

C^* 環の自己同型によるハミルトニアンの意味づけ

京大 数研 荒木 不洋

§1 系の時間的发展とハミルトニアン

元来ハミルトニアンは、系の時間的发展の生成作用素という意味と、エネルギーという意味と、二重の物理的解釈を持っている。エネルギーと見る場合は、第一にそのスペクトルが問題となり、時間发展の生成作用素と見る場合は、時間をパラメーターとする一変数群が問題となる。後者に関して、通常のヒルベルト空間の枠ではユニタリ作用素の一変数群の形をとるが、もう少し抽象的な C^* 環の枠では、 C^* 環の自己同型の作る一変数群の形で捕えられる。

まず C^* 環の枠における例、および自己同型の形で捕えたとき、ハミルトニアンのスペクトルの問題はどうか等について考えて見る。

スピル格子系の統計力学の例 ν 次元格子の各点を整数 ν 個の組 $n = (n_1, \dots, n_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ で表わし、各点 n に対して

パウリのスピン行列 $\sigma_j^{(n)}$ の作る代数 $\mathcal{O}_n$ を考える。ここに $\mathcal{O}_n$ の要素は $\sum_{j=0}^3 c_j \sigma_j^{(n)}$ であり、各 $\sigma_j^{(n)}$ は次のような 2 行 2 列の行列と同じ演算規則に従う。

$$\sigma_0^{(n)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1^{(n)} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2^{(n)} \sim \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3^{(n)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}^\nu$ の有限部分集合 I ($I \subset \mathbb{Z}^\nu$ と書く) に対して $\mathcal{O}(I) = \bigotimes_{n \in I} \mathcal{O}_n$ (テンソル積、平たく云うと n と m が異なるとき $\sigma_j^{(n)}$ と $\sigma_k^{(m)}$ は可換と思って $\{\mathcal{O}_n, n \in I\}$ で作られる代数を考える) を考え、 $I \subset I'$ なら $\mathcal{O}(I)$ を $\mathcal{O}(I')$ の部分代数に自然な意味で同一視する。 $\mathcal{O} = \bigcup_I \mathcal{O}(I)$ は無限次元の $*$ 環となるが、各 $\mathcal{O}(I)$ の元には一意的に行列としてのノルムを与えられるので、 $\mathcal{O}$ の元にもこのノルムを与え、完備化したものを $\overline{\mathcal{O}}$ と書く。 $\overline{\mathcal{O}}$ は C^* 環である。

各 $\sigma_j^{(n)}$ を $\sigma_j^{(n+a)}$ へ移す $\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}$ への変換で、積・和・共役の諸演算を保存するものは一意的に存在する。これを $\tau_L(a)$ と書く。このように $\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}$ の上への一対一写像で、積・和・共役の諸演算を保存するものを $*$ 自己同型 と呼ぶ。今の場合 $\tau_L(a)$ は $\mathcal{O}$ の元のノルムも保存するので、 $\overline{\mathcal{O}}$ に一意的に拡張できる。したがって $\overline{\mathcal{O}}$ の $*$ 自己同型と考えてよい。しかも格子点の平行移動の作る群の連続表現になっている。

次に系の ポテンシャル を導入する。各 $I \subset \mathbb{Z}^\nu$ に対し、 $\mathcal{O}(I)$ の元 $\psi(I)$ (ポテンシャル) が与えられていて次の諸条件を

満たしているものとする。(1) $\Phi(I+a) = \tau_L(a) \Phi(I)$ (平行移動に対する不変性と呼ばれる。ただし、 $I+a$ は I の各点 n に a を加えたものの全体を表わす。)(2) I の中の点の数 $v(I)$ がある数 N_0 を越えようと $\Phi(I) = 0$ 。(例えば、二体相互作用だけを考える場合は $N_0 = 2$ に相当。)(3) Ruelle の導入したノルム

$$(1.1) \quad \|\Phi\| = \sum_{I \geq 0} v(I)^{-1} \|\Phi(I)\|$$

が有限。(和は特定の格子点 0 を含むすべての I にわたる。)

