

Modified Coleman-Hepp 模型とそのマクロ極限

バリ大学物理 Saverio Pascazio

琉球大学物理 中里 弘道 (Hiromichi Nakazato)

量子力学的観測問題 [1] は量子力学の基礎と解釈の中心的課題であり、その一貫性と深く関わっている。この問題を量子力学の枠内で取り扱う際には、観測過程を、測定が行われる量子系 Q と多粒子系 (N 粒子系) である測定器系 D との相互作用過程として捉えるのが普通である。一般的に言って、このような複雑な多体系 $Q+D$ を厳密に解くことは極めて困難であるが、いくつかの模型では厳密解が知られており、近似に頼ることなく上記問題に対してより深い理解が得られるものと期待されている。このような可解な模型のひとつに数えられる Coleman-Hepp 模型 (あるいは AgBr 模型) [2] は、観測問題の議論においてしばしば引用されてきたが、より現実的な測定過程との対応を考えると必ずしも満足できるものではない。本研究では、Coleman-Hepp 模型により現実的な修正を加えた模型を提案し、その厳密解を与えるとともに、その解の振舞い、特にマクロ極

限 $N \rightarrow \infty$ における物理量の振舞いを考察した.

§1. Coleman-Hepp 模型とその修正

Hepp [2] が導入したハミルトニアン H_{CH}

$$H_{CH} = H_Q + H'_{CH} \quad (1)$$

は, 自由ハミルトニアン

$$H_Q = cp \quad (2)$$

で与えられる 1 次元超相対論的粒子 Q ($[x, p] = i\hbar$) と N 個の
スピンから成る測定器系 D との相互作用を記述しており, その
相互作用ハミルトニアン

$$H'_{CH} = \sum_{n=1}^N V(x - x_n) \sigma_1^{(n)} \quad (3)$$

は局所ポテンシャル $V(x - x_n)$ を通した Q との相互作用によっ
て x_n に置かれたスピンの反転が起こることを示している. ス
ピンの 2 つの自由度 (*up* と *down*) を AgBr (臭化銀) 状態と
Ag+Br (解離した銀と臭素) 状態に対応させれば極めてシンプ
ルな写真乾板模型とも考えられ, (1) は AgBr ハミルトニアン
とも呼ばれている.

極めて簡単な設定にも拘らず量子力学的測定過程の本質をよ
く突き, しかも以下でみるように厳密に解くことができるこの
模型は, 観測問題でしばしば用いられてきた. しかし, スピン
に対する自由ハミルトニアンが欠落している Hepp のハミルト

ニアン (1) は，スピン系のエネルギー準位が完全に無視されていることを意味し，粒子 Q もスピンとの相互作用によってエネルギーを交換することがない．このことは，スピン系を測定器（ここでは異なる状態をエネルギー的に識別することが可能であると暗黙のうちに仮定されている）と考えるうえであまり満足できる状況とは言えない．

この点を改善するため，我々は自由ハミルトニアン

$$H_D = \frac{\hbar\omega}{2} \sum_{n=1}^N \left(1 + \sigma_3^{(n)}\right) \quad (4)$$

によってスピン自由度に対応したエネルギー準位差 $\hbar\omega$ を導入するとともに，相互作用ハミルトニアンも

$$H' = \sum_{n=1}^N V(x - x_n) \left(\sigma_+^{(n)} e^{-i\omega x/c} + \text{h.c.} \right) \quad (5)$$

と変更して粒子・スピン間のエネルギー交換を可能にした [3]. 全体系 $Q+D$ のハミルトニアン

$$H = H_0 + H', \quad H_0 = H_Q + H_D \quad (6)$$

は $\omega = 0$ の場合には Hepp のハミルトニアン (1) に帰着し，その一般化になっていることが分かる．

簡単な計算で分かるようにこの系の散乱行列 S_N は厳密に求められる．実際，相互作用表示における相互作用ハミルトニアン

$$H'(t) = e^{iH_0 t/\hbar} H' e^{-iH_0 t/\hbar}$$

$$= \sum_{n=1}^N V(x + ct - x_n) \left(\sigma_+^{(n)} e^{-i\omega x/c} + \text{h.c.} \right) \quad (7)$$

は異なる時刻において可換であり, S_N は時間発展演算子

$$U(t, t') = \exp \left(-i \int_{t'}^t H'(t'') dt'' / \hbar \right) \quad (8)$$

の極限として

$$S_N = U(\infty, -\infty) = \prod_{n=1}^N S_n \quad (9)$$

と求まる. S_n はいわば n 番目のスピンに対する散乱行列である:

$$\begin{aligned} S_n &= e^{-i(V_0\delta/\hbar c)\boldsymbol{\sigma}^{(n)} \cdot \boldsymbol{u}} \\ &= \cos(V_0\delta/\hbar c) - i\boldsymbol{\sigma}^{(n)} \cdot \boldsymbol{u} \sin(V_0\delta/\hbar c), \\ \boldsymbol{u} &= (\cos(V_0\delta/\hbar c), \sin(V_0\delta/\hbar c), 0). \end{aligned} \quad (10)$$

但し $V_0\delta = \int_{-\infty}^{\infty} V(y)dy$ とおいた. このことから, ひとつのスピンを反転する確率 (あるいは 1 個の AgBr 分子を解離する確率) が

$$q = \sin^2(V_0\delta/\hbar c) \quad (11)$$

で与えられることが分かる.

