

Variation Diminishing Spline

による多変数関数近似

青山学院大 理工 馬渡鎮夫

§ 1. はじめに

多変数関数を各変数に関する近似式の何らかの積によって近似する場合、計算量を実際上実行可能な範囲内までに減らすよう工夫しなければならない。この問題解決への試みには確率論的な手法 ([6], [7], [11], [12]) と決定論的な手法があるけれども、可能な限り後者を採用する方が望ましいことは明らかである。上の問題解決への決定論的試みは、今までのところ、分配系における恒等写像の *maximal decomposition* による手法 ([5]) と *Quasiinterpolant* による手法 ([10]) の2つによって代表されるように思われる。これらは近似論の種々の箇所で局所的に活用可能であるという意味で理論的には重要であるが、現在のまゝの形では、ごく低次元（たとえば3次元以下）かまたは特殊な場合にしかその偉力を発揮しない。

本論で述べる *variation diminishing spline* による近似法は，下に述べるような意味で，上記の問題解決に関する従来の決定論的試みを一歩進めたものである。

(i) 関数値の近似につつては，任意に与えられた点での近似計算に必要な *data point* の数は，*step size* の大きさにみまわらず，高々 ν 個 (ν は変数の数) である。

(ii) 関数値，第1階偏導関数値，---，第 $\nu-2$ 階偏導関数値 ($\nu \geq 4$ かつ偶数) までは同時に近似する式の任意に与えられた点での計算につつては，*step size* の大きさにみまわらず，高々 ν 個の *data point* が必要である。

(iii) 等間隔の場合の誤差は，*step size* h の2乗の order $O(h^2)$ である。

§ 2. General Remarks

$I = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ は ν 次元の *Cube* とし， I の上で定義された実数値連続関数の全体より成る *normed space* を $C(I)$ ，その *subspace* を F ， F の有限次元部分空間を S ，その *basis* を $\{g_i\}_{i=1}^d$ ， F 上の *bounded linear functional* を $\{\lambda_i\}_{i=1}^d$ とし，任意の $f \in F$ を

$$(2.1) \quad L(f) = \sum_{i=1}^d \lambda_i(f) g_i$$

によって近似するものとする。

このとき，計算量を少なくする問題に関して， $L(f)$ を満たしてほしい条件として次のものがあげられる。

- (I) $\|f - L(f)\|$ が小さい。
- (II) I 上で必要とされる関数値，導関数値の総数は少ない。
- (III) (2.1) の右辺の数値計算は容易である。
- (IV) 各 λ_i, g_i は小さい support $\text{Supp}(\lambda_i), \text{Supp}(g_i)$ を持ち，各 $\text{Supp}(\lambda_i)$ は有限集合であって，

$$\text{Supp}(\lambda_i) \subset \text{Supp}(g_i) \quad \text{for } i=1, 2, \dots, d.$$
- (V) 次の関係式が成り立つ。

$$\lambda_i(g_j) = \delta_{ij} \quad \text{for } i, j = 1, 2, \dots, d.$$

(I), (II), (III) の条件は明白である。(IV) が満たされると与えられた点 x を support に含まない g_i については計算する必要がないので，それだけ計算量が減る。(V) が満たされると，(2.1) の L は *idempotent* となり，精度が高まり誤差解析は容易となる。これらの条件のうち，できるだけ多くが満たされるように $\{\lambda_i\}_{i=1}^d, \{g_i\}_{i=1}^d$ を定める。この要求をある程度満たすものとして，C. de Boor and G.J. Fix [10] の *Quasiinterpolant* がある。しかし，この手法は一般には各 $\lambda_i(f)$ の計算に各種の偏導関数値を必要とし，ごく低次元の場合（たとえば3次元以下）を除いて，実際に使う近

似式としてはあまり得策ではない。

上記の (I) ~ (V) をすべて満たす近似式は外に見あたらず，しかも作成が困難なので，こゝでは (V) を無視し，残りの4つの条件を満たす近似法について述べる。そのために必要な概念や基本的な関係式を，§3, §4 に前もって述べる。

