

4

2次元任意物体を過ぎるおそい流れ

東大 生研 成瀬 文雄

§ 1. 序

円柱への写像関数が既知である2次元物体を考え、このよ
うな物体のまわりのおそい流れを、つぎの(i)~(iv)のばありに
ついて研究し、物体に働く力の式を導く。ただし(i),(iii),(iv)のば
あり、基礎方程式は Navier-Stokes 方程式またはそれに類する
方程式で、2次元の定常運動を考え、(ii)のばありは基礎方程
式に Stokes 方程式をとり、2次元の定常運動に限る。

(i) 一様流中におかれたとき

非圧縮の Navier-Stokes 方程式を基礎方程式として、そりつ
なぎ法 (the method of matched asymptotic expansion) でとく。
展開のパラメータを ε (ε の order は $1/|\log Re|$, Re は Reynolds
数) とするとき、 $O(\varepsilon^3)$ まで正しい結果を導く。

(ii) 壁効果

1枚の無限平板でしきられた空間の中で、または2枚の平

行無限平板の間の真中の位置で、物体が任意の方向に動いているばあいを、Stokes 方程式を基礎方程式として調べる。物体の大きさを示す特性的長さを l 、壁から物体までの距離を d とし、 $l/d \ll 1$ を仮定、 $O(l/d)$ または $O(l^2/d^2)$ を省略して物体に働く力の式を導く。

(iii) 成層流体中の運動

密度が鉛直下方にわずかに線型的に増加しているような流体中で物体が斜めの方向に動くときを調べる。成層流体に対する基礎方程式を Boussinesq 近似とし、 $Re \ll 1$, $Ri \ll 1/Re$ (Ri : Richardson 数) のばあいをきりつなぎ法でとき、物体に働く力として $O(\varepsilon^2)$ まで正しい式を導く。

(iv) 電磁流体中の運動

一様な磁場をもつ電気伝導性流体中で物体が磁場に斜めの方向に動くときの流れの様子を調べる。 R_m を磁気レイノルズ数、 M を Hartmann 数とするとき、 $Re \ll 1$, $R_m \ll 1$, $M \ll 1$ であるが R_m/Re , M/Re は任意の値をとり得るとして、きりつなぎ法で解析し、 $O(\varepsilon^2)$ まで正しい式を導く。

§ 2 一様流中におかれたとき

物体が無限空間中で一定の速度で運動するとき、または一様流中に固定されたときを考える。物体に固定した座標系をとり、無次元化された位置座標、速度、圧力を

$$\bar{r} = r^*/l, \quad \bar{q} = q^*/U, \quad \bar{p} = l p^*/\mu U \quad (2.1)$$

とする。ただし l は特性的な長さ、 U は物体の速度、 μ は粘性率である。このとき Navier-Stokes 方程式および境界条件は

$$\Delta \bar{q} - \nabla \bar{p} = Re \bar{q} \cdot \nabla \bar{q}, \quad \nabla \cdot \bar{q} = 0 \quad (2.2)$$

$$\bar{r} = f(\theta) : \bar{q} = 0 \quad (2.3)$$

$$\bar{r} \rightarrow \infty : \bar{q} \rightarrow i, \quad \bar{p} \rightarrow \bar{p}_\infty \quad (2.4)$$

である。ここで $\bar{r} = f(\theta)$ は物体の形を表わし、 i は一様流の方向を表わす。また $Re = \rho U l / \mu$ である。

(i) きりつなき法による展開

S. Kaplan etc.^{1), 2)} が円柱のまわりの流れをとりたときと同じように、全領域を $\bar{r} \sim O(1)$ で表わされる内部領域と $\bar{r} \sim O(1/Re)$ で表わされる外部領域とに分け、内部変数 $IR(X, Y, Z)$ および外部変数 $ir(x, y, z)$ を

$$IR = \bar{r}, \quad ir = Re \bar{r} \quad (2.5)$$

のようにとる。また X, Y, Z および x, y, z は直角座標系で、流れの面は X, Y - または x, y - 面にとり、 X の方向または x の方向を i の方向と一致させてある。つぎに外部および内部展開を、 ε (order は $1/\log Re$) でつぎのように展開する。

外部展開:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= i + \varepsilon q_1(ir) + \varepsilon^2 q_2(ir) + \cdots + \varepsilon^n q_n(ir) + \cdots \\ \bar{p} &= \bar{p}_\infty + Re(\varepsilon p_1(ir) + \varepsilon^2 p_2(ir) + \cdots + \varepsilon^n p_n(ir) + \cdots) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

内部展開:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= \varepsilon Q_1(R) + \varepsilon^2 Q_2(R) + \dots + \varepsilon^n Q_n(R) + \dots \\ \bar{p} - \bar{p}_\infty &= \varepsilon P_1(R) + \varepsilon^2 P_2(R) + \dots + \varepsilon^n P_n(R) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

(ii) 内部展開

内部展開 (2.7) を (2.2), (2.3) に代入して,

$$\Delta Q_n - \nabla P_n = 0, \quad \nabla \cdot Q_n = 0 \quad (2.8)$$

$$R = f(\theta) : Q_n = 0 \quad (2.9)$$

が得られる。(2.8)は Stokes 方程式であるから、(2.9)をみたす解は、 $R \gg 1$ で "つぎ" のような漸近形をとる。

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= A_n \left[\left(-\log \frac{R}{a_n} + b_n \right) \hat{e}_n + \frac{X_n R}{R^2} + c_n \hat{j}_n \right] + O\left(\frac{1}{R}\right) \\ P_n &= 2A_n X_n / R^2 + O(1/R^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

ここで $\hat{e}_n, \hat{j}_n$ は直交する単位ベクトル、 $\hat{e}_n$ の方向および A_n は外部解との matching によって定められるので、いまは未定、 X_n, Y_n は直角座標を表かし、 X_n の方向は $\hat{e}_n$ の方向にとられている。また a_n, b_n, c_n はつぎのようにして決定される

(Appendix 参照)。 $Z (= X + iY)$ -平面上の物体が z -平面上の半径 a の円柱へ、写像関数

$$Z = z + z_0 + h(z) \quad (z \gg 1; h(z) \sim o(1)) \quad (2.11)$$

によって写像されるとき、

$$\left. \begin{aligned} a_n &= a, \quad b_n = -\frac{1}{2} \{ 1 + \sigma \cos(\beta + 2\alpha_n) \}, \quad c_n = \frac{\sigma}{2} \sin(\beta + 2\alpha_n), \\ re^{i\beta} &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{h}(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta} h'(ae^{i\theta})}{e^{i\theta} (1 + h'(ae^{i\theta}))} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

で決定され、 α_n は ℓ_n と X 軸とのなす角である。

外部解と内部解の matching を行ない、共通領域では、 Q_n, P_n は

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= A_n \left[(\log \alpha R_e - \log r + b_n) \ell_n + \frac{x_n r}{r^2} + c_n \hat{j}_n \right] + O(R_e \frac{1}{r}) \\ P_n &= 2A_n \frac{x_n}{r^2} R_e + O(R_e^2 \frac{1}{r^2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

の形をとる。ここで $x_n = R_e X_n$ である。

いま Q_1 と外部解の第0近似との matching を行なうと

$$\varepsilon = -1 / \log \alpha R_e, \quad A_1 = -1, \quad \ell_1 = \ell \quad (2.14)$$

が得られる。

(iii) 外部解

外部展開 (2.6) を (2.2), (2.4) に代入するとき

$$\Delta \mathcal{Q}_n - \nabla \mathcal{P}_n - \frac{\partial \mathcal{Q}_n}{\partial x} = \mathcal{Q}_1 \cdot \nabla \mathcal{Q}_{n-1} + \mathcal{Q}_2 \cdot \nabla \mathcal{Q}_{n-2} + \dots + \mathcal{Q}_{n-1} \cdot \nabla \mathcal{Q}_1, \quad \nabla \cdot \mathcal{Q}_n = 0 \quad (2.15)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \mathcal{Q}_n \rightarrow 0, \quad \mathcal{P}_n \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

が得られる。ここで $\mathcal{Q}_0 = 0$ とおくことにする。 $r \rightarrow 0$ での $\mathcal{Q}_n$

の境界条件は (2.13), (2.14) を用いて、内部解との matching を行なうと

$$r \rightarrow 0 : \quad \mathcal{Q}_n \rightarrow -A_n \left((\log r) \ell_n - \frac{x_n r}{r^2} \right) \quad (2.17)$$

が得られる。いま A_n, ℓ_n が既知であるとし、つぎの如く ℓ ,

$\hat{j}$ ($\hat{j}$ は ℓ に直角な単位ベクトル) の方向に分ける。

$$A_n \ell_n = - (H_n \ell + I_n \hat{j}) \quad (2.18)$$

このとき

$$A_n x_n = - (H_n x + I_n y)$$

であるから、(2.17) は

$$r \rightarrow 0 : \quad \mathcal{Q}_n \rightarrow H_n \left((\log r) \ell - \frac{x r}{r^2} \right) + I_n \left((\log r) \hat{j} - \frac{y r}{r^2} \right) \quad (2.19)$$

と存す。(2.15), (2.16), (2.19) を取扱; ためには q_n, p_n を z の如く 2 つに分割すると都合がよい。

$$q_n = q_{n1} + q_{n2}, \quad p_n = p_{n1} + p_{n2}$$

(a)

$$\Delta q_{n1} - \nabla p_{n1} - \frac{\partial q_{n1}}{\partial x} = 0, \quad \nabla \cdot q_{n1} = 0 \quad (2.20)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad q_{n1} \rightarrow 0, \quad p_{n1} \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

$$r \rightarrow 0: \quad q_{n1} \rightarrow H_n \left((\log r) \mathbf{e} - \frac{x \mathbf{r}}{r^2} \right) + I_n \left((\log r) \mathbf{g} - \frac{y \mathbf{r}}{r^2} \right) \quad (2.22)$$