§2. 初期状態の選択と物理量

散乱行列 S_N が完全に求まったので, 全体系の初期状態 $|\Psi_i\rangle$ を与えさえすれば終状態 $|\Psi_f\rangle$ は

$$|\Psi_f\rangle = S_N |\Psi_i\rangle \quad (12)$$

で求まる．以下では，スピン系 D の初期状態が a) 基底状態の場合と b) 熱平衡状態の場合をとりあげ，いくつかの物理量を計算する．

a) スピン系の初期状態が基底状態（全てのスピンの $down$ ） $|0\rangle_N$ で与えられた場合には，全体系の波動関数は次のようになる．

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle &= |p\rangle \otimes |0\rangle_N, \\ |\Psi_f\rangle &= S_N |\Psi_i\rangle \\ &= \sum_{j=0}^N \binom{N}{j}^{1/2} (-i\sqrt{q})^j \sqrt{1-q}^{N-j} |p - j \frac{\hbar\omega}{c}\rangle \otimes |j\rangle_N. \end{aligned} \quad (13)$$

ここで $|j\rangle_N$ は j 個のスピンの励起（ up ）した（規格対称化された）状態である．粒子 Q との相互作用によってスピン系 D に蓄えられる（すなわち Q と D で交換された）エネルギーとそのゆらぎは

$$\langle H_D \rangle_f = \langle \Psi_f | H_D | \Psi_f \rangle = \bar{n} \hbar \omega, \quad (14)$$

$$\langle \delta H_D \rangle_f = \sqrt{\bar{n}(1 - \bar{n}/N)} \hbar \omega \quad (15)$$

と計算される． $\bar{n} \equiv qN$ は励起したスピンの平均個数を意味している．また，干渉実験で問題となる量子論的コヒーレンス（干渉パターンの visibility）は

$$\mathcal{V} = {}_N\langle 0 | S_N | q \rangle_N = (1 - \bar{n}/N)^{N/2} \quad (16)$$

で与えられる [3].

b) スピン系のエネルギー準位を導入した ($\omega \neq 0$) おかげで熱平衡状態 ρ_{th} を考えることができる. スピン系 D が温度 β の平衡状態

$$\rho_{\text{th}} = \mathcal{Z}^{-1} \sum_{j=0}^N |j\rangle_N e^{-j\beta\hbar\omega} {}_N\langle j|, \quad (17)$$

$$\mathcal{Z} = (1 - e^{-(N+1)\beta\hbar\omega}) / (1 - e^{-\beta\hbar\omega})$$

にあったとすると, 全体系の終状態は

$$\rho_f = S_N[|p\rangle\langle p| \otimes \rho_{\text{th}}] S_N^\dagger \quad (18)$$

となる. 相互作用後のスピン系 D のエネルギー $\langle H_D \rangle_f = \text{Tr}[H_D \rho_f]$ やそのゆらぎ $\langle \delta H_D \rangle_f$, 干渉パターンの visibility $\mathcal{V} = \text{Tr}[\rho_{\text{th}} S_N]$ も正確に計算できるが, 少々式が複雑なのでその詳細は [3] に譲る.

§3. マクロ極限

N 個のスピンから成る D を古典的な測定器とみなすためには何らかの意味でマクロ極限 $N \rightarrow \infty$ を取る必要があると考えられる. 粒子 Q の入射エネルギーを有限と考えたとスピン系 D との相互作用で Q が失うエネルギーも有限でなくてはならない. すなわち, マクロ極限とともに

$$q = \sin^2(V_0\delta/\hbar c) \rightarrow 0, \quad \bar{n} = qN < \infty \quad \text{as } N \rightarrow \infty \quad (19)$$

という弱結合極限を同時に取らなくてはならないことが結論される. (例えば (14) を参照)

§3-1. 物理量のマクロ極限

a) 初期状態として基底状態を選んだ場合，前節で求めた各物理量は次の極限を持つ：

$$\langle H_D \rangle_f \rightarrow \bar{n} \hbar \omega, \quad (20)$$

$$\langle \delta H_D \rangle_f \rightarrow \sqrt{\bar{n}} \hbar \omega, \quad (21)$$

$$\mathcal{V} \rightarrow e^{-\bar{n}/2}. \quad (22)$$

b) 熱平衡状態から出発した場合，対応する各量は以下の通り：

$$\langle H_D \rangle_f \rightarrow (n_{\text{th}} + \bar{n}) \hbar \omega, \quad (23)$$

$$\langle \delta H_D \rangle_f \rightarrow \sqrt{n_{\text{th}}^2 + (2\bar{n} + 1)n_{\text{th}} + \bar{n}} \hbar \omega, \quad (24)$$

$$\mathcal{V} \rightarrow e^{-(n_{\text{th}} + 1/2)\bar{n}}. \quad (25)$$

但し $n_{\text{th}} \equiv e^{-\beta \hbar \omega} / (1 - e^{-\beta \hbar \omega})$ は初期熱平衡状態における励起スピンの平均個数を表している．