§3. Variation Diminishing Operator

$x_1, x_2, \dots, x_r$ は任意の実数列とし，その符号変化の数を $v(x_i)_{i=1}^r$ と書くことにする。この際 0 なる x_i は無視する。

$$0 \leq x_1 < \dots < x_r \leq 1 \quad (r \text{ は任意の自然数})$$

なる分割 $\pi_r = (x_i)_{i=1}^r$ の全体を Δ とし，任意の $f \in C[0,1]$ の $[0,1]$ における符号変化の数を次の式によって定義する。

$$(3.1) \quad v(f) = \sup_{\pi_r \in \Delta} v(f(x_i))_{i=1}^r$$

定義 2.1 (11)

$C[0,1]$ から自分自身への operator L が次の3つの性質を持つとき，これを variation diminishing operator とする。

(i) L は $C[0,1]$ において linear である。

(ii) $L(1) = 1$, $L(x) = x$.

(iii) $v(L(f)) \leq v(f)$ for all $f \in C[0,1]$.

L が variation diminishing operator であるとき，注

意の直線 $y = a + bx$ と注意の $f \in C[0, 1]$ に対して,

$$(3.2) \quad v(L(f)(x) - a - bx) \leq v(f(x) - a - bx).$$

すなわち, この L は直線との交差回数を増加しないような近似法である. このことから, L は単調性を保存する. また L は全変動をも減少させるが, 2 次関数は再生しない.

定理 2. 1 ([1])

variation diminishing operator L の中で, $L(x^2) = x^2$ となるものは恒等写像に限る.

定理 2. 2 ([1])

(i) 関数 $g(r) = v(f(x) - r)$ ($-\infty < r < \infty$) は, $f \in C[0, 1]$

が有界変動である場合に限って可積分である.

(ii) このとき, f の全変動を $T(f)$ とすると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(f(x) - r) dr = T(f).$$

(iii) L が variation diminishing operator ならば,

$$T(L(f)) \leq T(f).$$

§ 4. Normalized B-spline

k は自然数, 閉区間 $J = (a, b)$ (有限または無限) の分割 $\pi = (x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ が次の条件をすべて満たすとき, これを k -extended partition という.

- (i) $x_i \leq x_{i+1}$ for all i ,
 (ii) $\lim_{i \rightarrow -\infty} x_i = a$, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = b$,
 (iii) $d_i = \overline{\{j; x_j = x_i\}}$ とすれば, $d_i \leq k$ for all i .

$J=(a,b)$ の k -extended partition π に関し, 次の条件をすべて満たす J 上の実数関数の linear space を $C_\pi^{(k)}$ と記す.

- (i) $f \in C_\pi^{(k)}(x_i, x_{i+1})$ for all i such that $(x_i, x_{i+1}) \neq \emptyset$.
 (ii) すべての i と $r < k$ に対して, 有限な $f^{(r)}(x_i-)$ および $f^{(r)}(x_{i+1}+)$ が存在する.
 (iii) すべての i と $r < k - d_i$ に対して, $f^{(r)}(x_{i+1}+) = f^{(r)}(x_i-)$.

π 上の order k (すなわち degree $< k$) の多項式 spline の全体より成る linear space を S_π^* とすると, S_π^* は $C_\pi^{(k)}$ の linear subspace である.

$$(4.1) \quad g_k(s; x) = (s-x)_+^{k-1} = \begin{cases} (s-x)^{k-1} & \text{if } s \geq x, \\ 0 & \text{if } s < x. \end{cases}$$

(4.2) $N_{i,k}(x) = (x_{i+k} - x_i) g_k(x_i, \dots, x_{i+k})^{(x)}$ for all i とおくとき, 各 $N_{i,k}(x)$ を normalized B-spline とする. 定義より, すべての i に対して

$$(4.3) \quad N_{i,k}(x) \begin{cases} = 0 & \text{if } x \notin [x_i, x_{i+k}], \\ > 0 & \text{if } x \in (x_i, x_{i+k}). \end{cases}$$

H. B. Curry and I. J. Schoenberg [2] より, 注意の

$f \in S_{\mathbb{N}}^k$ に対して, 一意的な実数列 $(a_i(f))_{i=-\infty}^{\infty}$ が存在して

$$(4.4) \quad f(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i(f) N_{i,k}(x)$$