(b)

$$\begin{cases} \Delta q_{n2} - \nabla p_{n2} - \frac{\partial q_{n2}}{\partial x} = q_1 \nabla q_{n-1} + q_2 \nabla q_{n-2} + \cdots + q_{n-1} \nabla q_1 \\ \nabla \cdot q_{n2} = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad q_{n2} \rightarrow 0, \quad p_{n2} \rightarrow 0 \quad (2.24)$$

$$r \rightarrow 0: \quad q_{n2} \rightarrow a_n + o(1) \quad (2.25)$$

q_{n1} は Oseen 方程式の 2 つの基本解 q'_0, p'_0 および q''_0, p''_0 から

$$q_{n1} = H_n q'_0 + I_n q''_0, \quad p_{n1} = H_n p'_0 + I_n p''_0 \quad (2.26)$$

のように決定される。ここで

$$q'_0 = 2 \left[\nabla \left\{ \log r + e^{\frac{x}{2}} K_0 \left(\frac{r}{2} \right) \right\} - e^{\frac{x}{2}} K_0 \left(\frac{r}{2} \right) \mathbf{e} \right], \quad p'_0 = -\frac{2x}{r^2} \quad (2.27)$$

および

$$q''_0 = 2 \nabla \times \left[\left\{ \log r + e^{\frac{x}{2}} K_0 \left(\frac{r}{2} \right) \right\} \mathbf{r} \right], \quad p''_0 = -\frac{2y}{r^2} \quad (2.28)$$

であり、また K_n は n 次の第 2 種の変形ベッセル関数で、 $\mathbf{r}$ は 2 方向の単位ベクトルである。(2.26) ~ (2.28) より

$$r \rightarrow 0: \quad q_{n1} \rightarrow H_n \left[(\log r + d) \mathbf{e} - \frac{x \mathbf{r}}{r^2} \right] + I_n \left[(\log r + d + 1) \mathbf{g} - \frac{y \mathbf{r}}{r^2} \right] \quad (2.29)$$

ともつ。ここで $d = \delta - \log 4$, δ はオイラーの定数である。

したがって、 $\mathcal{G}_n$ は (2.25), (2.29) より、 $r \rightarrow 0$ でつぎの形をもつ
 $r \rightarrow 0$:

$$\mathcal{G}_n \rightarrow H_n \left[(\log r + d) \mathcal{E} - \frac{\pi r}{r^2} \right] + I_n \left[(\log r + d + 1) \mathcal{E} - \frac{\pi r}{r^2} \right] + a_n \quad (2.30)$$

つぎに a_n について考へる。 $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{n-1}$ が既知であるときには $\mathcal{G}_{n2}$ は Green 関数を使ってつぎのように表示できる。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}_{n2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x-z, y-\eta) f_n(z, \eta) dz d\eta \\ \text{ここで} \quad f_n &= \mathcal{G}_1 \cdot \nabla \mathcal{G}_{n-1} + \mathcal{G}_2 \cdot \nabla \mathcal{G}_{n-2} + \dots + \mathcal{G}_{n-1} \cdot \nabla \mathcal{G}_1 \\ T(x, y) &= \begin{pmatrix} -\psi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} (\psi + \phi), \quad \psi = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{x}{2}} k_0\left(\frac{r}{2}\right), \quad \phi = \frac{\log r}{2\pi} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

いま $f_1 = 0$ であるから $a_1 = 0$, また $f_2 = \mathcal{G}_1 \cdot \nabla \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1' \cdot \nabla \mathcal{G}_1'$ であるから、 a_2 の計算も比較的簡単である。 a_2 は S. Kaplan¹⁾ によつて円柱のまわりの流れを調べるときに計算されてゐて

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= e_2 \mathcal{E} \\ e_2 &= - \int_0^{\infty} k_0(\eta) k_1(\eta) \left[\eta^{-1} I_1(2\eta) - 4 k_1(\eta) I_1(\eta) + 1 \right] d\eta = -0.87 \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

で与えられる。ただし $I_n(x)$ は n 次の第 1 種の変形ベッセル関数である。 $a_3, a_4, \dots$ についてはまだ計算されてゐないと思われよう。

(iv) 物体に働く力

共通領域で有効な (2.13) および (2.30) を用いて $O(\varepsilon^n)$ の定

次の matching を行うと

$$A_{n+1} \hat{i}_{n+1} = A_n (b_n \hat{i}_n + c_n \hat{j}_n) - (H_n d + e_n) \hat{i} - \{I_n (d+1) + f_n\} \hat{j} \quad (2.33)$$

が得られる。ここで $Q_n = e_n \hat{i} + f_n \hat{j}$ とおいた。つまり (2.12),

(2.18) を用いて

$$b_n = b_1 + \frac{2H_n I_n c_1 - (2b_1 + 1) I_n^2}{H_n^2 + I_n^2}, \quad c_n = \frac{c_1 (H_n^2 - I_n^2) - (2b_1 + 1) H_n I_n}{H_n^2 + I_n^2} \quad (2.34)$$

が得られる。また

$$A_n \hat{j}_n = I_n \hat{i} - H_n \hat{j} \quad (2.35)$$

(2.18), (2.34), (2.35) を (2.33) に代入して

$$A_{n+1} \hat{i}_{n+1} = -[(b_1 + d)H_n + c_1 I_n + e_n] \hat{i} - [c_1 H_n + (d - b_1)I_n + f_n] \hat{j} \quad (2.36)$$

となるから

$$H_{n+1} = (b_1 + d)H_n + c_1 I_n + e_n, \quad I_{n+1} = c_1 H_n + (d - b_1)I_n + f_n \quad (2.37)$$

が成立することになる。

いま Q_n, P_n から生ずる物体に働く力 F_n は

$$F_n = -4\pi\mu U A_n \hat{i}_n$$

であるから、物体に働く力 F は

$$F = 4\pi\mu U \sum_{n=1}^{\infty} (H_n \hat{i} + I_n \hat{j}) \varepsilon^n \quad (2.38)$$

によって与えられる。ここで漸化式 (2.37) を用いて、 $\sum_{n=1}^{\infty} H_n \varepsilon^n$,

$\sum_{n=1}^{\infty} I_n \varepsilon^n$ を成分とするベクトルは

$$\begin{pmatrix} \sum H_n \varepsilon^n \\ \sum I_n \varepsilon^n \end{pmatrix} = \varepsilon \left[I - \varepsilon T \right]^{-1} \left[\begin{pmatrix} H_1 \\ I_1 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{m-1} \begin{pmatrix} e_m \\ f_m \end{pmatrix} \right] \quad (2.39)$$

の形にかける。ここで

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} b_1 + d & c_1 \\ c_1 & -b_1 + d \end{pmatrix}$$

であり、 $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}^{-1}$ は逆マトリックスを表わす。したがって (2.14) を用いて

$$\bar{H} = \frac{4\pi\mu U \varepsilon}{1 - 2d\varepsilon - (b_1^2 + c_1^2 - d^2)\varepsilon^2} \left[\{1 + \varepsilon(b_1 - d)\} \hat{i} + c_1 \varepsilon \hat{j} + N \right] \quad (2.40)$$

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \left\{ \left[\{1 + \varepsilon(b_1 - d)\} e_n + c_1 \varepsilon f_n \right] \hat{i} + \left[c_1 \varepsilon e_n + \{1 - \varepsilon(b_1 + d)\} f_n \right] \hat{j} \right\} \quad (2.41)$$

が得られる。 $a_1 = 0$, $a_2 = e_2 \hat{i}$ を (2.41) に代入し、かつ $O(\varepsilon^2)$

以上を省略すると、

$$N = \varepsilon^2 \left[\{1 + \varepsilon(b_1 - d)\} e_2 \hat{i} + c_1 \varepsilon e_2 \hat{j} \right] \text{ or } N = \varepsilon^2 e_2 \hat{i} \quad (2.42)$$

となるから、これを (2.40) に代入して、 $O(\varepsilon^3)$ まで正確な力の式を求めることができる。ただし e_2 は (2.32) に基づいて与えられる。

また基礎方程式が Navier-Stokes 方程式でなく Oseen 方程式であるときには、(2.40) で $N = 0$ とおけば、 $O(Re)$ まで正しい解が得られていることになる。

(例 1) 円柱 (半径 a^*)

字像関数 $Z = 3$ であるから、 $h(3) = 0$ となり、(2.12) より

$$a = a^*/l, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_1 = 0 \quad (2.43)$$

が得られる。(2.43) を (2.40), (2.42) に代入して得られる結果

は、S. Kaplan¹⁾ の結果と一致する。

(例 2) 楕円柱 (長軸 $2a^*$, 短軸 $2b^*$)

一様流の方向と長軸のなす角を α とする。写像関数

$Z = z + \frac{b^2}{z}$ であるから, $h(\zeta) = \frac{b^2}{\zeta}$ となり, (2.12) より

$$a = (a^* + b^*)/2\ell, \quad b_1 = -\frac{1}{2}(1 + \sigma^2 \cos 2\alpha), \quad c_1 = \frac{1}{2}\sigma^2 \sin 2\alpha \quad (2.44)$$

