

金融の現場における一様分布列の応用について

二宮祥一

Syoiti NINOMIYA

Center for Research Advanced Financial
Technology

Tokyo Institute of Technology

2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo

152-8552

JAPAN

ninomiya@craft.titech.ac.jp

東工大理財工学研究センター

Contents

1. 多重数値積分と Monte Carlo 法
2. 低食い違い量列と準 Monte Carlo 法
3. 金融の現場への適用例

1

1. 多重数値積分と Monte Carlo 法

a. 多重数値積分問題

b. 台形近似の非現実性

c. Monte Carlo 法

1.a. 多重数値積分問題

$f : d$ 次元単位区間 $[0, 1]^d$ 上定義された関数

$$\int_{[0,1]^d} f(x) dx$$

この数値計算を現実的な計算時間で実行したい。

例: 金利モデルのもとでの債券価格

この場合、 $[0, 1]^d$ 内の一点 x が、一つのシナリオに相当する。

1.b. 台形近似の非現実性

台形近似式

$$\int_{[0,1]^d} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n_1=0}^N \cdots \sum_{n_d=0}^N C(n_1, \dots, n_d) \frac{1}{N^d} f\left(\frac{n_1}{N}, \dots, \frac{n_d}{N}\right)$$

但し、

$$C(n_1, n_2, \dots, n_d) = \frac{1}{2^{\#\{i \mid n_i = 0 \text{ or } N\}}}.$$

f がある程度なめらかなとき、この近似による誤差 ε は、

$$\varepsilon = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

今、この近似式に於ける計算量は $M = (1+N)^d$ に比例するので

$$(1) \quad \varepsilon = O\left(\frac{1}{M^{2/d}}\right),$$

すなわち

$$M = O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^d\right).$$

4

5

Monte Carlo 法の誤差評価

中心極限定理により、

$$\frac{\frac{1}{M} \sum_{n=1}^M f(x_n) - \int_{[0,1]^d} f(x) dx}{\sqrt{\frac{V(f)}{M}}} \rightarrow N(0, 1)$$

as distribution, when $M \rightarrow \infty$.

よって、Monte Carlo 法の近似誤差の大きさの平均値は $\sqrt{V(f)/M}$.

Monte Carlo 法の誤差の確率的な評価

$$(2) \quad O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right).$$

Remark: (1)(2) より Monte Carlo 法が意味を持つのは $d \geq 5$ の場合。

6

1.c. Monte Carlo 法

大数の強法則より $f \in L^2([0, 1]^d)$ について

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M f(x_n) = \int_{[0,1]^d} f(x) dx \quad \text{a.s.}$$

である。但し、 x_n は、 $[0, 1]^d$ 上の一様分布にしたがって独立に抜き出されたもの。

上式の左辺によって右辺を近似することを Monte Carlo 法という。

2. 低食い違い量列と準 Monte Carlo 法

a. 一様分布列 (uniformly distributed sequence)

b. 食い違い量 (discrepancy)

c. 低食い違い量列 (low-discrepancy sequence)

d. Koksma-Hlawka の定理

e. 準 Monte Carlo 法 (Quasi-Monte Carlo method, deterministic simulation)

7

2.d. Koksma-Hlawkaの定理

定理 3 (Koksma-Hlawka) $f : [0, 1]^d$ 上の関数 $V_{HK}(f) < \infty$ ($V_{HK}(f)$ は f の Hardy-Kraus の意味での全変動) とする。この時、
 $\forall \{x_n\}_{n=1}^M \subset [0, 1]^d$

$$\left| \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M f(x_n) - \int_{[0,1]^d} f(x) dx \right| \leq V_{HK}(f) D_M^* (\{x_n\}_{n=1}^M)$$

12

2.e. 準 Monte Carlo 法 (Quasi-Monte Carlo method, deterministic simulation)

数列 $S = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ が一様分布列ならば、

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M f(x_n) = \int_{[0,1]^d} f(x) dx$$