この場合、 $A \in \mathcal{O}$, $U_\Phi(I) \equiv \sum_{I' \subset I} \Phi(I')$ に対し

$$(1.2) \quad \tau(t)A \equiv \lim_{I \rightarrow \infty} e^{itU_\Phi(I)} A e^{-itU_\Phi(I)},$$

が $\mathcal{O}$ のノルム位相での極限として存在し、 $\tau(t)$ は $\mathcal{O}$ の * 自己同型を与えたことを、このようにして証明できる。

まず $A \in \mathcal{O}$ の場合を証明する。 $A \in \mathcal{O}(I_0)$ とし、公式

$$(1.3) \quad e^{itU_\Phi(I)} A e^{-itU_\Phi(I)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} (it)^n [\overbrace{U_\Phi(I), [\dots, A] \dots}]^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} (it)^n \sum_{I_1 \subset I} \dots \sum_{I_n \subset I} [\Phi(I_1), [\dots, [\Phi(I_n), A] \dots]]$$

を使う。この和で、 $I_1 \subset I, \dots, I_n \subset I$ の制限をはずしたときに、それが絶対収束すれば、そのような n に対し (1.2) の極限は明らかに存在する。絶対収束性を示すために、次の評価を使う。

$$(1.4) \quad \|[\Phi(I_1), [\dots, [\Phi(I_n), A] \dots]]\| \leq 2^n \|\Phi(I_1)\| \dots \|\Phi(I_n)\| \|A\|.$$

I_n についての和は、 I_0 と共通点をもつものに制限できる。

I_0 の特定の英を含む I_n についての $\|\bar{\Phi}(I_n)\|$ の和は

$$(1.5) \quad \|\bar{\Phi}\|_1 \equiv \sum_{I_n \supset 0} \|\bar{\Phi}(I_n)\| \leq N_0 \|\bar{\Phi}\| < \infty$$

で押ええられる。(平行移動に対する不変性を使った) したがって、 $I_n \cap I_0 \neq \emptyset$ をみたす I_n についての和に対して、

$$(1.6) \quad \sum \|\bar{\Phi}(I_n)\| \leq v(I_0) \|\bar{\Phi}\|_1.$$

同様にして、 I_{n-1} についての和は、 $I_n \cup I_0$ と共通英を含むものに限れるので、 $v(I_n \cup I_0) \leq v(I_n) + v(I_0) - 1$ と、

$v(I_n) \leq N_0$ より、

$$(1.7) \quad \sum \|\bar{\Phi}(I_{n-1})\| \leq (v(I_0) + N_0 - 1) \|\bar{\Phi}\|_1$$

以下同様にして、

$$(1.8) \quad \sum \|\bar{\Phi}(I_{n-k})\| \leq (v(I_0) + k[N_0 - 1]) \|\bar{\Phi}\|_1.$$

この評価を (1.4) の右辺に使うことにより、

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} (it)^n \sum_{I_1 \subset \dots \subset I_n} [\bar{\Phi}(I_1), \dots, \bar{\Phi}(I_n), A] \dots]$$

は

$$(1.9) \quad |t| < [2(N_0 - 1) \|\bar{\Phi}\|_1]^{-1}$$

で絶対収束して $e(it)A$ を与えることがわかる。

一般の $A \in \overline{\mathcal{O}}$ に対しては、任意の $\varepsilon > 0$ について、 $A_\varepsilon \in \mathcal{O}$ で $\|A - A_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3}$ をみたすものと、 $\mathcal{I}^v$ の有限部分集合 I_ε で任意の $I \supset I_\varepsilon$ と (1.9) をみたす t に対して

$$(1.10) \quad \|e(it)A_\varepsilon - e^{itU_{\bar{\Phi}}(I)} A_\varepsilon e^{-itU_{\bar{\Phi}}(I)}\| < \frac{\varepsilon}{6}$$