が得られる。ただし $\sigma^2 = (a^* - b^*) / (a^* + b^*)$ である。(2.44) を

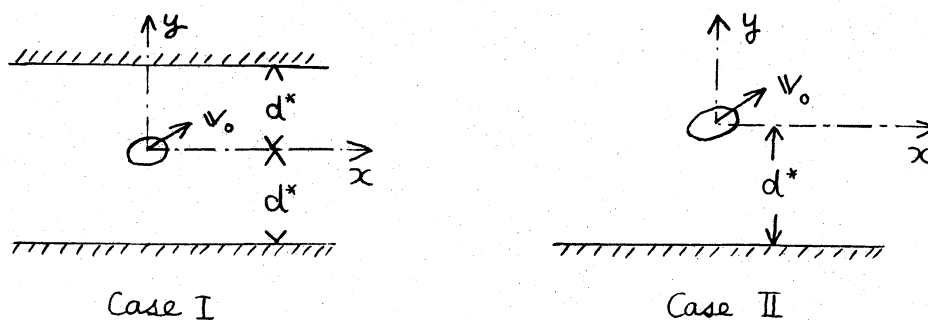
(2.40), (2.42) に代入して楕円柱に対する結果が得られる。と

くに $N = 0$ とおくとときには, Oseen 方程式を基礎として導出

された今井教授³⁾の結果と一致する。

§ 3. 壁効果

壁として 1 枚の無限平板または 2 枚の平行無限平板を考へる。いま 2 次元物体が第 1 図 Case I, Case II に示すような位置で速度 W_0 をもっているとする。基礎方程式は Stokes 方程式であるから、物体が非定常運動をしていても、定常運動として取扱ってよい。



第 1 図

いま物体の速度 $W_0 = W \ell + U \ell$ で表わす。ここで ℓ は z

方向の単位ベクトル、 $\bar{i}_0$ は x, y -面内にある単位ベクトルとする。つぎに無次元化された速度 $\bar{w}$ 、 $\bar{q}$ (x, y 面内のベクトル) を次式で定義する。

$$\bar{q}^* = W \bar{w} \bar{h}_0 + U \bar{q} \quad (3.1)$$

(3.1) を Stokes の方程式に代入し、 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ を考慮すると、流体の運動は、 x, y -平面内の運動と z 方向の運動に分離できる。

(i) x, y -平面内の流れ

$$\Delta \bar{q} - \nabla \bar{p} = 0, \quad \nabla \cdot \bar{q} = 0 \quad (3.2)$$

$$\text{物体上: } \bar{q} = \bar{i}_0, \quad \text{壁: } \bar{q} = 0 \quad (3.3)$$

(ii) z 方向の流れ

$$\Delta \bar{w} = 0 \quad (3.4)$$

$$\text{物体上: } \bar{w} = 1, \quad \text{壁: } \bar{w} = 0 \quad (3.5)$$

ここで Δ, ∇ は、 x, y -平面内の operator で、 $\bar{w}, \bar{q}, \bar{p}$ はいずれも x, y の関数である。

これから $l/d^* = 1/d \ll 1$ とし、 $1/d$ による展開の解を求めることにする。

(i) x, y -平面内の流れ

(A) 両壁効果 (第1図 Case I)

フーリエ変換を用いてよく、いま Stokes 方程式をみたし、かつ物体上で $\bar{q} = 0$ をみたす解を $\bar{q}_0, \bar{p}_0$ とするとき、 $\bar{q}_0$ は

$r \gg 1$ で (2.10) と同じ漸近形をとる。

$$\left. \begin{aligned} q_0 &\sim A \left[\left(-\log \frac{r}{a} + b_1 \right) \tilde{l}_1 + \frac{x_1 r}{r^2} + c_1 \delta \right] + O\left(\frac{1}{r^\nu}\right) \\ p_0 &\sim 2A \frac{x_1}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^{\nu+1}}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

ここで A も $\tilde{l}_1$ もまだ未定である。いま e_x, e_y を x, y 方向の単位ベクトルとし、 $\tilde{l}_1 = l e_x + m e_y$ とかく。 ν は対称物体では $\nu = 2$ ととり、その他の物体では $\nu = 1$ ととってよい。

q_0 の (3.6) で示された部分の x, y 成分を u_0, v_0 とすると、 u_0, v_0 はフーリエ変換を用いてつぎのように表示される。⁽²⁾

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= A \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ l \left(\frac{1}{|\alpha|} - i y \right) - i m \frac{\alpha}{|\alpha|} y \right\} e^{i \alpha x - |\alpha| |y|} d\alpha - l k_1 - m c_1 \right] \\ v_0 &= A \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ m \left(\frac{1}{|\alpha|} + i y \right) - i l \frac{\alpha}{|\alpha|} y \right\} e^{i \alpha x - |\alpha| |y|} d\alpha - m (k_1 + 1) + l c_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

ここで $k_1 = c - \log a - b_1 - 1$ 、また c はつぎのフーリエ変換のときでてくる定数である。

$$\log r = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|} e^{i \alpha x - |\alpha| y} d\alpha + c \quad (3.8)$$

つぎに壁の上で $q_0 = 0$ の条件を満足させるための付加関数として、(i) (3.7) のような積分形で表示され、(ii) $f_1(\alpha), \dots, f_p(\alpha)$ の p 個の α の任意関数を含み、(iii) Stokes 方程式をみたす関数をもつてくる。この付加関数を $q_i(u_i, v_i)$ とするとき、

$$u_i = l u_i' + m u_i'', \quad v_i = l v_i' + m v_i'' \quad (i=1, 2) \quad \}$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_1' &= A \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ |\alpha| f_1 + \left(\frac{1}{|\alpha|} + 3|\alpha| - y - 2\alpha^2 y \right) f_2 \right\} e^{i\alpha x - |\alpha| y} d\alpha + \frac{K_1}{2} \right] \\
 u_2' &= u_1' (y \rightarrow -y, f_1 \rightarrow f_3, f_2 \rightarrow f_4) \\
 v_1' &= A \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2} \left\{ \alpha f_1 - \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} y - \alpha + 2\alpha |\alpha| y \right) f_2 \right\} e^{i\alpha x - |\alpha| y} d\alpha - \frac{C_1}{2} \right] \\
 v_2' &= -v_1' (y \rightarrow -y, f_1 \rightarrow f_3, f_2 \rightarrow f_4, C_1 \rightarrow -C_1) \\
 u_1'' &= A \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} \left\{ \alpha f_5 + \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} y + \alpha + 2\alpha |\alpha| y \right) f_6 \right\} e^{i\alpha x - |\alpha| y} d\alpha + \frac{C_1}{2} \right] \\
 u_2'' &= u_1'' (y \rightarrow -y, f_5 \rightarrow f_7, f_6 \rightarrow f_8) \\
 v_1'' &= A \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ -|\alpha| f_5 - \left(\frac{1}{|\alpha|} + 3|\alpha| + y + 2\alpha^2 y \right) f_6 \right\} e^{i\alpha x - |\alpha| y} d\alpha + \frac{K_1 + 1}{2} \right] \\
 v_2'' &= -v_1'' (y \rightarrow -y, f_5 \rightarrow f_7, f_6 \rightarrow f_8, K_1 + 1 \rightarrow -K_1 - 1)
 \end{aligned} \right\} (3.9)$$

で表わされる。つまり

$$Q = \mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 \quad (3.10)$$

と速度とを、壁の上で速度 0 の条件から、 $f_1 \sim f_8$ を決定する。 $O(1/d^2)$ を省略するとき、この条件は

$$y = \pm d : \sum_{i=0}^2 u_i = 0, \quad \sum_{i=0}^2 v_i = 0 \quad (3.11)$$

で表わされる。(3.11) より $f_1, \dots, f_8$ はつぎのようになっている。

$$\left. \begin{aligned}
 f_1(\alpha) &= f_3(\alpha), \quad f_2(\alpha) = f_4(\alpha), \quad f_5(\alpha) = -f_7(\alpha), \quad f_6(\alpha) = -f_8(\alpha) \\
 f_1(\alpha) &= \frac{e^{-2j} - 1 + 2j + 4j^2 + 2d^2}{(1+2\alpha^2)(e^{-2j} - e^{2j} + 4j)}, \quad f_2(\alpha) = \frac{-e^{-2j} + 1 - 2j}{(1+2\alpha^2)(e^{-2j} - e^{2j} + 4j)} \\
 f_5(\alpha) &= \frac{e^{-2j} - 1 - 2j + 4j^2 + 2d^2}{(1+2\alpha^2)(e^{-2j} - e^{2j} - 4j)}, \quad f_6(\alpha) = \frac{-e^{-2j} + 1 + 2j}{(1+2\alpha^2)(e^{-2j} - e^{2j} - 4j)}
 \end{aligned} \right\} (3.12)$$

つまり (3.12) を (3.10) に代入し、 Q の物体付近の値を調べるとき、 $O(1/d^2)$ を省略して、つぎのようになっている。

$r \ll 1$;

$$\left. \begin{aligned} Q &= A \left[\left(\log \frac{2d}{a} - b_1 \right) \hat{i}_1 - c_1 \hat{j}_1 - l(1+s_1) \hat{e}_x - m s_2 \hat{e}_y \right] + O\left(\frac{1}{d^2}\right) \\ S_1 &= \int_0^\infty \frac{(1-2\zeta - e^{-2\zeta})^2 d\zeta}{3e^{2\zeta}(1-4\zeta e^{-2\zeta} - e^{-4\zeta})} = 1.1087, \quad S_2 = \int_0^\infty \frac{(1+2\zeta - e^{-2\zeta})^2 d\zeta}{3e^{2\zeta}(1+4\zeta e^{-2\zeta} - e^{-4\zeta})} = 1.8138 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

上式の Q が $Q = \hat{i}_0$ と存する $\hat{i}_0$ に、 $A, \hat{i}_1$ を決定すればよい。
 このために、まず $\hat{i}_1 = \hat{e}_x$ と存する $\hat{i}_0$ の $\hat{i}_0, A, TF$ (物体に働く力) を決定して $\hat{i}_{01}, A_1, TF_1$ とおく。つぎに $\hat{i}_1 = \hat{e}_y$ と存する $\hat{i}_0$ の $\hat{i}_0, A, TF$ を決定し、これを $\hat{i}_{02}, A_2, TF_2$ とする。いま

$$\hat{i}_0 = \alpha \hat{i}_{01} + \beta \hat{i}_{02} \quad (3.14)$$

で α, β を求めるとき、 TF は

$$TF = \alpha TF_1 + \beta TF_2 \quad (3.15)$$

で表えられるが、得られた結果は (C) で示す。

(B) 片壁効果 (第1図 Case II)