C. de Bear and G. J. Fix [10] より, 任意の実数 z に対して, 次の関係式が成り立つ. 任意の $x \in J$ に対して

$$(4.5) \quad (x-z)^{k-1} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_{i+1}-z)(x_{i+2}-z) \cdots (x_{i+k}-z) N_{i,k}(x).$$

両辺を z について展開し, z の係数を比較して次式を得る.

$$(4.6) \quad \sum_i N_{i,k}(x) = 1,$$

$$(4.7) \quad \sum_i \xi_{i,k} N_{i,k}(x) = x,$$

$$(4.8) \quad \sum_i \xi_{i,k}^{(2)} N_{i,k}(x) = x^2.$$

ただし, すべての i に対して, $\xi_{i,k}, \xi_{i,k}^{(2)}$ は次の式によって定義する.

$$(4.9) \quad \xi_{i,k} = \frac{1}{k-1} (x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_{i+k-1}).$$

$$(4.10) \quad \xi_{i,k}^{(2)} = \frac{1}{\binom{k-1}{2}} \sum_{i+1 \leq r < s \leq i+k-1} x_r x_s.$$

§ 5. Variation Diminishing Spline

k は § 4 のそれと同じ自然数, n は任意の自然数とし,

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = x_1 = \dots = x_{n+k-1} = 0 \\ x_k = \frac{1}{n} \\ \vdots \\ x_{n+k-2} = \frac{n-1}{n} \\ x_{n+k-1} = x_{n+k} = \dots = x_{n+2k-2} = 1 \end{array} \right.$$

とすると, $x_0, x_1, \dots, x_{n+2k-2}$ は $I = [0, 1]$ 上の k -*extended partition* である. $l = n+k-2$ とすると, $i = 0, 1, \dots, l$ に対し, I 上で § 4 の関係式 (4.3), (4.6), (4.7), (4.8) がすべて成り立つ. 任意の $f \in C(I)$ に対して

$$(5.2) \quad L(f) = \sum_{j=0}^l f(\xi_{j,k}) N_{j,k}(x)$$

とおく. S. Karlin [4] より,

$$(5.3) \quad v(L(f)) \leq v(f(\xi_{j,k}))_{j=0}^l \leq v(f).$$

従って, (5.2) の L は § 3 の意味で *variation diminishing operator* である. (5.2) の右辺を *variation diminishing spline* とする.

$x_j \leq x \leq x_{j+1}$ のとき, $N_{j-k+1,k}(x), N_{j-k+2,k}(x), \dots, N_{j,k}(x)$ を除くすべての $N_{j,k}(x)$ は 0 である. つまり, 高々 k 個の

$N_{j,k}(x)$ のうち 0 でない。

$k-1 \leq j \leq n$ のとき, $\xi_{j,k} = x_j + \frac{k}{2n}$ であり, k が偶数のとき, $\xi_{j,k}$ はどれかの x_i と一致して好都合であるから, 以後本節では常に k は偶数であると仮定する。

定理 2.1 より, (5.2) は x を再生する。そこで,

$$(5.4) \quad E_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^n \xi_{j,k}^2 N_{j,k}(x) - x^2$$

とおくと, M. Marsden and I. J. Schaeffer [3] より, $k \leq n+2$ のとき次の誤差評価式を得る。

$$(5.5) \quad 0 \leq E_{n,k}(x) \leq \max\{3, k\} / (12n^2).$$

これを利用して次の定理を得る。

定理 5.1

$2 \leq k \leq n+2$, $k_p = \max\{3, k-p\}$ とする。

(i) 任意の $f \in C(I)$, $x \in [0, 1]$ に對し,

$$(5.6) \quad |f(x) - L(f)(x)| \leq (1 + \sqrt{\frac{k_p}{12}}) \omega(f; \frac{1}{n}).$$

(ii) 任意の $p=1, 2, \dots, k-2$, $f \in C^{p+2}(I)$, $x \in [\frac{k-2}{n}, 1 - \frac{k-2}{n}]$ に對し,

$$(5.7) \quad |D^p f(x) - D^p L(f)(x)| \leq (1 + \sqrt{\frac{k_p}{12}}) \omega(D^p f; \frac{1}{n}) + K_p \|f^{(p+2)}\|_\infty / n^2.$$