をみたすものが存在するので、この I_ε について、 $I \supset I_\varepsilon$,

$J \cap I_\varepsilon$ ならば,

$$(1.11) \quad \| e^{itU_{\pm}(I)} A e^{-itU_{\pm}(I)} - e^{itU_{\pm}(J)} A e^{-itU_{\pm}(J)} \| < \varepsilon$$

となり, (1.3)の右辺はコーシー条件を満たす。したがって, (1.9)をみたす t に対しては一般の $A \in \overline{\mathcal{O}}$ について (1.3)の極限が存在する。この議論から, 連続性 $\lim_{t \rightarrow 0} \tau(t)A = A$ は明らかである。

任意の t についての (1.3)の極限の存在と, 加法性 $\tau(t_1)\tau(t_2) = \tau(t_3)$ は次式より明らかである。

$$\begin{aligned} & \| e^{i(t_1+t_2)U_{\pm}(I)} A e^{-i(t_1+t_2)U_{\pm}(I)} - \tau(t_1)\tau(t_2)A \| \\ & \leq \| e^{it_1U_{\pm}(I)} \{ e^{it_2U_{\pm}(I)} A e^{-it_2U_{\pm}(I)} - \tau(t_2)A \} e^{-it_1U_{\pm}(I)} \| \\ & \quad + \| e^{-it_1U_{\pm}(I)} (\tau(t_2)A) e^{it_1U_{\pm}(I)} - \tau(t_1)(\tau(t_2)A) \| \end{aligned}$$

ただし, 右辺の二項は, $e^{it_1U_{\pm}(I)}, e^{-it_1U_{\pm}(I)}$ であり, t も値は変わらない。(証明終)

$\tau(t)$ はスピン格子系の物理量の 時間発展 (ハイゼンベルグ表示における) を表わす * 自己同型 と解釈する。この場合, 形式的には ハミルトニアンの $H = \sum_I U_{\pm}(I)$ を考えたことに相当しているが, H 自身は $\overline{\mathcal{O}}$ の中に存在しないし, $\overline{\mathcal{O}}$ の適当な表現空間を考えると, その表現空間上の作用素としても存在しない場合が多い。そのために * 自己同型として補ったのである。

C^* 環と不変状態 ヒルベルト空間上の作用素の作る $*$ 環の (すなわち, A と B が $\mathcal{A}$ の元ならば $\alpha A + \alpha B$, AB , A^* も $\mathcal{A}$ の元であるという性質をもつ $\mathcal{A}$) で, 作用素のノルム位相について閉じているもの (抽象的には, 和, 積, 複素数に掛ける演算, $*$, ノルム が定義されていて, 前述の $\mathcal{A}$ と $*$ 同型であり, ノルムも一致するもの) を C^* 環 という。二つの C^* 環の $*$ 同型写像はノルムを保存する, すなわち, C^* 環としてのノルムは, $*$ 環の構造で決定される。

C^* 環 $\mathcal{A}$ 上の線型汎関数 φ が, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$(1.12) \quad \varphi(A^*A) \geq 0$$

という性質を持ち,

$$(1.13) \quad \|\varphi\| \equiv \sup_{\|A\|=1} |\varphi(A)| = 1$$

をみたすとき, $\mathcal{A}$ の 状態 と呼ぶ。もし単位元 1 が $\mathcal{A}$ に含まれているならば $\|\varphi\| = \varphi(1)$ である。

C^* 環 $\mathcal{A}$ からあるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素への $*$ 準同型 π を $\mathcal{A}$ の 表現 という。 $\|\pi(A)\| \leq \|A\|$ が常に成立する。 $\mathcal{H}$ のベクトル Ω について, $\pi(A)\Omega$, $A \in \mathcal{A}$ の全体が $\mathcal{H}$ で稠密な場合, Ω を $\pi(\mathcal{A})$ の巡回ベクトルという。

Ω が $\mathcal{H}$ の単位ベクトルで, π が $\mathcal{H}$ 上の $\mathcal{A}$ の表現ならば,

$$(1.14) \quad \varphi_\Omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$$

は $\mathcal{A}$ の状態である。逆に φ が $\mathcal{A}$ の任意の状態のとき, G.N.S.