鏡像法を用いてよく。(3.6) で表えられる q_0, p_0 の鏡像を $q'(u', v'), p'$ とし、 $q''(u'', v''), p''$ を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} u'' &= -u' - 2(y+d) \frac{\partial v'}{\partial x} + (y+d)^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \\ v'' &= v' - 2(y+d) \frac{\partial v'}{\partial y} + (y+d)^2 \frac{\partial p'}{\partial y} \\ p'' &= p' + 2(y+d) \frac{\partial p'}{\partial y} - 4 \frac{\partial v'}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

このとき q'', p'' は Stokes の方程式にみたす。いま

$$Q = q_0 + q'' \quad (3.17)$$

で、 Q を定義するとき、壁の上で Q は $O(1/d^2)$ を省略して 0 とする。また物体付近では $O(1/d)$ を省略して、つぎのような一定の速度をもつ。

$r \ll 1$:

$$Q = A \left[\left(\log \frac{2d}{a} - b_1 \right) \hat{i}_1 - c_1 \hat{j}_1 - l(1+S_1) \mathbf{e}_x - m S_2 \mathbf{e}_y \right] + O\left(\frac{1}{d}\right) \quad (3.18)$$

$$S_1 = -\frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{3}{2}$$

(3.18) は (3.13) と全く同じ形をしてゐるから、両壁効果のときと同じ方法で物体に働く力を決定することができよう。

(C) 物体に働く力

物体に働く力 F は (3.13) および (3.18) を用いて決定され、Case I, Case II と共通して、つぎのような形をもつ。いま物体の速度 $\hat{i}_0$ を

$$\hat{i}_0 = l_1 \mathbf{e}_x + l_2 \mathbf{e}_y \quad (3.19)$$

で表わすとき、

$$F = \frac{4\pi\mu U}{k_1 k_2 - c_1^2} \left[(l_1 k_1 + l_2 c_1) \mathbf{e}_x + (l_2 k_2 + l_1 c_1) \mathbf{e}_y \right] \quad (3.20)$$

$$k_1 = \log \frac{2d}{a} - b_1 - 1 - S_1, \quad k_2 = \log \frac{2d}{a} + b_1 + 1 - S_2$$

で与えられる。ここで S_1 および S_2 は

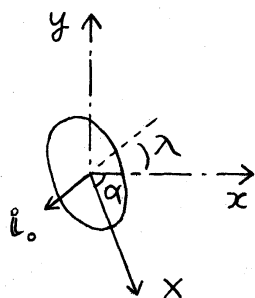
$$\left. \begin{array}{ll} \text{Case I} : & S_1 = 1.1087, \quad S_2 = 1.8138 \\ \text{Case II} : & S_1 = -\frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

であり、また a, b_1, c_1 は (2.12) で与えられる。ただしこのと

きの α_n は円柱へ写像するときを用いた Z -平面の X 軸と e_x 方向とのなす角である。

Case I において、物体の位置が壁と壁との中間でなければ、あいでも、物体に働く力は (3.20) と同じ形となるが、 S_1 と S_2 の値は Case I と Case II のばあいの中間の値をとると考えられる。

(例) 橋円柱



第2図

Case I, Case II のばあいとも、 i_0 方向に速度 U で運動しているとし、第2図のように記号をきめるとき、 a, b, c は (2.44) を用いてよい。また α は第2図の如く、 X 軸と x 軸とのなす角である。

物体に働く力は (2.44), (3.20), (3.21) を用いて

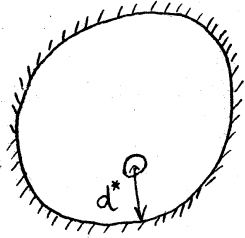
$$\vec{F} = \frac{4\pi\mu U \left\{ \left(\log \frac{d}{a_0} + A - \frac{\sigma^2}{2} \cos 2\alpha \right) \cos \lambda + \frac{\sigma^2}{2} \sin 2\alpha \sin \lambda \right\} e_x + \left\{ \left(\log \frac{d}{a} + B + \frac{\sigma^2}{2} \cos 2\alpha \right) \sin \lambda + \frac{\sigma^2}{2} \sin 2\alpha \cos \lambda \right\} e_y}{\left(\log \frac{d}{a} \right)^2 + C \log \frac{d}{a} + D + E \cos 2\alpha - \frac{1}{4} \sigma^2}$$

のようにきまる。ここに

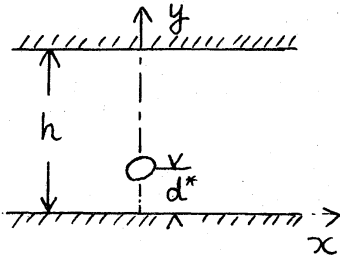
	A	B	C	D	E	
Case I:	-0.6207	-0.9156	-1.5363	0.5683	0.1475	} (3.23)
Case II:	$\log 2 - 1$	$\log 2$	$2 \log 2 - 1$	$\log 2 (\log 2 - 1)$	$-\frac{1}{2}$	

$\lambda = 0$ のときには高石教授の結果⁵⁾と一致する。

(ii) z 方向の運動



第3図



第4図

第3図のように2次元の容器の中で、z方向に運動するばあいを考え、 $1/d \ll 1$ の条件をみたして考える。一般的に、外部壁の断面の円柱への写像関数が既知であるとき、物体に働く力は $1/d$ による展開の解として求めることができる。しかしここでは (i) のばあいと同じように2枚の平行無限平板を考え、ただし物体は任意の位置にあってz方向に運動するとする。

物体が一方の壁に $1/d \ll 1$ の条件をみたしなから近づくときには、(i) の Case II に相当するばあいの解が得られる。

さて第4図のように x, y -軸をとり、 $z' = x + iy$ として

$$w_1 = \operatorname{Re} \left[A \log \frac{\sinh \frac{\pi(z' - di)}{2h}}{\sinh \frac{\pi(z' + di)}{2h}} \right] \quad (3.24)$$

を考えるとき、 $\Delta w_1 = 0$ および壁の上で $w_1 = 0$ をみたす。

また $Z (= X + iY)$ -平面上的物体 (Appendix 第A1図) が写像関数

$Z = z + z_0 + h(z)$ にまつて、 z -平面上的半径 a の円へ写像さ

れるとき、 $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ とおいて

$$\bar{w} = w_1 + A \left[\log \frac{(33)^{\frac{1}{2}}}{a} - \log \frac{R}{a} \right] \quad (3.25)$$

で定義される $\bar{w}$ を速度として考えよう。このとき $\bar{w}$ は

(i) $\Delta \bar{w} = 0$ をみたす, (ii) $O(1/d)$ を省略して、壁の上で速度 0 である, (iii) $O(1/d)$ を省略して、物体付近でつぎのような一定の速度をもつ。

$$\bar{w} = A \left[\log \frac{\pi a}{2h} - \log \left(\sin \frac{\pi d}{h} \right) \right] + O\left(\frac{1}{d}\right) \quad (3.26)$$

まず (3.26) を用いて、物体上で $\bar{w} = 1$ になるように A を定め、つぎに (3.25) から、物体に働く力 F_z をつぎのように決定することができる。

$$F_z = - \frac{2\pi\mu W}{\log \frac{2h}{\pi a} + \log \left(\sin \frac{\pi d}{h} \right) + O\left(\frac{1}{d}\right)} \quad (3.27)$$

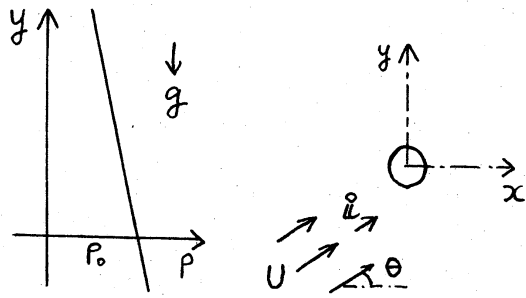
§ 4 成層流体中の運動

鉛直下向きにごくわずかに密度がまじっているような成層流体中で、2次元物体がゆつくりと斜めの方向に、一定の速度で動いているばありを考へる。静止流体での密度分布は

$$p = p_0 (1 - \epsilon y) \quad (4.1)$$

で与えられるとし、 $\epsilon l \ll 1$ を仮定する。

いま物体固定の座標系を考へ、かつ Boussinesq 近似をするとき、この問題は定常流で取扱うことができる。ここにつぎの



第 5 図

ような無次元化量を用いよう。

$$\bar{q} = \frac{q^*}{U}, \quad \bar{r} = \frac{r^*}{l}, \quad \bar{p} = \frac{l p'}{U \nu}, \quad \bar{P} = \frac{P'}{\rho_0 k l} \quad (4.2)$$

ただし p', P' は圧力、密度の一樣流状態における値との差を示す。

す。このとき非圧縮・非拡散の基礎方程式は

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{q} - \nabla \bar{P} &= Re \bar{q} \cdot \nabla \bar{q} + Re Ri \bar{P} (\sin \theta \bar{i} + \cos \theta \bar{j}) \\ \nabla \cdot \bar{q} &= 0, \quad \bar{q} \cdot \nabla \bar{P} = (\bar{u} - 1) \sin \theta + \bar{v} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