ただし, $\omega(D^p f; \frac{1}{n})$ は $D^p f$ の modulus of continuity で,

$$K_p = \left(\sum_{m=0}^p C_m \left| \frac{p}{2} - m \right|^{p+2} \right) / (p+2)! .$$

証明

(i) の場合は, [3] による. 先ず, 次の不等式が成り立つ.

$$|f(x) - L(f)(x)| \leq \sum_{j=0}^d |f(x) - f(\xi_{j,*})| N_{j,*}(x).$$

ところで, 不等式 $w(f; \lambda\delta) \leq (\lambda+1)w(f; \delta)$ ($\lambda, \delta > 0$) に
おいて, $\lambda = |x - \xi_{j,*}|/\delta$ とおくと,

$$|f(x) - f(\xi_{j,*})| \leq w(f; |x - \xi_{j,*}|) \leq (|x - \xi_{j,*}|/\delta + 1)w(f; \delta),$$

$$|f(x) - L(f)(x)| \leq w(f; \delta) \left\{ \frac{1}{\delta} \sum_{j=0}^d |x - \xi_{j,*}| N_{j,*}(x) + 1 \right\}.$$

一方, Cauchy-Schwarz の不等式と (4.7) より,

$$\left(\sum_{j=0}^d |x - \xi_{j,*}| N_{j,*}(x) \right)^2 \leq \sum_{j=0}^d (x - \xi_{j,*})^2 N_{j,*}(x) = E_{n,*}(x)$$

$$\therefore |f(x) - L(f)(x)| \leq w(f; \delta) \left\{ \frac{1}{\delta} \sqrt{E_{n,*}(x)} + 1 \right\}.$$

$\delta = \frac{1}{n}$ とおくと, (5.5) より, 任意の $x \in [0, 1]$ に對して

$$|f(x) - L(f)(x)| \leq w(f; \frac{1}{n}) \{ \sqrt{\frac{K_0}{12}} + 1 \}.$$

次に, (ii) の場合を考える. $n = \frac{1}{n}$ とし,

$$A_i^{(n)} = f(\xi_{i,*}) \quad (i=0, 1, \dots, d),$$

$$(5.8) \quad A_i^{(p)} = (k-p)(A_i^{(p-1)} - A_{i-1}^{(p-1)}) / (x_{i+k-p} - x_i) \text{ if } i \geq p$$

と表くと,

$$(5.9) \quad D^p L(f)(x) = \sum_{j=p}^n A_j^{(p)} N_{j, k-p}(x).$$

ここで, $k+p-2 \leq j \leq n$ の場合には,

$$A_j^{(p)} = \frac{1}{h^p} \sum_{m=0}^p C_m (-1)^m A_{j-m}^{(0)},$$

$$\frac{1}{p+1} (\xi_{j,k} + \xi_{j-1,k} + \dots + \xi_{j-p,k}) = \xi_{j,k-p}.$$

点 $\xi_{j,k-p}$ において f を Taylor 展開すると

$$\xi_{j-m,k} - \xi_{j,k-p} = \left(\frac{p}{2} - m\right) h \text{ if } k+p-2 \leq j \leq n.$$

$$f(\xi_{j-m,k}) = \sum_{i=0}^{p+1} \frac{1}{i!} \left\{ \left(\frac{p}{2} - m\right) h \right\}^i f^{(i)}(\xi_{j,k-p})$$

$$+ \frac{1}{(p+2)!} \left\{ \left(\frac{p}{2} - m\right) h \right\}^{p+2} f^{(p+2)}(\eta_{j,k-p}^{(m)}).$$

ここで, $\eta_{j,k-p}^{(m)}$ は $\xi_{j-m,k}$ と $\xi_{j,k-p}$ の中間にある実数である。

$$\sum_{m=0}^p C_m (-1)^m A_{j-m}^{(0)} = \sum_{m=0}^p C_m (-1)^m f(\xi_{j-m,k})$$

$$= \sum_{i=0}^{p+1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(\xi_{j,k-p}) \left\{ \sum_{m=0}^p C_m (-1)^m \left(\frac{p}{2} - m\right)^i \right\}$$

$$+ \frac{p^{p+2}}{(p+2)!} \sum_{m=0}^p {}_p C_m (-1)^m \left(\frac{p}{2} - m\right)^{p+2} f^{(p+2)}(\eta_{j, \frac{p}{2}-p}^{(m)}).$$