(Gelfand-Naimark-Segal) 構成法 という方法で、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\varphi$, $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}_\varphi$ 上の表現 π_φ , $\mathcal{H}_\varphi$ の単位ベクトル Ω_φ で $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ の巡回ベクトルになるもの, の組を作って $\mathcal{H}_{\Omega_\varphi} = \mathcal{H}$ ならしめ得る。またそのような組 $\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, \Omega_\varphi$ は (ユニタリ同値類として) 一意的である。

$\tau(t)$ を C^* 環 $\mathcal{A}$ の $*$ 自己同型の連続な一変数群とする。(すなわち, 各 $\tau(t)$ は $\mathcal{A}$ の $*$ 自己同型であり, $\tau(t_1)\tau(t_2) = \tau(t_1+t_2)$ をみたし, 各 $A \in \mathcal{A}$ に対して, $\lim_{t \rightarrow 0} \|\tau(t)A - A\| = 0$, $\tau(0)A = A$ をみたす。) $\tau(t)$ による状態の変化 (Schrödinger 表示) は

$$(1.15) \quad [\tau(t)^* \varphi](A) = \varphi(\tau(t)A), \quad A \in \mathcal{A}$$

で定義する。特に $\tau(t)^* \varphi = \varphi$ (すなわち任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $\varphi(\tau(t)A) = \varphi(A)$ をみたす状態 φ) を 不変状態 と呼ぶ。

状態の分解 状態 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ について,

$$(1.16) \quad \varphi(A) = \lambda \varphi_1(A) + (1-\lambda) \varphi_2(A)$$

をすべての $A \in \mathcal{A}$ に対してみたす実数 $0 \leq \lambda \leq 1$ が存在するとき, φ を φ_1 と φ_2 の (重み $\lambda, (1-\lambda)$ の) 混合状態 という。 φ と異なる φ_1, φ_2 に対しては (1.16) が成立しないような状態 φ は 純状態 と呼ぶ。 φ と異なる不変状態 φ_1, φ_2 の混合には決して等しくない不変状態 φ は, エルゴード状態 と呼ばれる。

表現 π は, $\pi(\mathcal{A}) \mathcal{H}_\pi, \{(\pi(A)\xi; A \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{H}_\pi)\}$ 全体のこと

が $\mathcal{H}_1$ に含まれる $\mathcal{H}_2$ の線型閉部分集合 (不変部分空間とよばれる) は $\mathcal{H}_2$ と 0 以外にないという性質をもつ場合, 既約である
と云われる。これは, あべての $\pi(A)$ ($A \in \mathcal{A}$) と可換な作用素
は ± 1 (恒等作用素の複素数倍) 以外にないという条件と同等
である。(シュールの補題) φ が純状態であることは, π_φ が
既約であることと同等である。

φ が $\tau(t)$ について不変状態ならば, $\mathcal{H}_\varphi$ 上のユニタリー作
用素の一変数群 $U_\varphi(t)$ で,

$$(4.17) \quad U_\varphi(t) \pi_\varphi(A) \Omega_\varphi = \pi_\varphi(\tau(t)A) \Omega_\varphi, \quad A \in \mathcal{A}$$

をみたすものが一意的に存在する。 φ がエルゴード状態であ
ることは, $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ と $U_\varphi(t)$, $-\infty < t < +\infty$ の全体で生成される
*環の既約性と同等である。

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$; $\epsilon_1 > 0, \dots, \epsilon_n > 0$ が与えられたとき,

$$(4.18) \quad |\varphi(A_j) - \varphi(A'_j)| < \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, n$$

をみたす状態 ψ の全体を, $(\{A_j\}, \{\epsilon_j\})$ で定められた φ の 弱近
傍 といい, $\{A_j\}, \{\epsilon_j\}$ を変えることにより得られる弱近傍の
全体で成る位相を状態の 弱位相 という。状態全体はこの弱
位相についてコンパクトである。

