

氏 名	おう かい せん 王 海 泉
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 1783 号
学位授与の日付	平 成 9 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 専 攻
学位論文題目	Decomposition of the Canonical Representation of $W(1) \times \text{End}[m]$ on $\Lambda(m)$ ($\Lambda(m)$ 上の $W(1) \times \text{End}[m]$ の自然表現の分解)
論文調査委員	(主 査) 教 授 平 井 武 教 授 吉 田 敬 之 教 授 渡 辺 信 三

論 文 内 容 の 要 旨

主論文および参考論文において取り扱われている超リー代数とは、1970年代に導入されたもので、通常のリー代数の概念を拡張して、交換関係と同時に反交換関係を取り込んだものである。申請者は、主論文および参考論文において、超リー代数の表現を研究している。ここに於ける研究対象は、いわゆる Cartan 型超リー代数の表現である。より具体的には、次のような問題を取り扱っている。

超リー代数の自然表現をとって、その m 回テンソル積を作り、その既約分解を与えよ、という問題である。この種の問題は、歴史的に見ても古くから研究されてきたものである。例えば、古典的リー群もしくは古典型リー代数、特に一般線形群（一般線形環）の場合に、I. Schur や H. Weyl によって研究されて、周辺への影響をも込めて、大きな成果をもたらした。また、申請者が取り扱っている Cartan 型超リー代数とは、非古典的なリー代数である Cartan 型リー代数の一般化であって、この型の超リー代数の表現論は種々の観点からして興味ある研究対象である。

主論文を含む一連の研究では、4 種類の Cartan 型超リー代数の一つである $W(n)$ を考察している。 $W(n)$ とは、 n 元生成の外積代数 $\Lambda(n)$ の上の超微分全体のなす超リー代数である。この $W(n)$ の $\Lambda(n)$ 上の自然表現を ψ とする。その m 回テンソル積 $(\psi^{\otimes m}, \otimes^m \Lambda(n))$ を既約分解するために、 $\text{End}(\otimes^m \Lambda(n))$ の中での $\psi^{\otimes m}(W(n))$ の交換代数を考える必要がある。この交換代数 C_m を具体的に決定する問題は、申請者の参考論文において西山享助教授（総合人間学部）との共著の形で解答が与えられている。完全に全ての場合を尽くした訳ではないが、次のような興味ある結果になっている。

整数 $1, 2, \dots, m$ の集合を $[m]$ で表し、その上の写像全体を $\text{End}[m]$ とすると、これは自然に半群となり、その中の群元全体は m 次対称群をなす。半群 $\text{End}[m]$ の表現 Φ_m が $\otimes^m \Lambda(n)$ の上に標準的に定義できる。すると、

(*) $\text{End}(\otimes^m \Lambda(n))$ において $\Phi_m(\text{End}[m])$ で生成される代数を $\mathcal{E}_m$ とおく。このとき、交換代数 C_m は、 $m \leq n$ または $n = 1$ の条件の下では、代数 $\mathcal{E}_m$ と一致する。

上記の結果を踏まえて、主論文では、 $n = 1$ の場合ではあるが、非常に興味ある結果が得られている。そして、一般の n の場合に現れるであろう現象が全て、萌芽ではあるが、現れていると思われる。その意味でも重要な結果である。主要な結果をまとめると、次のようになる。

1. 超リー代数 $W(n)$ の既約表現と、代数 $\mathfrak{E}_m$ の（従って、半群 $\text{End}[m]$ の）既約表現との間の 1-1 対応が与えられている。これは、Weyl-Howe 型の対応と呼び得る。

2. 既約ではないが、分解不能 (indecomposable) である表現が、2 つの代数 $W(n)$, $\text{End}[m]$ の双方に現れる。これらを種々調べて、分解不能表現の間の対応に関する詳しい結果が与えられている。

ここで、強調すべきは、取り扱われている 2 つの代数、 $W(n)$ と $\text{End}[m]$ とは、いずれも半単純ではなく、分解不能表現が自然に現れてきていること、従って、既約表現だけでは、状況を正確には記述できないことである。これが、取り扱う問題を非常に複雑にしている。