このとき、次の関係式が成り立つ。

$$(5.10) \quad \sum_{m=0}^p {}_p C_m (-1)^m \left(\frac{p}{2} - m\right)^i = \begin{cases} p! & \text{if } i = p, \\ 0 & \text{if } i < p. \end{cases}$$

これを p に関する数学的帰納法によって示す。まず、 $p=1$ のときは明らかに成り立つ。(5.10)が $p \leq g$ に対して成り立つことを仮定すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{g+1} {}_{g+1} C_m (-1)^m \left(\frac{g+1}{2} - m\right)^i \\ &= \sum_{m=0}^g {}_g C_m (-1)^m \left(\frac{g+1}{2} - m\right)^i + \sum_{m=1}^{g+1} {}_g C_{m-1} (-1)^m \left(\frac{g+1}{2} - m\right)^i \\ &= \sum_{m=0}^g {}_g C_m (-1)^m \left\{ \left(\frac{g}{2} - m\right) + \frac{1}{2} \right\}^i - \sum_{m=0}^g {}_g C_m (-1)^m \left\{ \left(\frac{g}{2} - m\right) - \frac{1}{2} \right\}^i. \end{aligned}$$

これは $i \leq g$ のとき 0 である。 $i = g+1$ のときは、最後の式に於て、

$$\left\{ \left(\frac{g}{2} - m\right) + \frac{1}{2} \right\}^i, \quad \left\{ \left(\frac{g}{2} - m\right) - \frac{1}{2} \right\}^i$$

を展開して $(g+1)!$ を得る。故に、(5.10)が成り立つ。

また、(5.10)の左辺は次のようにも書ける。

$$(5.11) \quad \sum_{m=0}^p {}_p C_m (-1)^m \left(\frac{p}{2} - m\right)^i = \{1 + (-1)^{p+i}\} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} {}_p C_m \left(\frac{p}{2} - m\right)^i.$$

従って, $i = p+1$ のとき, (5.11) は 0 となる.

以上より, $k+p-2 \leq j \leq n$ のとき,

$$(5.12) \quad A_j^{(p)} = f^{(p)}(\xi_{j,k-p}) + \frac{k^2}{(p+2)!} \sum_{m=0}^p C_m (-1)^m \left(\frac{p}{2} - m\right)^{p+2} f^{(p+2)}(\eta_{j,k-p}^{(m)}).$$

一方, $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ とすると, (5.9) に於いて

$$N_{j-(k-p)+1,k-p}(x), N_{j-(k-p)+2,k-p}(x), \dots, N_{j,k-p}(x)$$

のいずれも恒等的に 0 ではない. このことより,

$$j-(k-p)+1 \geq k+p-2 \implies j \geq (k-2) + (k-1),$$

$$n+1 = n-(k-2) + (k-1)$$

に注意すると,

$$\frac{k-2}{n} \leq x \leq 1 - \frac{k-2}{n}$$

のとき, (5.9) の各 $A_j^{(p)}$ は (5.12) であらわされるとして一般性を失わない. 故に, $p=0$ の場合と同様の推論をして (5.7) を得る.

Q.E.D.

$p=1, 2, \dots, k-2$ のとき, $D^p L(f)(x)$ の実際の計算は (5.9) よりも次の計算の方が良い.

$$(5.13) \quad D^p L(f)(x) = \sum_{j=0}^k f(\xi_{j,k}) D^p N_{j,k}(x).$$

各 $D^p N_{j,k}(x)$ の計算は, C. de Boor [8] の方法を使えば安定である. 従って, variation diminishing spline は,

関数値, 導関数値, 高階導関数値の計算に利用できる.

なお, (5.2) の L は *positive linear operator* でもある.
従って, 次の定理を得る.