状態の集合 K が, その任意の二元の混合状態をすべて含ん
でいるとき, 凸 と呼ぶ。今 K_φ を不変状態の全体とすれば, K_φ
は凸で, 弱位相について閉じている。(故にコンパクトである。)

K_2 上の測度 μ が正 (任意の可測集合 $\Delta \subset K_2$ に対し $\mu(\Delta) \geq 0$) で規格化されている ($\mu(K_2) = 1$) 場合 (このような μ を確率測度とよぶ), 任意の $A \in \mathcal{O}$ に対して

$$(1.19) \quad \varphi_\mu(A) = \int_{K_2} \psi(A) d\mu(\psi)$$

をみたす状態 φ_μ が一意にきまり, それは不変状態である. φ_μ が先に与えられた場合, このような μ は φ_μ の 分解 を与えるという.

以下 $\mathcal{O}$ を可分とする.

μ と ν が共に同一の状態 φ の分解を与え, 各 $\psi \in K_2$ に対して K_2 上の確率測度 m_ψ があって, 任意の K_2 上連続実数 $F(\psi)$ に対して $\int F(\sigma) dm_\psi(\sigma)$ が ψ の関数として μ 可測であり, かつ

$$(1.20) \quad \int_{K_2} F(\psi) d\nu(\psi) = \int_{K_2} \left\{ \int_{K_2} F(\sigma) dm_\psi(\sigma) \right\} d\mu(\psi)$$

が成立するとき, ν による分解は μ による分解よりこまかいと呼び, $\mu \prec \nu$ と書くことにする. この順序関係について 極大な測度 (最もこまかい分解) が一意的に存在し, その測度はエルゴード状態に載っている. (すなわちエルゴード状態以外の測度が 0.) この分解は エルゴード分解 と呼ばれる.

スペクトル条件と真空状態 $\mathcal{H}_\varphi$ 上に (1.17) により定義された $U_\varphi(t)$ は t について強連続 ($U(t)$ の連続性の仮定による) であるから, $U_\varphi(t) = \exp it H_\varphi$ のような自己共役作用素 H_φ がきまる. もし Ω_φ が“真空”ならば, 通常この H_φ は ハミルト

ニアと呼ばれる。

今 $\tilde{f}(s)$ を一実変数 s のなめらかな関数である有界集合 Δ_f の外で 0 とする。 H_p のスペクトル分解を $H_p = \int \lambda dE(\lambda)$ とし、
 $f(t) = (2\pi)^{-1} \int \tilde{f}(s) e^{-ist} ds, \quad Q \in \mathcal{M},$

$$(1.21) \quad Q(f) = \int \tau(t) Q f(t) dt$$

とおく。このとき

$$(1.22) \quad (\Xi, \pi[Q(f)]\Xi) = \iint (dE(\lambda)\Xi, \pi(Q)dE(\lambda')\Xi) \tilde{f}(\lambda - \lambda').$$

特に、 Ξ および Ξ の H_p に関するスペクトル測度 $\|dE(\lambda)\Xi\|^2$, $\|dE(\lambda)\Xi\|^2$ がそれぞれ Δ_{Ξ} および Δ_{Ξ} のもとで 0 であり、 Δ_{Ξ} と $\Delta_f + \Delta_f (= \{\lambda_1 + \lambda_2; \lambda_1 \in \Delta_{\Xi}, \lambda_2 \in \Delta_f\})$ が共通点を持たなければ、(1.22) は 0 になる。この意味で、 $Q(f)$ はエネルギーを Δ_f に属する値の範囲だけ変化させる作用素と解釈できる。

そこである状態 φ (不変状態とは限らない) が、 $\Delta_f \in (-a, \infty)$ ならば必ず $\varphi(Q(f)^* Q(f)) = 0$ のとき、高々エネルギー $-a$ の状態 と呼ぶ。高々エネルギー 0 の状態は自働的に不変状態であり、対応するハミルトニア H_p は非負 ($H_p \geq 0$) である。逆に H_p が非負な不変状態 φ はたかたかエネルギー 0 の状態である。