で与えられる。ここで θ は一樣流が水平方向と与える角、 $\bar{u}, \bar{v}$ は $\bar{q}$ の (x, y) 成分、 $\bar{i}$ は一樣流方向の単位ベクトル、 $\bar{j}$ は $\bar{i}$ に直交する単位ベクトルである。また $Ri (= g l^2 / U^2)$ は Richardson 数である。つぎに境界条件は次式で与えられる。

$$\bar{r} = f(\theta) : \quad \bar{q} = 0 \quad (4.4)$$

$$\bar{r} \rightarrow \infty : \quad \bar{q} \rightarrow \bar{i}, \quad \bar{p} \rightarrow 0, \quad \bar{P} \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

これから、 $Re \ll 1$ あたは $Ri \ll 1/Re$ を仮定して、この問題をきりつなぎ法で取扱うが、便宜的に

$$Ri = \alpha Re^2 \quad (0 < \alpha < \infty) \quad (4.6)$$

とおく。 $Ri \gg Re^2$ または $Ri \ll Re^2$ のときには、(4.6) において得られた結果に対し、 $\alpha \gg 1$ または $\alpha \ll 1$ として取扱えばよい。

(i) きりつなぎ法による解

§ 2 で与えられたごとく、内部領域を $r \sim O(1)$ の領域、外部領域を $r \sim O(1/R_0)$ の領域とし、内部変数 R 、外部変数 r を (2.5) のまうにとり、外部展開、内部展開も (2.6)、(2.7) と同一の展開とする。ただし現在のばあい (2.7) の $\bar{P}_0$ は 0 と考えてよい。またつぎのまうな $\bar{P}$ の展開が追加される。

$$\text{外部展開: } \bar{P} = R_0^{-1} (\varepsilon P_1(r) + \varepsilon^2 P_2(r) + \cdots + \varepsilon^n P_n(r) + \cdots) \quad (4.7)$$

$$\text{内部展開: } \bar{P} = \varepsilon^{-2} (\varepsilon P_1(R) + \varepsilon^2 P_2(R) + \cdots + \varepsilon^n P_n(R) + \cdots) \quad (4.8)$$

(ii) 内部展開

内部展開 (2.7)、(4.8) を (4.3)、(4.4) に代入するとき、 Q_n, P_n, P_n に対する方程式および境界条件が得られる。 Q_n, P_n に対する方程式および物体上の境界条件は (2.8)、(2.9) と同一で、Stokes の方程式をみたしてゐる。したがって、 Q_n, P_n については § 2 の (ii) で書かれてゐることが、こゝでも全く同じように成立する。また P_n は、 Q_n, P_n が決定されてのち

$$Q_1 \cdot \nabla P_n = U_n \sin \theta + V_n \cos \theta - (Q_2 \cdot \nabla P_{n-1} + \cdots + Q_n \cdot \nabla P_1) \quad (4.9)$$

で決定される。しかし P_n は $Q_{n+1}, P_{n+1}, \cdots$ の決定には関係しないから、現在の展開の範囲内では $P_1, P_2, \cdots, P_n$ を計算しなくても物体に働く力は決定できる。

(iii) 外部展開

外部展開 (2.6)、(4.7) を (4.3)、(4.5) に代入するとき

$$\left. \begin{aligned} \Delta q_n - \nabla p_n - \frac{\partial q_n}{\partial x} &= q_1 \cdot \nabla q_{n-1} + \cdots + q_{n-1} \cdot \nabla q_1 + \alpha P_n (\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \\ \nabla \cdot q_n &= 0, \quad \frac{\partial p_n}{\partial x} - u_n \sin \theta - v_n \cos \theta = - (q_1 \cdot \nabla p_{n-1} + \cdots + q_{n-1} \cdot \nabla p_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

$$r \rightarrow \infty : q_n \rightarrow 0, \quad p_n \rightarrow 0, \quad P_n \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

ここで q_0, p_0 はそれぞれ 0 と考へる。さて q_n に対する $r \rightarrow 0$ での境界条件は §2 のばあいと同じように (2.17) ~ (2.19) が成立つ。

境界条件 (4.11), (2.19) のもとに (4.10) をとくためには、
§2, (iii) でなされたように

$$q_n = q_{n1} + q_{n2}, \quad p_n = p_{n1} + p_{n2} \quad (4.12)$$

と分割し、 q_{n1} のみたす方程式および境界条件は (2.20) ~ (2.22) と同一であるとする。したがって q_{n1} に対する結果 (2.26) ~ (2.29) はこのまま成立する。

q_{n2} に対する方程式および境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \Delta q_{n2} - \nabla p_{n2} - \frac{\partial q_{n2}}{\partial x} &= q_1 \cdot \nabla q_{n-1} + \cdots + q_{n-1} \cdot \nabla q_1 + \alpha P_n (\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \\ \nabla \cdot q_{n2} &= 0, \quad \frac{\partial p_{n2}}{\partial x} - u_{n2} \sin \theta - v_{n2} \cos \theta = u_{n1} \sin \theta + v_{n1} \cos \theta - (q_1 \cdot \nabla p_{n-1} + \cdots + q_{n-1} \cdot \nabla p_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$r \rightarrow \infty : q_{n2} \rightarrow 0, \quad p_{n2} \rightarrow 0, \quad P_{n2} \rightarrow 0 \quad (4.14)$$

$$r \rightarrow 0 : q_{n2} \rightarrow a_n + o(1) \quad (4.15)$$

となる。任意の n に対し、上記の方程式ととき a_n を決定することは、むづかしいと思われるが、 $n=1$ のときには

(4.13) の非線型項は 0 となり、フーリエ変換を用いて $\mathcal{B}_{12}$ をつぎのように積分形で求めることができる。

$$\mathcal{B}_{12} = \frac{\alpha}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2(k_1 \cos \theta - k_2 \sin \theta) \{ (k_1 k_2 - k^2 \hat{i}) \sin \theta + (k_2 k_1 - k^2 \hat{j}) \cos \theta \}}{k^2(k^2 + i k_1) [k_1 k^2(k^2 + i k_1) - i \alpha (k_1 \cos \theta - k_2 \sin \theta)^2]} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dk_1 dk_2 \quad (4.16)$$

ただし $\mathbf{k} = k_1 \hat{i} + k_2 \hat{j}$ である。したがって α_1 はつぎのように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= e_1 \hat{i} + f_1 \hat{j} \\ e_1 \text{ or } f_1 &= \frac{\alpha}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \frac{(k_2^2 \alpha_1 - k_1 k_2) (k_1 \cos \theta - k_2 \sin \theta)^2}{k^2(k^2 + i k_1) [k_1 k^2(k^2 + i k_1) - i \alpha (k_1 \cos \theta - k_2 \sin \theta)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

(iii) 物体に働く力

$r \rightarrow 0$ における $\mathcal{B}_n$ の漸近形は (2.30) がそのまま成立するから、物体に働く力は (2.40) および (2.41) であり。いままでのところ α_1 が求まっているのみであるから、 N として

$$\left. \begin{aligned} N &= \varepsilon \left\{ [\{ 1 + \varepsilon(b_1 - d) \} e_1 + c_1 \varepsilon f_1] \hat{i} + [c_1 \varepsilon e_1 + \{ 1 - \varepsilon(b_1 + d) \} f_1] \hat{j} \right\} \\ \text{または} \\ N &= \varepsilon (e_1 \hat{i} + f_1 \hat{j}) \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

ととればよい。またこの式は $O(\varepsilon^2)$ まで正確であることを示さるとき、つぎの式と同等であることが分る。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} &= 4\pi\mu U \bar{\varepsilon} [\hat{i} + (c_1 + f_1) \bar{\varepsilon} \hat{j} + O(\bar{\varepsilon}^2)] \\ \text{ここで} \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{-\log a R e + \log k - \gamma - b_1 - c_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

とくに $\alpha \gg 1$ のときには

$$e_1 \sim \frac{1}{3} (\log \alpha + 2 \log 2 - \cos 2\theta) + O(\alpha^{-\frac{1}{3}}), \quad f_1 \sim \frac{1}{3} \sin 2\theta + O(\alpha^{-\frac{1}{3}}) \quad (4.20)$$

となるから、(4.19) の $\bar{\varepsilon}$ として

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{-\log a (R_i R_e)^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3} \log 2 - \gamma - b_1 + \frac{1}{3} \cos 2\theta} \quad (4.21)$$

を用いられよう。 (4.17) で示される $e_1(\theta, \alpha)$, $f_1(\theta, \alpha)$ は数値的に計算され、第7図、第8図に示されている。[†] これらの結果はつぎのようないくつかの事実を示している。抵抗は α の増加とともに増える。また運動方向が水平から鉛直方向に変化するにつれて、増加のしかたが著しくなる。ほぼ水平運動でかつ α が小さいときには、抵抗を減少させる効果がある。また揚力も α の増加とともにある一定の値へと増加してゆく。運動方向が水平または鉛直のときは揚力に変化を来さない。 $\theta = 45^\circ$ 付近で揚力を増やす効果は最大である。 α が小さいときには揚力を減少させる効果がある。

(iv) 対称な物体の回転

非成層流体中を進むときには回転しをりような対称な形をもつ物体でも、成層流体中の運動では回転する。物体がどのような回転数で回転するかを知るためには、まず $\text{rot } \bar{u}$ の

[†] e_1 , f_1 の数値計算は後で示される g_1 とともに、金子幸臣氏の *advise* のもとに西島勝一氏によつてなされた。

2-成分 $\bar{\gamma}$ が、外部解の $r \rightarrow 0$ で、どのようなふるまいを示すかを調べる必要がある。 $\text{rot } g_1$ の $r \rightarrow 0$ での性質を調べて、

$$r \rightarrow 0 : \quad \bar{\gamma} \rightarrow [g_1(\theta, \alpha) + o(1)] \varepsilon R_e + \dots \quad (4.22)$$