定理 5. 2

$2 \leq k \leq n+2$ とすると,

(i) 注意の $f \in C^2(I)$, $x \in [0, 1]$ に対して,

$$(5.14) \quad |f(x) - L(f)(x)| \leq 2(k-1)\|f''\|_{\infty}/n^2.$$

(ii) 注意の $p=1, 2, \dots, k-2$, $f \in C^{p+2}(I)$, $x \in [\frac{k-2}{n}, 1 - \frac{k-2}{n}]$ に対して,
定理 5.1 の K_p により,

$$(5.15) \quad |D^p f(x) - D^p L(f)(x)| \leq (2k-2+K_p)\|f^{(p+2)}\|_{\infty}/n^2.$$

証明

$$\alpha_{n,k}^2 = \frac{k-1}{n^2}$$

とすると, R.A. DeVore [9] より,

$$|f(x) - L(f)(x)| \leq 2\alpha_{n,k} \omega(f'; \alpha_{n,k}).$$

$$\therefore |f(x) - L(f)(x)| \leq 2(k-1)\|f''\|_{\infty}/n^2.$$

$p=1, 2, \dots, k-2$ のときは, (5.12) と $p=0$ の場合と同様の
の推論により (5.15) を得る.

Q. E. D.

§6. Variation Diminishing Spline による多変数

関数近似

$I = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ は ν 次元 Cube とし, 各変数について (5.5) で述べた *variation diminishing spline* を作り, これらの *tensor product* をとって, I 上で ℓ 回連続的に微分可能な実数値関数 $f \in C^\ell(I)$ の近似式を作る.

$$(6.1) \quad L(f)(y) = \sum_{j_1=0}^{\ell_1} \sum_{j_2=0}^{\ell_2} \cdots \sum_{j_\nu=0}^{\ell_\nu} f(\xi_{j_1, \ell_1}, \xi_{j_2, \ell_2}, \dots, \xi_{j_\nu, \ell_\nu}) N_{j_1, \ell_1}(y_1) \cdots N_{j_\nu, \ell_\nu}(y_\nu)$$

右辺は *step size* の大きさに依らず, 高々 ℓ^ν 個の π が必要ではなく, $\ell \geq 3$ のとき $\ell-2$ 回連続的に微分可能である. 従って, 関数値の π が必要ならば $\ell=2$ とすると, 注意に与えられた点での計算に関し, 高々 2^ν 個の *data point* が必要である. また, 各変数について $\ell-2$ 階の偏導関数まで近似したいときは, $\ell \geq 4$ かつ偶数として, 注意に与えられた点での計算に関し, 高々 ℓ^ν 個の *data point* が必要である.

(6.1) の誤差評価式として, (5.6), (5.14) に対応するものがそれぞれ作られるが, ここでは後者の π を述べる.

第 ν 変数に関する (5.2) の L を L_ν , $C^*(I)$ 上の恒等写像を E とし, $R_\nu = E - L_\nu$ とおくと, $C^*(I)$ 上の ℓ 階 norm に関し,

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \|L_\nu\| &= 1 \quad \text{for } \nu = 1, 2, \dots, \nu. \\ \|R_\nu(f)\|_\infty &\leq 2(k-1) \|D_\nu^2 f\|_\infty / n^2 \end{aligned}$$

定理 6.1

任意の $p = 0, 1, \dots, k-2$, $f \in C^{p+2}(I)$ に対して,

$$(6.3) \quad |D_i^p f(y) - D_i^p L(f)(y)| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{\alpha=1}^p (2k-2 + \bar{K}_\alpha) \|D_\alpha^2 D_i^p f\|_\infty + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

ただし, $p=0$ ならば $y \in I$, $p \geq 1$ ならば $y \in [\frac{k-2}{n}, 1 - \frac{k-2}{n}] \times \dots \times [\frac{k-2}{n}, 1 - \frac{k-2}{n}] (\subset I)$ であり, $\bar{K}_i = K_p$, 他は $\bar{K}_\alpha = K_0$.

証明

$$(6.4) \quad E = \prod_{i=1}^p L_i + \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha \prod_{i=1, i \neq \alpha}^p L_i + \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq p} R_\alpha R_\beta \prod_{i=1, i \neq \alpha, \beta}^p L_i + \dots + \prod_{i=1}^p R_i.$$

$$L = \prod_{i=1}^p L_i$$

$$\|R_\alpha R_\beta f\|_\infty \leq (2k-2) \|D_\alpha^2 R_\beta f\|_\infty / n^2 \leq (2k-2)^2 \|D_\beta^2 (D_\alpha^2 f)\|_\infty / n^4.$$

(6.4) を第 i 変数について偏微分すると, 右辺にのみ添字 i であるものは D_i^p がつく. これらのことより, (6.2), (5.12) より, (6.3) が従う.