相対論的な場合、時空での平行移動に対応した四次元的な自己同型群 $\tau(x)$ があり、各時間的ベクトル e ($(e, e) \geq 0, e^0 > 0$) について $\tau(te)$, $-\infty < t < \infty$ を上記 $\tau(t)$ にとることが可能であ

る。各 e に対し適当な a_e があって状態 φ が $t(e)$ に対し高々エネルギー a_e の状態の場合、 φ を エネルギー有限の状態 とい、特に $a_e = 0$ にとれる場合、 φ を 真空 と呼ぶ。

局所性の仮定を導入すると、一般的に、エネルギー有限の状態があれば必ず真空状態が存在し、真空状態のエルゴード分解は既約分解であり（すなわちエルゴード分解をよこし測度を μ とすると、 K_2 中純状態以外の部分の μ 測度は 0）、各既約エルゴード状態 φ に対応する表現 π_φ は既約で、 $\mathcal{H}_\varphi$ 上 $U_\varphi(x)$ ($t(x)$ に対応して (1.11) で定義されるユニタリ作用素で、時空並進を表わす) で不変なベクトルは一意的 (Ω_φ の複素数倍) であることが示せる。すなわち普通の場の理論の出発点の公理が各 $\mathcal{H}_\varphi$, π_φ , Ω_φ でみたされることになる。もちろん真空状態の一意性は保証されないが、各 $\mathcal{H}_\varphi$ における真空ベクトルの一意性は保証される。また各 $\mathcal{H}_\varphi$ 上でエネルギー運動量 P^μ が定義されて $(P^\mu, P^\mu) \geq 0$, $P^0 \geq 0$ となる。

§2 $(\varphi^4)_2$ 模型の時間発展

Cut-Off ハミルトニアンの自己共軛性

$(\varphi^4)_2$ 模型のハミルトニアンは

$$(2.1) \quad H = H_0 + H_{\text{I}V}, \quad H_{\text{I}V} = \int : \phi(x)^4 : g\left(\frac{x}{\Lambda}\right) dx \Big|_{x^0=0}$$

で与えられる。ここに g は cut-off (空間の) 関数で、 $|x| \leq 1$ で $g(x) = g$, $|x| \geq 2$ で $g(x) = 0$ となる C^∞ 級の関数とする。 H_0 は自由ハミルトニアンで、その自己共軛性はよく知られている。

$H_{\text{I}V}(g)$ の自己共軛性を示すには次の定理が使われる。

定理 B がヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の対称作用素、 $\mathcal{M}$ が極大可換 W^* 環、 Ω が $\mathcal{M}$ の巡回ベクトルで、 $\mathcal{M}\Omega$ は B の定義域に含まれ、 $\mathcal{M}$ の元と B は $\mathcal{M}\Omega$ 上で可換ならば、 B は本質的に自己共軛である。

ここに極大可換 W^* 環 $\mathcal{M}$ とはヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の集合で、 $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ をみたすもの（ただし $\mathcal{M}'$ は $\mathcal{M}$ の各元と可換な有界線形作用素の全体である）を云い、今の場合、時刻 0 における場 $\int \phi(x) f(x) dx \Big|_{x^0=0}$ で生成される W^* 環とすればよい。また Ω が巡回ベクトルとは、 Q が $\mathcal{M}$ の元をつくるとき $Q\Omega$ の全体が $\mathcal{H}$ で稠密なことを云い、 Ω としては真空ベクトルを使う。そのとき $B = H_{\text{I}V}$ に対し定理の仮定は満たされているので、 $H_{\text{I}V}$ が本質的に自己共軛であることがわかる。

3.