が成立する。この式を用いて右辺の近似計算を行う方法を準 Monte Carlo 法 (Quasi-Monte Carlo method, deterministic simulation) という。

13

準 Monte Carlo 法の誤差評価

Koksma-Hlawka の定理より $V_{HK}(f) \leq \infty$ であるような f を一様分布列 S によって準 Monte Carlo 法で近似したときその誤差 ε は

$$\varepsilon = O(D_M^*(S))$$

である。特に S として低食い違い量列をとれば、

$$\varepsilon = O\left(\frac{(\log M)^d}{M}\right)$$

となる。

14

3. 数理ファイナンスへの応用

a. 金利派生商品の価格計算例

b. 適用した数列 $((t, s)\text{-sequence})$

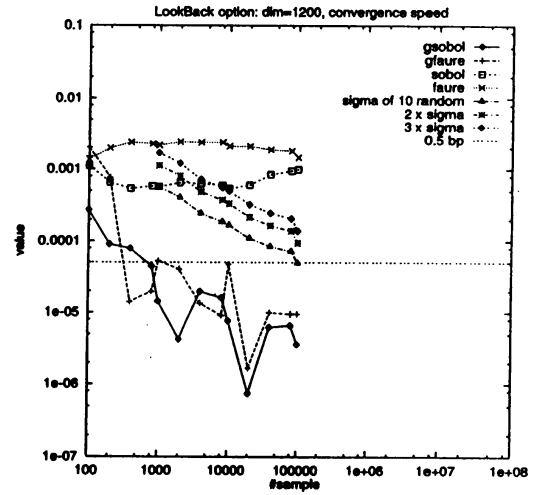
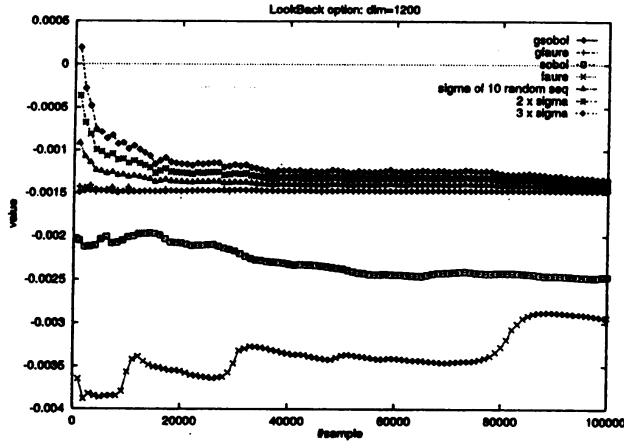
15

3.a. 金利派生商品の価格計算例

金利モデル

$$dr_t = a(r_t - \theta(t))dt + \sigma dW_t$$

の下で経路依存型の金利派生商品の価格を求めた。



16

3.b. 適用した数列 ((t, s)-sequence)

H. Niederreiterによる (t, s) -sequence の紹介
以下、単位区間 $[0, 1]^s$ の数列を考える。

$$b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \quad A = \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

$u \in A^m$ に対し、

$$B(u) = \{b\text{-進小数展開の最初の } m \text{ 桁が } u \text{ になる実数}\},$$

点集合 $P \subset [0, 1]^s$, 領域 $E \subset [0, 1]^s$ に対し、

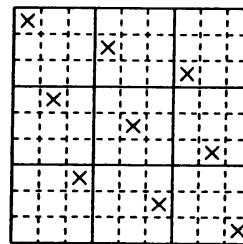
$$\Delta(P; E) = \#(P \cap E) - (\#P) \times \text{volume}(E)$$

とする。

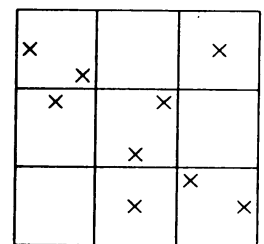
定義 4 ((t, m, s)-net) $P \subset [0, 1]^s$, $\#P = b^m$,
 $0 \leq t \leq m$
このとき