の形をもつことが分る。このときの内部解は、 $\bar{\gamma} = \text{一定}$ が解となる。これは内部領域が物体も一所になつて角速度 $\frac{1}{2} g_1 \varepsilon R_e$ で回転してゐることを表わしてゐる。(4.16) を用いて g_1 の値を決定するとき、物体の角速度 Ω^* は

$$\left. \begin{aligned} \Omega^* &= \frac{1}{2} g_1 R_e \varepsilon \frac{U}{\ell} \\ g_1 &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \frac{k_2 (k_1 \cos \theta - k_2 \sin \theta)^2}{(k^2 + i k_1) [k_1 k^2 (k^2 + i k_1) - i \alpha (k_1 \cos \theta - k_2 \sin \theta)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

で与えられる。とくに $\alpha \gg 1$ のときには

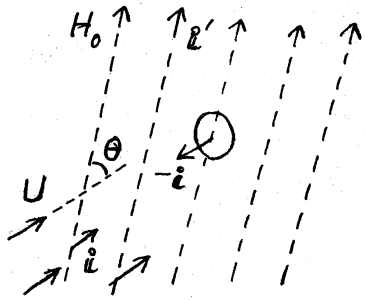
$$g_1(\alpha, \theta) = A(\theta) \alpha^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \sin 2\theta + O(\alpha^{-\frac{1}{3}})$$

の形をもつ。なお $g_1(\alpha, \theta)$, $A(\theta)$ の値は第9図に示されてゐる。この結果によれば、物体は右方向に関して正の方向に回転する。またその大体の傾向は揚力効果のときとほぼ同一である。ただ α が小さいときには、負の方向の回転はでないと思われ。

最期につぎのことを注意しておきたい。上記の回転の角速度は $O(R_e)$ であるから、リマサで物体固定の境界条件でとってきた (iii) までの結果は、回転してゐるがあつてもそのまゝ成立する。

§ 5. 電磁流体中の運動

一様な磁場があり、電気伝導性流体中に物体が磁場に斜め



の方向に、一定の速度で運動するばあ
いを考える。いま物体を固定した座標
系をとり、かつつぎのような無次元量
を用いる。

第6図

$$\frac{q^*}{U} = \bar{q}, \quad \frac{H^*}{H_0} = \bar{H}, \quad \bar{p} = \frac{\ell p^*}{U \nu}, \quad \frac{H^*}{\ell} = \bar{H} \quad (5.1)$$

ただし H^* は磁場の強さを示す。このとき定常、非圧縮の基
礎方程式は

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{q} - \nabla \bar{p} &= R_e \bar{q} \cdot \nabla \bar{q} - \frac{M^2}{R_m} (\nabla \times \bar{H}) \times \bar{H} \\ \Delta \bar{H} &= R_m [(\bar{q} \cdot \nabla) \bar{H} - (\bar{H} \cdot \nabla) \bar{q}] \\ \nabla \cdot \bar{q} &= 0, \quad \nabla \cdot \bar{H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

となり、また境界条件は

$$\bar{r} \rightarrow \infty: \quad \bar{q} \rightarrow \bar{i}, \quad \bar{H} \rightarrow \bar{i}', \quad \bar{p} \rightarrow \bar{p}_\infty, \quad (5.3)$$

$$\bar{r} = f(\theta): \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{B}_{n0} = \bar{B}_{ni}, \quad \bar{H}_{t0} = H_{ti} \quad (5.4)$$

である。ここで物体上の磁場の条件は、磁束密度の法線成分
および磁場の強さの接線成分の連続を表わしている。また

$R_m (= U \ell \mu_m \sigma)$ は磁気レイノルズ数、 $M (= \mu_m H_0 \ell (\sigma / \mu)^{1/2})$ は
Hartmann 数で、 μ_m は透磁率、 σ は電気伝導率である。

以下において、 $R_e \ll 1$, $R_m \ll 1$, $M \ll 1$ を仮定して、この

問題をきりつなぎ法で取扱うか、便宜的に

$$R_m = \alpha R_e, \quad M^2 = \beta R_e^2 \quad (0 < \alpha, \beta < \infty) \quad (5.5)$$

とありて取扱うことにする。 $M \gg R_e$ または $R_m \gg R_e$ のときには得られた結果に対し $\beta \gg 1$ または $\alpha \gg 1$ を適用すればよい。

(i) きりつなぎ法による解

§2, §4 で与えられたごとく、内部領域を $r \sim O(1)$ の領域、外部領域を $r \sim O(1/R_e)$ の領域とし、内部変数 R 、外部変数 r を (2.5) のようにとり、外部展開、内部展開も (2.6), (2.7) と同一の展開とする。ただしつぎのような $\bar{H}$ の展開が追加される。

$$\text{外部展開: } \bar{H} = \bar{u}' + \varepsilon h_1^{(e)} + \varepsilon^2 h_2^{(e)} + \dots + \varepsilon^n h_n^{(e)} + \dots \quad (5.6)$$

$$\text{内部展開: } \bar{H} = \bar{u}' + R_e (\varepsilon H_1(R) + \varepsilon^2 H_2(R) + \dots + \varepsilon^n H_n(R) + \dots) \quad (5.7)$$

$$\bar{u}' = l_1 \bar{u} + l_2 \bar{\phi} \quad (l_1 = \cos \theta, l_2 = \sin \theta) \quad (5.8)$$

であり、また物体の電気伝導率は流体のそれと同程度またはそれ以下とする。

(ii) 内部展開

内部展開については §4 のときと同じように、 Q_n, P_n に対しては §2, (ii) で書かれていたことが全く同じように成立する。 Q_n, P_n がきまれば、磁場 H_n はつぎの式に従う。

$$\Delta H_n = -\alpha (\bar{u}' \cdot \nabla) Q_n \quad (5.9)$$

H_n を決定するためには、(5.9) および物体内部の磁場 H_{ni}

に対する式 (物体が絶縁体なら $\Delta H_n = 0$) を境界条件 (5.3) および matching によって与える $R \rightarrow \infty$ での条件のもとに、とかなければならない。しかし §4 の P_n のときのように、現在考慮されている精度の範囲内で物体に働く力を決定するには、これとよく必要はない。ただ外部解 h_n の $r \rightarrow 0$ での境界条件を定めるために、(5.9) を用いて $R \rightarrow \infty$ での H_n の性質を調べる必要がある。

(ii) 外部展開

外部展開 (2.6), (5.7) を (5.2), (5.3) に代入するとき、 g_n, p_n, h_n に対する式が得られる。これらの式をよくたのに §2, §4 のばあいと同じように

$$g_n = g_{n1} + g_{n2}, \quad p_n = p_{n1} + p_{n2} \quad (5.10)$$

と分割し、 g_{n1}, p_{n1} のみたす方程式および境界条件は、(2.20) ~ (2.22) と同一であると考ええる。したがって g_{n1} に対する結果は今度も (2.26) ~ (2.29) がそのまま成立する。

つぎに g_{n2}, p_{n2}, h_n に対する方程式および境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \Delta g_{n2} - \nabla p'_{n2} - \frac{\partial g_{n2}}{\partial x} + \frac{\beta}{\alpha} (\vec{u} \cdot \nabla) h_n &= \frac{\beta}{\alpha} [(\nabla \times h_{n-1}) \times h_1 + \dots + (\nabla \times h_1) \times h_{n-1}] \\ \Delta h_n - \alpha \frac{\partial h_n}{\partial x} + \alpha (\vec{u} \cdot \nabla) g_{n2} &= -\alpha (\vec{u} \cdot \nabla) g_{n1} + \alpha [(g_{n1} \cdot \nabla) h_{n-1} + \dots + (g_{n-1} \cdot \nabla) h_1 \\ &\quad - \{(h_1 \cdot \nabla) g_{n-1} + \dots + (h_{n-1} \cdot \nabla) g_1\}] \\ \nabla \cdot g_{n2} &= 0, \quad \nabla \cdot h_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad g_{n2} \rightarrow 0, \quad p'_{n2} \rightarrow 0, \quad h_{n2} \rightarrow 0 \quad (5.12)$$

$$\left. \begin{aligned} r \rightarrow 0 : g_{n2} &\rightarrow a_n + o(1), \\ h_n &\rightarrow \frac{\alpha A_n}{4} \left[\{ 3(i' \cdot r) \tilde{u}_n - x_n \tilde{u}' - (i' \cdot i) r \} \log r - (i' \cdot r) x_n \frac{1}{r^2} \right] \end{aligned} \right\} (5.13)$$

となる。ここで $p'_{n2} = p_{n2} + \frac{\beta}{\alpha} (i' \cdot h_n)$ を用いた。また $r \rightarrow 0$ の h_n の境界条件は、(5.10) を用い $R \rightarrow \infty$ の H_n のふるまいを調べ、これとの matching の結果得られたものである。

さて $n=1$ のときには、(5.11) の非線型項が 0 となり、フーリエ変換を用いて g_{12} をつぎのような形に求めることができる。

$$g_{12} = -\frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta)^2 (k_1 k_2 - k^2 i) e^{i k \cdot r} dk_1 dk_2}{k^2 (k^2 + i k_1) [(k^2 + i k_1)(k^2 + i \alpha k_1) + \beta (k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta)^2]} \quad (5.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{したがって } e_1 &= e_1 i + f_1 j \quad \text{とするとき, (5.14) から} \\ e_1 \text{ or } f_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi (-\sin^2 \varphi \text{ or } \sin \varphi \cos \varphi) \left[\left(1 + \frac{1-\alpha}{F}\right) \log \frac{1+\alpha+F}{2} + \left(1 - \frac{1-\alpha}{F}\right) \log \frac{1F-1-\alpha}{2} \right], \\ F &= \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta (\cos \theta + \sin \theta \tan \varphi)^2} \end{aligned} \right\} (5.15)$$