Q. E. D.

(6.1) の $L(f)$ が (3.2) のような *shape-preserving* な性質を持つかどうかは明らかではないが, 少なくとも次の意味での単調性は保存する.

定理 6.2

$f \in C^1(I)$ が各変数について単調ならば, $L(f)$ も同じ意味で単調である.

証明

変数 y_1 について示す. 他の変数についても同様である.

$f(\xi_{j_1, k}, \xi_{j_2, k}, \dots, \xi_{j_\nu, k})$ を単に $f(j_1, j_2, \dots, j_\nu)$ と書くと,

$$D_\nu L(f)(y) = \sum_{j_1=0}^{l_1} \sum_{j_2=0}^{l_2} \dots \sum_{j_\nu=1}^{l_\nu} g(j_1, j_2, \dots, j_\nu) N_{j_1, k}(y_1) N_{j_2, k}(y_2) \dots N_{j_\nu, k}(y_\nu)$$

をさし,

$$g(j_1, j_2, \dots, j_\nu) = \frac{k-1}{x_{j_\nu+k-1} - x_{j_\nu}} \left\{ f(j_1, \dots, j_{\nu-1}, j_\nu) - f(j_1, \dots, j_{\nu-1}, j_\nu - 1) \right\}.$$

とすると,

$$g(j_1, j_2, \dots, j_\nu) = \frac{(k-1)(\xi_{j_\nu, k} - \xi_{j_\nu-1, k})}{(x_{j_\nu+k-1} - x_{j_\nu})} \cdot D_\nu f(j_1, \dots, j_{\nu-1}, y_\nu),$$

$$y_\nu \in [\xi_{j_\nu-1, k}, \xi_{j_\nu, k}].$$

仮定より, $g(j_1, \dots, j_\nu) \geq 0$ が成り立つから,

$$D_\nu L(f)(y) \geq 0.$$

Q.E.D.

§ 7. 数値実験

近似式 (5.2), (6.1) について実際に計算した. 両者の計算はあつて, $n=32$ すなわち *step size* を $h=2^{-5}$ としたので, 誤差は $h^2=2^{-10}$ の order つまり有効3桁ある筈である. 結果は次のとおり良好である. ここで, $k=4$ であり使用機

種はTOSBAC 3400である。

〔実験1〕

(7.1) 被近似関数; $f(x) = e^x$ ($0 \leq x \leq 1$) .

出力点; $x_i = (3i-0.5)/8$ ($i=1, 2, \dots, 8$)

目的; $f(x_i), f'(x_i), f''(x_i), f'''(x_i)$ がすべて n の order で近似できるかどうか調べる。

結果;

i	真 値	$L(f)(x_i)$ の値	$DL(f)(x_i)$ の値	$D^2L(f)(x_i)$ の値	$D^3L(f)(x_i)$ の値
1	1.081 2578	1.081 4338	1.081 4338	1.081 4778	1.081 3913
2	1.187 5294	1.187 7227	1.187 7227	1.187 7710	1.187 6736
3	1.304 2459	1.304 4582	1.304 4582	1.304 5112	1.304 4052
4	1.432 4339	1.432 6670	1.432 6670	1.432 7253	1.432 6096
5	1.573 2208	1.573 4769	1.573 4769	1.573 5409	1.573 4124
6	1.727 8451	1.728 1263	1.728 1263	1.728 1966	1.728 0593
7	1.897 6666	1.897 9754	1.897 9754	1.898 0526	1.897 8977
8	2.084 1790	2.084 5182	2.084 5182	2.084 6030	2.084 4354

注 意; (1) 上の結果は, 実際に計算して得られたもののごく一部で, 残りの計算値も定理5.1の仮定を満たすみぞり同じ有効桁数を持つ。

(2) 上の結果および定理5.1の証明より, $D^3L(f)$ が定義される点 x での精度は他と同じである。

〔実験2〕

(7.2) 被近似関数; $f(y_1, \dots, y_N) = (1 + y_1 + \dots + y_N + y_1 \dots y_N)^4$ 出力点; $\overline{y} = (0.484375, \dots, 0.484375)$

目的; $N=1, 2, \dots, 10$ としたとき, 誤差の
order であるかどうか, また, どのくらい
 の時間が必要であるかを調べる。

結果;

