $\mathbb{C}^n$ の domain

$$(14) \quad Q^+ : \Im m z^n \gg \frac{1}{2} |z'|^2, \quad z' = (z^1, \dots, z^{n-1}).$$

従つて $\bar{S}$ のかわりに Q^+ の boundary CR structure

$$(15) \quad Q : \Im m z^n = \frac{1}{2} |z'|^2,$$

を考えることになる。これからは G は Q^+ の ^{holomorphic} automorphism

(同時に Q の CR automorphism) group である。Reference

point $P_Q = (0)$, $P_{Q^+} = (0, i)$. $\xi = (\xi', \xi^n)^T \in \mathbb{C}^n$ に対して

matrix

$$(16) \quad T(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \xi' & I & 0 \\ \xi^n & i(\xi')^* & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Isotropy group is } H_Q, H_{Q^+}.$$

を考えれば、これは $\mathbb{C}^n$ で parameterize される matrix group $\tilde{\mathcal{H}}$ になつて居る。 $\tilde{\mathcal{H}}$ は $\mathbb{C}^n$ に operate して居る。

$$(17) \quad T(\xi) z = (z' + \xi', z^n + \xi^n + i \langle z', \xi' \rangle)$$

$\mathcal{H} = \{T(\xi); \Im m \xi^n = \frac{1}{2} |\xi'|^2\}$ は $\tilde{\mathcal{H}}$ の subgroup として Q の上は

transitive に operate して居る。 $\mathcal{H}^+ = \{T(\xi); \Im m \xi^n > \frac{1}{2} |\xi'|^2\}$

は multiplicative に closed である。その operation は Q^+ を保存して居る。しかし $\mathcal{H}^+$ のかわりに matrix



$$(18) T(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & & \\ & I & \\ & & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} T(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Q}^+ \text{ and } \lambda > 0$$

の全体を考へれば、これは group になつて居る

$$(19) T(\xi, \lambda) \cdot z = (\sqrt{\lambda}(z' + \xi'), \lambda(z'' + \xi'' + i\langle z', \xi' \rangle))$$

$T^n \mathbb{C}^n$ に operate させると、 $\mathbb{Q}^+$ の上には transitive に operate して居る。上の operation は $(n+1) \times (n+1)$ matrix $\in \mathbb{CP}^n$ の ~~homogeneous~~ ~~projected~~ coordinate $[z]$ に operate させ、 $\mathbb{C}^n \ni z \rightarrow [1, z] \in \mathbb{CP}^n$ として $z \in \mathbb{C}^n$ に operate したものに於て居る。従つて $T(\xi, \lambda)^*$ の全体も $\mathbb{Q}^+$ の automorphism ~~群~~, $H_{\mathbb{Q}}$, と考えられる。實際に計算に見ると、 $H_{\mathbb{Q}} \subseteq H_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ の isotropy group である。

$$(20) H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{C}} \cdot H_{\text{su}}, \quad H_{\text{su}} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix},$$

$u \in \text{special unitary group}$, ~~2次元の特殊ユニタリ群~~

$$H_{\mathbb{C}} = \{ H(\xi); \xi \in \mathbb{Q}^+ \}, \quad H(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & -i\beta^* & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}b \\ 0 & I & \sqrt{\lambda}\beta \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$(21) \operatorname{Im} b = -\frac{\lambda}{2} |\beta|^2, \quad \xi' = \frac{i\lambda}{1+i\lambda b} \beta, \quad \xi'' = \frac{i\lambda}{1+i\lambda b}$$

と分かる。こゝから分かる。

以下 z は $\mathbb{Q}$ の元, ξ は $\mathbb{Q}^+$ の元 ~~の元~~ としよう。projection

$p_{\mathbb{Q}}: G \rightarrow G/H_{\mathbb{Q}}, \quad p_{\mathbb{Q}^+}: G \rightarrow H_{\mathbb{Q}^+}$ は上の decomposition を使えば次の様にかける:

(13)-(14) に注意して、同様に $\tilde{\Sigma}_M, \Omega_M^\alpha$ を作れる。

$$(22) \quad p_Q : \pi \cdot H_Q \supset T(\pi) \cdot H_Q \rightarrow \pi \in Q$$

$$p_{Q^+} : \pi \cdot H_Q = \pi \cdot H_Q \cdot H_{su} \supset T(\pi) H(\xi) H_{su} \rightarrow T(\pi) \xi \in Q^+$$