が得られる。さらに (5.15) を積分して、つぎの解が得られる。[†]

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \Im_m P + \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\log Q + R), \quad f_1 = \operatorname{Re} P \\ P &= \left\{ \left(\frac{\alpha^2 - 1}{G^2} + 1 \right) / Q + 2R / G^2 \right\} \beta \sin \theta e^{i\theta}, \quad Q = \alpha - \beta e^{2i\theta} \\ R &= \frac{\alpha - 1}{G} \log \left(\frac{\alpha + 1 - G}{\alpha + 1 + G} \right), \quad G = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\beta e^{2i\theta}} \quad (\operatorname{Re} G > 0) \end{aligned} \right\} (5.16)$$

[†] (5.15) より (5.16) の導出は、金子幸臣氏による。

(iii) 物体に働く力

§4 の は"あり"と同じように物体に働く力は (2.40) および (2.41) であり、また N としては (4.18) をとればよい。さらに (4.19) もそのまま成立する。とくに $\beta \gg 1$, $\alpha = 1$, $\theta = 0^\circ$ のときには、(5.16), (4.19) よりつぎの結果が得られる。

(a) $\beta \gg 1$ のとき

$$e_1 \sim \log \sqrt{\beta} + \sin^2 \theta, \quad f_1 \sim -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{-\log \alpha M - \gamma + \log 4 - b_1 - \sin^2 \theta} \quad (5.17)$$

(b) $\alpha = 1$ のとき

$$e_1 = \frac{1}{4} \log(1 - 2\beta \cos 2\theta + \beta^2) + \frac{\beta(1+\beta) \sin^2 \theta}{1 - 2\beta \cos 2\theta + \beta^2}, \quad f_1 = \frac{1}{2} \frac{\beta(1-\beta) \sin 2\theta}{1 - 2\beta \cos 2\theta + \beta^2} \quad (5.18)$$

(c) $\theta = 0^\circ$ (平行磁場) のとき

$$e_1 = \frac{1}{2} \left\{ \log |\beta - \alpha| + \frac{(1 - \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta})}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta}} \log \left| \frac{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta} + 1 + \alpha}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta} - 1 - \alpha} \right| \right\}, \quad f_1 = 0 \quad (5.19)$$

物体が円柱のときには、(2.40), (4.18), (4.19), (5.17), (5.18) から得られる結果は、Oseen 方程式を基礎として得られた橋本教授の結果⁶⁾と、また (2.40), (4.18), (4.19), (5.19) から得られる結果はやはり Oseen 方程式を基礎として得られた吉信教授の結果⁷⁾とそれぞれ一致する。

β, α が任意のとき、物体に働く力の定性的性質は、 $\alpha = 1$ のときと比較してあまり変わらないから、ここでは省略する。

§ 6. 結論

(i) §2, §4, §5 のばあい、それぞれ外部解に現われる定数 (a_1 或 a_2) を求めるために2重積分を必要とした。その order に関して1つだけ精度を上げるためには、2重積分の代りに4重積分を処理しなければならぬ。さらにεについて精度を上げてゆくためには、多重度がどんどん増加する多重積分を処理してゆく必要があり、その真に困難が伴うと考えられる。

(ii) 成層流体、電磁流体中の運動で、浮力と電磁気力が拮抗、揚力、回転などに及ぼす効果は、大体において物理的に予想される通りである。しかしばあいによっては、物理的に予想だけでは判断がつかないで、計算によつてはいめて、力の定性的性質がはつきりするばあいもある。例えば成層流体で R_i が小さいときに、浮力の拮抗と揚力に及ぼす影響が逆転することなど、そのより例であると思われる。

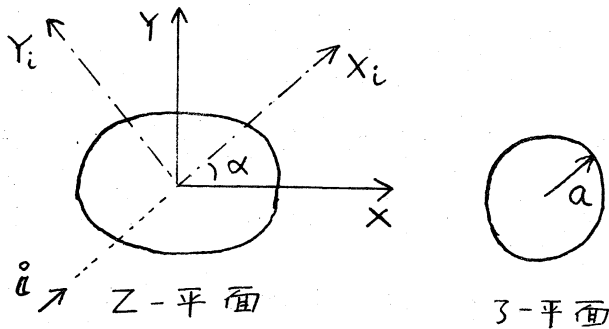
Appendix

a_n, b_n, c_n の決定法:

$Z = X + iY$ とし、第A1図のように Z -平面上の物体が

$$Z = z + z_0 + h(z) \quad (A1)$$

によつて、 z -平面上の半径 a の円に写像されるとする。こ



第A1図

ここで $h(z)$ は定数で、 $h(z)$

は $z \gg 1$ で $h(z) \sim O(1)$

とする。

いま Stokes の方程式

を満足する複素速度

W を $W = u - iv$ で定義するとき、 Z の正則な任意関数 $f(z), g(z)$ を用いて、 W はつぎのように表わすことができる。³⁾

$$\begin{aligned} W &= f'(z) + \bar{z} g'(z) - \bar{g}(\bar{z}) \\ &= F'(z) + (\bar{z} + \bar{z}_0 + \bar{h}(\bar{z})) \frac{G'(z)}{1+h'(z)} - \bar{G}(\bar{z}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} W &= f'(z) + \bar{z} g'(z) - \bar{g}(\bar{z}) \\ &= F'(z) + (\bar{z} + \bar{z}_0 + \bar{h}(\bar{z})) \frac{G'(z)}{1+h'(z)} - \bar{G}(\bar{z}) \end{aligned}} \right\} (A2)$$

ここで

$$\begin{aligned} G(z) &= -A e^{i\alpha} \log z \\ F'(z) &= A e^{-i\alpha} \left[\log \frac{z}{a^2} + \frac{a^2 e^{2i\alpha}}{z^2} + \frac{\bar{z}_0 e^{2i\alpha}}{z(1+h'(z))} + e^{2i\alpha} H(z) \right] \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} G(z) &= -A e^{i\alpha} \log z \\ F'(z) &= A e^{-i\alpha} \left[\log \frac{z}{a^2} + \frac{a^2 e^{2i\alpha}}{z^2} + \frac{\bar{z}_0 e^{2i\alpha}}{z(1+h'(z))} + e^{2i\alpha} H(z) \right] \end{aligned}} \right\} (A3)$$

と置く。ただし $H(z)$ は $|z| > R$ で正則な関数とする。このとき

$$W = A e^{-i\alpha} \left[\log \frac{z}{a^2} + e^{2i\alpha} \left\{ \frac{a^2}{z^2} - \frac{\bar{z}}{z} - \frac{\bar{h}(\bar{z}) - \bar{z} h'(z)}{z(1+h'(z))} + H(z) \right\} \right] \quad (A4)$$

となる。いま物体境界上 $z = a e^{i\theta}$ で $W = 0$ となるように $H(z)$

を定める。このためには次式が成立たねばならない。

$$H(a e^{i\theta}) = \frac{\bar{h}(a e^{-i\theta}) - a e^{-i\theta} h'(a e^{i\theta})}{a e^{i\theta} (1 + h'(a e^{i\theta}))} \quad (A5)$$

$H(z)$ は内外で正則であるから

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{-n} \quad (A6)$$

のよう展開できる。ここで A_n は (A5) を用いて

$$C_n = \frac{a^{n-1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(n-1)i\theta} \frac{\bar{h}(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta} h'(ae^{i\theta})}{1 + h'(ae^{i\theta})} d\theta \quad (A7)$$

のよう決定できる。

$|Z| \gg 1$ で $Z = Z + O(1)$ であるから、 $Z = Re^{i\theta}$ とおいて、(A4)、

(A6) から、

$$R \gg 1: \quad W = Ae^{-i\alpha} \left[\log \frac{R^2}{a^2} - e^{-2i(\theta-\alpha)} + C_0 e^{2i\alpha} + O\left(\frac{1}{R}\right) \right] \quad (A8)$$

が得られる。ここで

$$C_0 = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{h}(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta} h'(ae^{i\theta})}{e^{i\theta} (1 + h'(ae^{i\theta}))} d\theta = re^{i\beta} \quad (A9)$$

とおき、第 A1 図 のように単位ベクトル i および座標軸 X_i を定めるとき

$$R \gg 1: \quad \mathcal{F} = 2A \left[\left(\log \frac{R}{a} \right) i - \frac{X_i R}{R^2} + \frac{1}{2} \{ 1 + r \cos(\beta + 2\alpha) \} i - \frac{r}{2} \sin(\beta + 2\alpha) j \right] + O\left(\frac{1}{R}\right) \quad (A10)$$