P は基数 b の (t, m, s) -net

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \forall d_1, \dots, \forall d_s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \sum_{i=1}^s d_i = m - t \\ \implies \left\{ \begin{array}{l} \forall u_i \in A^{d_i} \ (i = 1, \dots, s) \\ \Delta(\prod_{i=1}^s B(u_i); P) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



example of (0,2,2)-net in base 3



example of (1,2,2)-net in base 3

定義 5 ((t, s)-sequence) $[0, 1]^s$ 内の数列

$S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が基数 b の (t, s) -sequence である

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall m > t \\ \{x_n \mid kb^m \leq n < (k+1)b^m\} \text{ は基数 } b \text{ の} \\ (t, m, s)\text{-net になる} \end{array} \right.$$

定理 4 S が基数 b の (t, s) -sequence であるとき、

$$MD_M^*(S) \leq \frac{b^t}{s!} \frac{b-1}{[b/2] \times 2} \left(\frac{[b/2]}{\log b} \right)^s (\log M)^s + O(b^t (\log M)^{s-1})$$

17

18

3.c "Digital Construction" (Niederreiter)

設定 1 *Digital Construction of nets*: $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$: base, $m \geq 1$, $s \geq 1$: integers $\mathbb{Z}_b = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$, R : Comm. Ring. with 1, $\#R = b$ $\psi_r : \mathbb{Z}_b \rightarrow R$, bijection, $r = 0, 1, 2, \dots, m-1$ $\eta_j^{(i)} : R \rightarrow \mathbb{Z}_b$, bijection, $\begin{matrix} i=1,2,\dots,s \\ j=1,2,\dots,m \end{matrix}$ $c^{(i)} = \left(c_{jr}^{(i)} \right)_{\substack{j=1,\dots,m \\ r=0,\dots,m-1}} \in M(m, m; R)$ $i = 1, 2, \dots, s$ $e_b : (\mathbb{Z}_b)^\infty \rightarrow [0, 1)$, $e_b(a_0, a_1, \dots) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i b^{-i-1}$, $a : \mathbb{N} \rightarrow (\mathbb{Z}_b)^\infty$, b -adic expansion定義 6 (digital construction) $0 \leq n < b^m$ に対し、

$$x_n^{(i)} := e_b \left(\eta_{(m)}^{(i)} \left(c^{(i)} \psi^m(a(n)) \right) \right)$$

$$x_n := \left(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(s)} \right) \in [0, 1)^s$$

と点集合 $\{x_n\}_{n=0}^{b^m-1}$ を定める。但し、 $\psi^m := \oplus_{r=0}^{m-1} \psi_r$, $\eta_{(m)}^{(i)} := \oplus_{j=1}^m \eta_j^{(i)}$.

19

20

定理 5 (Niederreiter) $b = p^l = q$, p : prime, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $R = \mathbb{F}_q$ とする。 $0 \leq \forall t \leq m$, $\forall d_1, \dots, \forall d_s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\sum_{i=1}^s d_i = m - t$

のとき、

$$\text{rank}_{\mathbb{F}_q} (C_{(d_1, \dots, d_s)}) = m - t$$

$$\implies \{x_n\}_{n=0}^{b^m-1} : (t, m, s)\text{-net in base } b.$$

但し、

$$C_{(d_1, \dots, d_s)} = \begin{pmatrix} \left(c_{jr}^{(1)} \right)_{\substack{1 \leq j \leq d_1 \\ 0 \leq r \leq m-1}} \\ \left(c_{jr}^{(2)} \right)_{\substack{1 \leq j \leq d_2 \\ 0 \leq r \leq m-1}} \\ \vdots \\ \left(c_{jr}^{(s)} \right)_{\substack{1 \leq j \leq d_s \\ 0 \leq r \leq m-1}} \end{pmatrix} \in M(m-t, m; \mathbb{F}_b).$$

21