§3-2. 散乱行列 S_N のマクロ極限と Jaynes-Cummings 模型

この模型に対する物理的要請として考えられたマクロ極限 (19) は散乱行列 S_N そのものの極限も規定する．実際，(9) を

$$S_N = \exp[-i(V_0 \delta / \hbar c) \sqrt{N} \{ \sqrt{N}^{-1} \sum_{n=1}^N \sigma_+^{(n)} e^{-i\omega x/c} + \text{h.c.} \}] \quad (26)$$

と書き直し，(19) の極限の下で

$$(V_0 \delta / \hbar c) \sqrt{N} \simeq \sqrt{qN} = \sqrt{\bar{n}} < \infty \quad (27)$$

であることと $SU(2)$ の contraction [4]

$$\begin{aligned} \sqrt{N}^{-1} \sum_{n=1}^N \sigma_+^{(n)} &\rightarrow a^\dagger, & \sqrt{N}^{-1} \sum_{n=1}^N \sigma_-^{(n)} &\rightarrow a, \\ 2^{-1} \sum_{n=1}^N (1 + \sigma_3^{(n)}) &\rightarrow a^\dagger a, \end{aligned} \quad (28)$$

を考慮すると、散乱行列 S_N は次のようなマクロ極限

$$S_N \rightarrow \exp[-i\sqrt{n}\{a^\dagger e^{-i\omega x/c} + \text{h.c.}\}] \quad (29)$$

を持つことが分かる。(29) は我々の模型 (6) がマクロ極限 (19) において粒子 Q とボソン ($[a, a^\dagger] = 1$) との相互作用を記述していることを暗示している。事実、次のような (変形された)

Jaynes-Cummings ハミルトニアン [5]

$$\begin{aligned} H^{\text{JC}} &= H_0^{\text{JC}} + H'^{\text{JC}}, \\ H_0^{\text{JC}} &= cp + \hbar\omega a^\dagger a, \\ H'^{\text{JC}} &= u(x)\{a^\dagger e^{-i\omega x/c} + \text{h.c.}\} \end{aligned} \quad (30)$$

で記述される単一モードの電磁場と結合した粒子系の散乱行列は $\int_{-\infty}^{\infty} u(y)dy/\hbar c = \sqrt{n}$ とすると完全に (29) と一致する。さらにこのハミルトニアン自身、(6) のマクロ極限と (ある条件下で) 一致していることを示すことができる [3].

§4. まとめ

我々は可解な Coleman-Hepp 模型により現実的な修正を加えた新しい模型を提案した。修正のポイントはスピン系のエネルギー準位差を考慮し、さらに粒子とのエネルギー交換相互作用

を取り入れたことにある．模型の可解性はこの修正によっても保持されており，散乱行列を厳密に計算することができた．この修正によって相互作用によるエネルギー交換が計算できるようになっただけでなく，意味のある温度依存性も議論できるようになった．

一方，量子力学的観測問題そのものに直接関わる分析はこれからの課題であるが，マクロ極限において干渉パターン ν が $\bar{n}$ とともに部分的に消失してゆくことは不完全測定との関わりで興味ある現象である．

我々の考えたマクロ極限 (19) はこの模型に対する物理的要請と考えられるが，いわゆる van Hove の “ $\lambda^2 T$ ” 極限 [6] との対応 [7] も大変興味深い．また Jaynes-Cummings 模型との密接な関連はこの模型の持っている潜在的可能性の一端を示しているものと考えられる．現在このような観点からこの模型を使った分析を進めているところである [8]．

References

- [1] J. von Neumann, *Die Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer Verlag, Berlin, 1932).
- Quantum Theory and Measurement*, edited by J. A. Wheeler and W. H. Zurek (Princeton Univ. Press, Princeton, 1983).
- [2] K. Hepp, *Helv. Phys. Acta* **45** (1972) 237.

- J. S. Bell, *Helv. Phys. Acta* **48** (1975) 93.
- [3] H. Nakazato and S. Pascazio, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 1;
Phys. Rev. A **48** (1993) 1066.
- [4] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (John Wiley & Sons, New York, 1974) p.460.
F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas,
Phys. Rev. A **6** (1972) 2211.
- [5] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51** (1963) 89.
- [6] L. van Hove, *Physica* **21** (1955) 517.
G. L. Sewell, *Quantum theory of collective phenomena*
(Clarendon Press, Oxford, 1986).
- [7] H. Nakazato and S. Pascazio, preprint BA-TH/93-147,
DPUR 65.
- [8] H. Nakazato, M. Namiki and S. Pascazio, in preparation.