論文審査の結果の要旨

申請論文に於いて取り扱われる超リー代数は 1970 年代後半に、数学、理論物理学の双方において、導入されたものである。これは、リー代数の概念を拡張して、交換関係と同時に反交換関係をも取り込んだ代数である。超リー代数の分類は、V. G. Kac により完成され、同時に超リー代数の表現論も始まった。申請者の業績は、この表現論に関するものである。

表現論では、先ず、有限次元既約表現が研究された。特に、最高ウェイト理論と指標公式の研究は多くの研究者の努力で、かなりの結果の集積がある。しかし、テンソル積表現とか、無限次元の表現については、まだわずかの事しか分かっていない。

本申請者は、申請論文に於いて、いわゆる Cartan 型超リー代数の表現を研究している。この代数の自然表現をとって、その m 回テンソル積を作り、その既約分解を与えようという問題を主として取り扱っている。そこでは、Cartan 型超リー代数 $W(n)$, $S(n)$, $H(n)$ 等の中の最も基本的な系列である $W(n)$ の表現を考察している。この型の超リー代数の表現論は種々の観点からして興味ある研究対象である。

$W(n)$ の $\Lambda(n)$ 上の自然表現 ϕ の m 回テンソル積 ($\phi^{\otimes m}$, $\otimes^m \Lambda(n)$) を分解するために、 $\text{End}(\otimes^m \Lambda(n))$ の中での $\phi^{\otimes m}(W(n))$ の交換代数を考える必要がある。この交換代数 C_m は参考論文において、決定されている。

(*) $\otimes^m \Lambda(n)$ 上の $\text{End}[m]$ の自然な表現を Φ_m とし、 $\Phi_m(\text{End}[m])$ が $\text{End}(\otimes^m \Lambda(n))$ において生成する代数を $\mathfrak{E}_m$ とするとき、交換代数 C_m は、 $m \leq n$ または $n = 1$ の条件の下では、代数 $\mathfrak{E}_m$ と一致する。

これを踏まえて、主論文では、 $n = 1$ の場合ではあるが、非常に興味ある結果が得られている。そして、一般の n の場合に現れるであろう現象が全て、萌芽ではあるが、現れていると思われる。その意味でも重要な結果である。主要な結果は、次の二つにまとめられる。

1. 超リー代数 $W(n)$ の既約表現と、代数 $\mathfrak{E}_m$ の（従って、半群 $\text{End}[m]$ の）既約表現との間の 1-1 対応が与えられている。これは、古典的な $GL(n)$ と m 次対称群の場合の一般化であり、Weyl-Howe 型の対応と呼び得る。

2. 既約ではないが、分解不能 (indecomposable) である表現が、2 つの代数 $W(n)$, $\text{End}[m]$ の双方

に現れる。これらを種々調べて、分解不能表現の間の対応に関する詳しい結果が与えられている。これは n が一般の場合に対する状況を類推させることもあり、重要な貢献である。

申請論文で取り扱われている 2 つの代数、超リー代数 $W(n)$ と半群 $\text{End}[m]$ とは、いずれも半単純ではなく、自然に、既約ではない分解不能表現が現れてくる。これらの表現の交錯する状況は極めて複雑であり、また、どのように記述すれば良いかも明らかではない。このように、問題を複雑にしている重要なポイントを整理すると、次のようになる。

(1) 分解不能表現が自然にかつ本質的に現れる。従って、既約表現だけでは、状況を正確には記述できない。

(2) 他方、分解不能表現による表現の直和分解は、存在するとは限らない。従って、表現の組成列 (composition series) を用いる訳だが、ここには記述の多様性がある。

申請者が、主論文を含む一連の研究で、こうした未開拓の困難な分野において、先駆的業績を上げていることは、高く評価される。また、この方面の研究は、将来的には大きな発展が望まれるところであり、広い範囲の未開拓分野が残されている。申請者の研究はこの方面への進展に対する大きな貢献である。

よって、本申請論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める。

主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心として、これに関連した研究分野についても試問した結果、合格と認めた。