定理の証明は次のように簡単である。 B を $\mathcal{M}\Omega$ へ制限したものの閉包を B_1 と書く。 B_1+i の値域は閉部分集合でありそれを $\mathcal{H}_1$ と書き、その直交補集合を $\mathcal{H}_1^\perp$ と書く。 $\mathcal{H}_1$ 上で $(B_1-i)(B_1+i)^{-1}$, $\mathcal{H}_1^\perp$ 上で 0 となる線型作用素を $S(B_1)$ と書く。 $S(B_1)$ は有界で、 B_1 の Cayley 変換と呼ばれる。

$S(B)$ についてまず $\mathcal{M}$ の各元と可換であることを示す。 $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}$ に対し

$$(2.2) \quad (\psi, [Q_1^*, (B_1+i)] Q_2 \Omega) = 0$$

が任意の ψ に対し成立するので、 $\psi \in \mathcal{H}_1^\perp$ ならば

$$(2.3) \quad (Q_1 \psi, (B_1+i) Q_2 \Omega) = (\psi, (B_1+i) Q_1^* Q_2 \Omega) = 0$$

となり、 $Q_1 \psi \in \mathcal{H}_1^\perp$ である。したがって、 $\psi \in \mathcal{H}_1^\perp$ に対しては $S(B) Q_1 \psi = Q_1 S(B) \psi (= 0)$ が成立する。また $\mathcal{H}_1$ のなかで稠密なベクトル $\psi = (B_1+i) Q \Omega$, $Q \in \mathcal{M}$ に対しては

$$(2.4) \quad \begin{aligned} S(B) Q_1 \psi &= S(B) (B_1+i) Q_1 Q \Omega \\ &= Q_1 (B_1-i) Q \Omega \\ &= Q_1 S(B_1) \psi \end{aligned}$$

により、やはり $S(B) Q_1 \psi = Q_1 S(B) \psi$ が得られる。

以上により $S(B) \in \mathcal{M}' = \mathcal{M}$ である。故に $S(B)^* \in \mathcal{M}$ で $\mathcal{M}$ は可換なので $S(B) S(B)^* = S(B)^* S(B)$ である。したがって、

$$(2.5) \quad (1 - S(B_1) S(B_1)^*) \xi = (1 - S(B_1)^* S(B_1)) \xi$$

である。この空間の元を ψ とすると、 ψ は $B_1 + i$ の値域にも $B_1 - i$ の値域にも真交しなければならないので、 $\psi = 0$ である。故に $S(B_1)$ はユニタリで、 B_1 は自己共轭である。(証明終)

H_0 と $H_{I,V}$ の自己共轭性がわかった上で、その和の自己共轭性は、特異摂動の理論を使って示すことができるが、これはここでは省略する。

時間発展の自己共轭群

これには次の Trotter 公式を使う。

$$(2.6) \quad e^{itH_V} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{itH_0/n} e^{itH_{I,V}/n})^n$$

この公式は、 H_0 , $H_{I,V}$ が自己共轭で、 $H_V = H_0 + H_{I,V}$ が本質的に自己共轭 (すなわち $\overline{H_0 + H_{I,V}}$ が自己共轭) ならいつでも成立する。

いま $(-R, R)$ における場、すなわち $\int \phi(x) f(x') dx' \big|_{x=0}$ および $\int \pi(x) f(x') dx' \big|_{x=0} = 0$ で $f(x)$ が $|x| \geq V - \varepsilon$ で 0 になるもの (ただし $\varepsilon > 0$ は任意) で生成される W^* 環を $\mathcal{O}_R$ とおく。

$Q \in \mathcal{O}_{R_1}$ に対しては

$$(2.7) \quad e^{itH_0} Q e^{-itH_0} \in \mathcal{O}_{R_1+t},$$

$$(2.8) \quad e^{itH_{I,V}} Q e^{-itH_{I,V}} \in \mathcal{O}_{R_1}$$

である。したがって Trotter 公式により

$$(2.9) \quad e^{itH_V} Q e^{-itH_V} \in \mathcal{O}_{R_1+t}$$

が得られる。すべての $\mathcal{O}_R$, $-\infty < R < \infty$ により生成される C^* 環を $\mathcal{O}$ とすれば, $\bigcup_R \mathcal{O}_R$ 上で定義される $*$ 自己同型