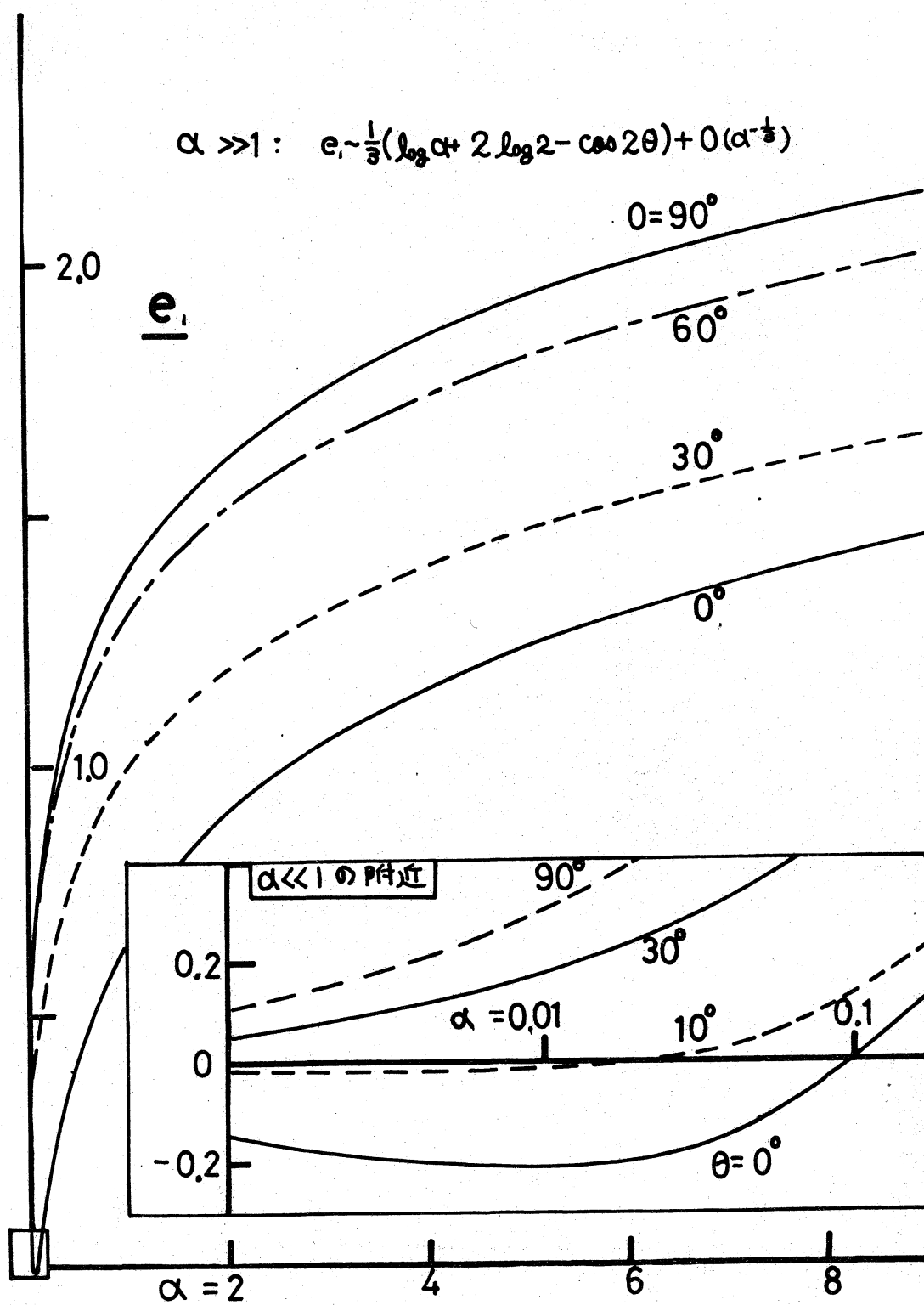
いま A, i は任意であるから、 $-2A = A_n$, $i = i_n$, $X_i = X_n$,

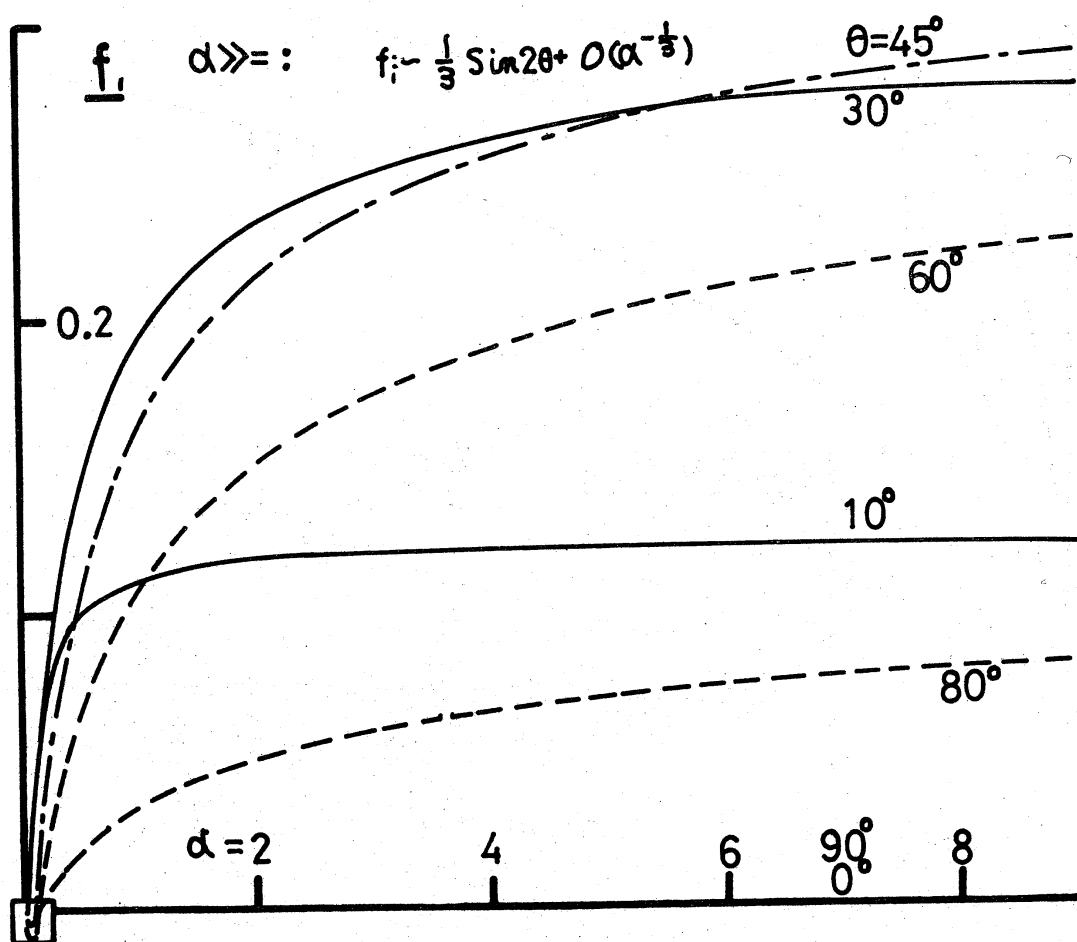
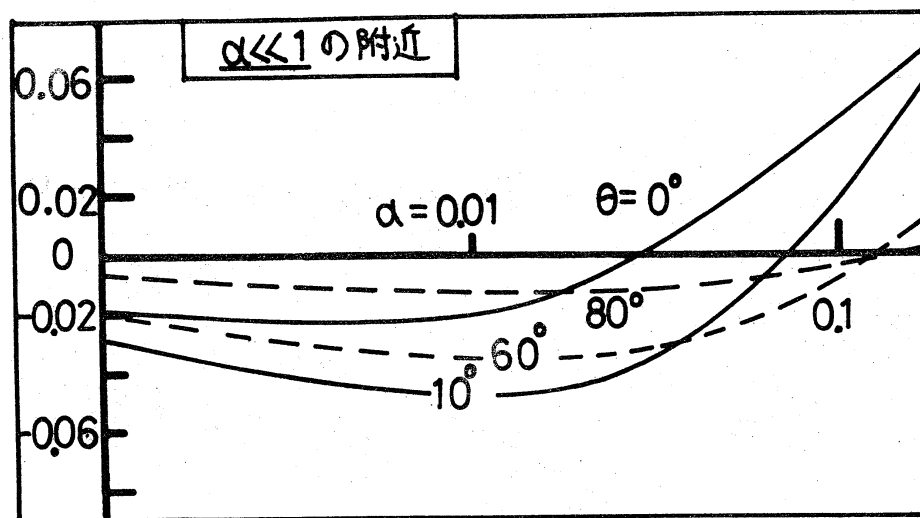
$\alpha = \alpha_n$ とかけば、(A10) は

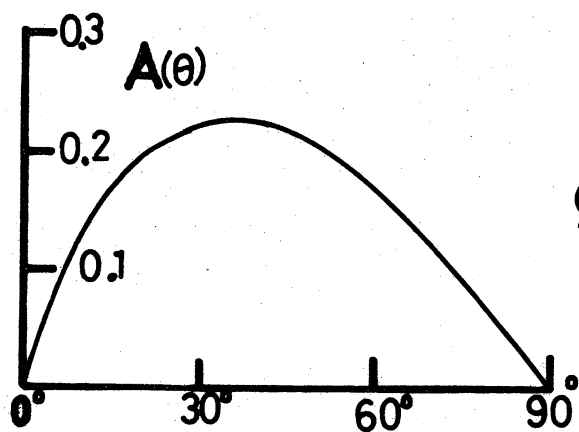
$$R \gg 1: \quad \mathcal{F} = A_n \left[\left\{ -\log \frac{R}{a} - \frac{1}{2} - \frac{r}{2} \cos(\beta + 2\alpha_n) \right\} i_n + \frac{X_n R}{R^2} + \frac{r}{2} \sin(\beta + 2\alpha_n) j_n \right] + O\left(\frac{1}{R}\right) \quad (A11)$$

の形となる。(A11) と (2.10) との比較により、(2.12) が得られる。

1. S. Kaplan : Fluid Mechanics and Singular Perturbations
(Academic Press, New York, 1967) P52.
2. I. Proudman & J.R.A. Pearson : J. Fluid Mech. 2
(1957), 237.
3. I. Imai : The Second International JSME Symposium
(Sept. 1972), Fluid Machinery and Fluidics, 2. 15.
4. Y. Takaiishi : J. Phys. Soc. Jap. 10 (1956), 1092.
5. Y. Takaiishi : J. Phys. Soc. Jap. 13 (1958), 496.
6. H. Hasimoto : Rev. mod. Phys. 32 (1960), 860.
7. H. Yosinobu : J. Phys. Soc. Jap. 15 (1960), 175.







$$\alpha \gg 1 : \\ g_i \sim A(\theta) \alpha^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \sin 2\theta + O(\alpha^{-\frac{1}{3}})$$