上の (12) で述べた Σ_B の construction を (22) で与えられた

座標を用いて書いてみる ~~これは~~、これを Σ_Q とすれば、 Σ_Q は

$CT^*(\pi \cdot H_Q)$ の sub-bundle $\tilde{\Sigma}_Q$ の pull-back によって居る

ことがわかる。従って Σ_M の deformation のカウリに $\tilde{\Sigma}_M$ の $\pi \cdot H_Q$ の上での

deformation を考えればよいことになる。 ~~これは~~ p_{Q^+} の image

として考えられた Q^+ の元 $\xi_\# = (\dots, \xi_\#^\alpha, \dots)$ と書く

ことにすれば、 $d\xi_\#^\alpha$ は G の identity element での 1-form に

pull-back したものは ~~これは~~ 1 -form $\downarrow \Omega^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, Ω^α は

$\tilde{\Sigma}_Q$ の base によって居る。 ~~これは~~ $\tilde{\Sigma}_M$ の deformation は

$$(23) \quad \Omega^\alpha + A^\alpha$$

から生成される。ここで A^α は $\pi \cdot H_Q \cong Q \times Q^+$ の上の

unknown 1-form である。従って (23) で生成される sub-bundle

が integrable になるための条件 ~~これは~~ $R(A)$ の ~~これは~~

differential $R'_A(u)$ の variable u も $Q \times Q^+$ の上の 1-form

になる。 $R'_A(u)$ を計算してみると、 A によって定まる differential

operator の sequence の形にはめられることが解る。この

sequence は 次の形の sequence の特別の場合によって居る:

Manifold N の上に complex valued 1-form Ξ^λ , $\lambda \in$ a set of indexes Π ,

が与えられたとせよ。 Ξ^λ は linearly indep. 7" $d\Xi^\lambda = \frac{1}{2} C_{\mu\nu}^\lambda \Xi^\mu \Xi^\nu$.

更に 1st order differential operator X_λ (matrix coef.) が与えられて居るとする。 X_λ は vector space V -valued の function に operate し、その principal part は scalar diff. op. (i.e. diagonal matrix) であるとする。与えられた system $\xi, X_\lambda \in \mathcal{F}$ で現る。 $\wedge^p(\mathcal{F}) \ni$

$$u = \frac{1}{a!} \sum u_{\lambda_1 \dots \lambda_a} \xi^{\lambda_1}_1 \dots \xi^{\lambda_a}_a$$
 の形の $\wedge^p V$ -valued の a -form 全体のつくる vector space とする。

$$D: \wedge^p(\mathcal{F}) \rightarrow \wedge^{p+1}(\mathcal{F})$$

$$\begin{aligned} Du = & \frac{1}{a!} \sum (X_\lambda u_{\lambda_1 \dots \lambda_a}) \xi^{\lambda_1}_1 \dots \xi^{\lambda_a}_a \\ & + \sum u_{\lambda_1 \dots \lambda_a} d(\xi^{\lambda_1}_1 \dots \xi^{\lambda_a}_a). \end{aligned}$$

今問題にて居る $R'_\lambda(u)$ は上の D , $p=1$, の形として居る。其の場合 λ の index set Π は $s=0, 1, \dots, n-1$; $j=1, \dots, \binom{n-1}{s}$ で表される $\frac{2n+n-1}{2}$ 個の元からなる。 ξ^0 は real valued, ξ^j は complex valued として $Q = M$ の pull back になつて居る 1-form τ , $\tau^\alpha = 0$ ($\alpha=0, 1, \dots, n-1$) が CR structure L の定義になつて居る。 $\bar{\xi}^j = \overline{\xi^j}$, $\xi^{[5]} = d\xi^5$.

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y^0} + R_0, \quad X_j = \frac{\partial}{\partial z^j} + \frac{i}{2} \bar{\xi}^j \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y^j} + R_j$$

$$P_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} - \frac{i}{2} \bar{\xi}^j \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y^0} + R_j, \quad P_{[5]} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^5} + R_{[5]},$$

こゝで R_λ は A と L とに depend する, 小さな deformation term である。 $\bar{\xi}_0$ も $\bar{\xi}$ と上の特別の場合になつて居る。