N	真 値	$L(f(\overline{y}))$ の計算値	所要時間
1	$0.1502\ 3192 \times 10^2$	$0.1505\ 3480 \times 10^2$	} 計48分43秒 ^(*)
2	$0.2356\ 9428 \times 10^2$	$0.2361\ 1235 \times 10^2$	
3	$0.4340\ 5714 \times 10^2$	$0.4346\ 4580 \times 10^2$	
4	$0.8019\ 7979 \times 10^2$	$0.8028\ 4770 \times 10^2$	} 計 2分 1秒
5	$0.1414\ 2951 \times 10^3$	$0.1415\ 5881 \times 10^3$	
6	$0.2359\ 2509 \times 10^3$	$0.2361\ 1484 \times 10^3$	} 計50分56秒
7	$0.3737\ 4785 \times 10^3$	$0.3740\ 1904 \times 10^3$	
8	$0.5662\ 1047 \times 10^3$	$0.5665\ 8686 \times 10^3$	
9	$0.8259\ 0911 \times 10^3$	$0.8264\ 1699 \times 10^3$	
10	$0.1166\ 7501 \times 10^4$	$0.1167\ 4163 \times 10^4$	

注 意; (*) の時間を不合理であることの原因は,
 プログラムの拙さによる。少しの工夫で,
 これはもっと少なくて済むであろう。

§ 8. おわりに

以上より *variation diminishing spline* による多変数関数近似の有効な点が判明した。 $2^{20} = 4^{10} \approx 10^6$ であり, 10^6 個の *data point* についての直則計算は, § 7, [実験2] でみたとおり, 現在の中型計算機でも大して困難ではなないので, (6.1) は, 関数値に関して少なくとも 20 次元まで ($k=2$), 第1および第2階偏導関数値に関して少なくとも 10 次元まで ($k=4$), それらの近似式として十分実用に耐えられる。

次元数をもっと大きくとき (たとえば $N \geq 21$ のとき), 上のような *tensor product* 法による近似式で計算量を決定論的に減らすことは非常に困難である。あくまで決定論的立場に留まるならば, *tensor product* 法ではなにか新しい近似法を考え出す必要があると思われる。これは今後に残された大きな課題である。

最後に, 本論をまとめるときにあたって, 一松信先生をはじめ数理解析研究所の多くの方々に御援助をいただいた。心より感謝致します。

参 考 文 献

- [1]. I.J. Schoenberg, *On variation diminishing approximation methods*, In

"On Numerical Approximation" (R.E. Langer, ed) pp249-274, Univ. of Wisconsin Press, 1959.

[2] H.B. Curry and I.J. Schoenberg, On Pólya frequency functions IV: The fundamental spline functions and their limits. J. Analyse Math. 17 (1966), pp71-107.

[3] M. Marsden and I.J. Schoenberg, On variation diminishing spline approximation methods, Mathematica (Cluj) 31 (1966), pp61-82.

[4] S. Karlin, "Total Positivity" Vol. I, Stanford University Press (1968).

[5] W.J. Gordon, Distributive lattices and the approximation of multivariate functions, "Approximation with Special Emphasis on Splines" (I.J. Schoenberg ed) pp223-277, Academic Press (1969).

[6] T. Tsuda and K. Ichida, Nonlinear Interpolation of Multivariable Functions by the Monte Carlo Method, J. ACM Vol. 17 (1970), pp420-425.

[7] T. Tsuda, Numerical Differentiation ^(of Functions) of Very Many Variables, Numer. Math. 18 (1972), pp327-335.

[8] C. de Boor, On Calculating with B-splines, J. Approx. Theory Vol. 6 (1972), pp50-62.

[9] R.A. DeVore, The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators, Lecture Notes in Mathematics Vol. 293, Springer-Verlag, (1972).

[10] C. de Boor and G.J. Fix, Spline Approximation by Quasiinterpolants, J. Approximation Theory Vol. 8 (1973), pp19-45.

[11] T. Tsuda, Numerical Integration of Functions of Very Many Variables, Numer. Math. 20 (1973), pp377-391.

[12] 市田浩三・清野武, 多変数関数の補間について, 情報処理 Vol. 14 (1973), pp114-117.