$$(2.10) \quad \tau_V(t)Q = e^{itH_V} Q e^{-itH_V}$$

は, 明らかに $\mathcal{O}$ の $*$ 自己同型に一意的に拡大されるので, それをも $\tau_V(t)$ で表わす。

H_V と H_{V_1} とは可換であり, $Q \in \mathcal{O}_{V_1}$, $V_1 \subset V$ ならば

$$(2.11) \quad [Q, e^{it(H_V - H_{V_1})}] = 0$$

である (2.1) より) ので, Trotter の式により, $Q \in \mathcal{O}_R$ に対し

$$(2.12) \quad \tau_V(t)Q = \tau_{V_1}(t)Q$$

が任意の $V \geq R+t$, $V_1 \geq R+t$ について成立する。(2.12) を $\tau(t)Q$ と定義すると, これは $\mathcal{O}$ の $*$ 自己同型にやはり一意的に拡大され, 任意の $Q \in \mathcal{O}$ に対し

$$(2.13) \quad \tau(t)Q = \lim_{V \rightarrow \infty} \tau_V(t)Q$$

である。この $\tau(t)$ が形式的には $H_0 + g \int \phi(x)^4 dx$ に対応する時、相互作用の自己同型である。

上記より $\tau(t)\mathcal{O}_V \subset \mathcal{O}_{V+t}$ が成立するので, この理論が局所性の公理をみたすことは明らかである。

真空状態 $H_0 + H_{E_V}$ の自己共役性の議論から, $H_0 + H_{E_V}$ が下に有界で, 一意な最近固有ベクトル Ξ_{0V} をもつことが示される。 Ξ_{0V} による $\mathcal{O}$ のベクトル状態を ω_V とおく。 $(\omega_V(Q)) = (\Xi_{0V}, Q \Xi_{0V})$. 状態全体の弱位相に関するコンパクト性から,

$V \rightarrow \infty$ での ω_V の集積点の数が少くとも一つ存在する。それを ω_∞ とすると、 ω_∞ は $T_\pm$ に関して高々 0 エネルギーの状態であることが次のように簡単に示される。 $Q \in \mathcal{Q}$ とし、 $Q_\varepsilon \in \mathcal{Q}_{V(\varepsilon)}$,

$\|Q - Q_\varepsilon\| < \varepsilon$ とする。また $s \geq 0$ で 0 となる $\tilde{f}(s)$ を一つ定め、

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ist} \tilde{f}(s) ds$ とする。 $\tilde{f}$ を smooth な関数で有界な値を

持つものとするれば、 $\varepsilon > 0$ に対し $T(\varepsilon)$ が存在して、 $\int_{|t| \geq T(\varepsilon)} |f(t)| dt$

$< \varepsilon$ となる。 $V > V(\varepsilon) + T(\varepsilon)$ に対して、

$$\omega_V(Q(f)^* Q_V(f)) = 0$$

である。ただし $Q_V(f) = \int \tau_V(t) Q_\varepsilon f(t) dt$ 。 $|t| \leq T(\varepsilon)$ では $\tau_V(t) Q_\varepsilon$

$= \tau(t) Q_\varepsilon$ なので $\|Q_V(f) - Q_\varepsilon(f)\| \leq 2\|Q_\varepsilon\| \varepsilon$ である。また

$\|Q_\varepsilon(f) - Q(f)\| \leq \int |f(t)| dt \varepsilon$ 。したがって

$$|\omega_V(Q(f)^* Q(f))| \leq (2\|Q\| + 2\varepsilon + \int |f(t)| dt) \|Q(f)\| \varepsilon$$

が成立する。 $V \rightarrow \infty$ の集積点についても同じ式が成立し、 ω

は任意であるから $\omega_\infty(Q(f)^* Q(f)) = 0$ を得る。

Glimm-Jaffe はさらに運動量も含めたスペクトル条件を示している。