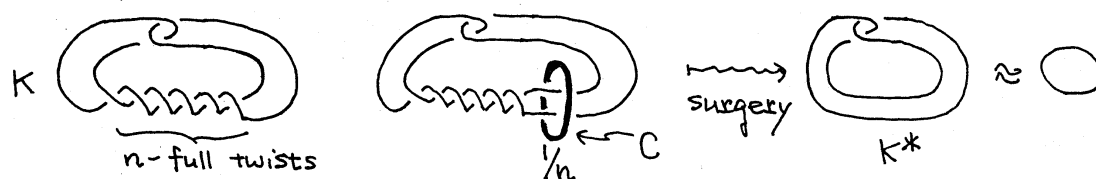


Composite knots trivialized by twists

神戸大・理 寺垣内 政 - (Masakazu Teragaito)

S^3 内の knot K に対し、それと交わらない unknotted circle C をとり、 C 上 $1/n$ -surgery (n は整数) を行なう。 C が自明であるから、全空間は再び S^3 であり、knot K の像として、別の knot K^* が得られる。この操作を、 K の n -twist と呼ぶ。特に K^* が自明になる場合、 K の trivializing n -twist と呼ぶ。あるいは、 K は n -twist により trivialize される という。

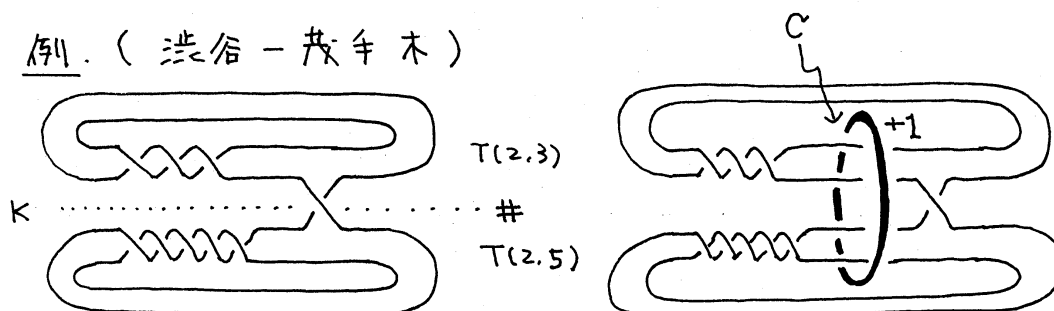
例. K : n -twist knot



Y. Mathieu は、「twist により trivialize される composite knot が存在するか？」という問題を提起した。これに対し、渋谷一茂等 [MS] は、 $T(2,3) \# T(2,5)$ (以下、 $T(p,q)$ は type (p,q) torus knot を表す。) が 1-twist により trivialize され

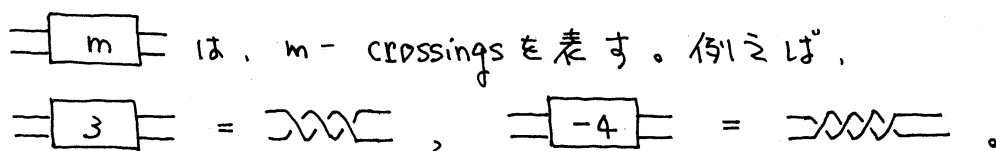
れを示した。

例. (渋谷-茂手木)

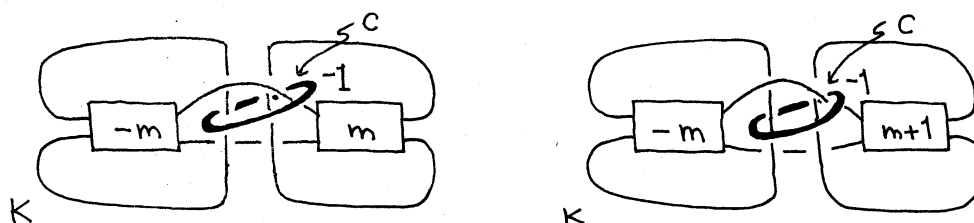


その後、大山により、2つの twist knots の connected sum の中で trivializing (± 1) -twist を ± 1 のが与えられた。

例. (大山)



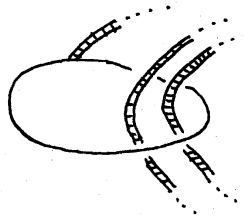
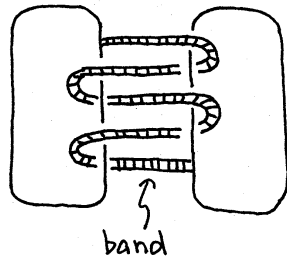
次の2つのタイプの knots は trivialize される。



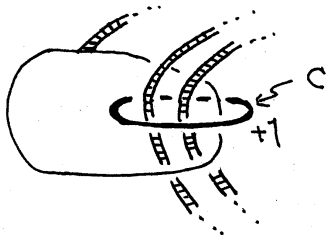
右側のタイプで、 $m=2$ とすれば、 $K = (\text{trefoil}) \# (\text{figure eight})$ である。

また、安原により、2-component trivial link から 1-fusion で得られる ribbon knots は全て trivialize されることが示された。特に、任意の 2-bridge knot K に対し、 $K \# -K'$ はという例である。 $(-K')$ は、 K の鏡像で向きを反転したもの。

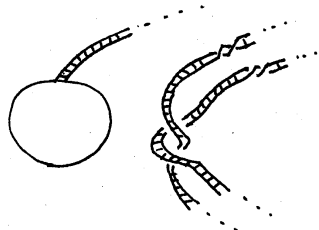
例. (安原)
(Outline)



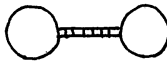
片方の component
に注目し, band
を束ねる。



surgery



surgery により, band
はもつれるだろうが
片方の component が自

由になり,  にまで直せる。

以上が Mathieu の問題 に対し、これまでに構成された例
である。これらには以下の共通点がある。

- (1) (± 1) -twist により trivialize されている。
- (2) 2 個の prime factor から成る。
- (3) 2-bridge summand しかもたない。

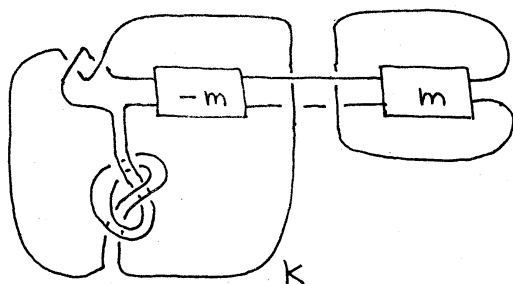
まず、(1) に関しては、茂手木により次のように $\frac{2}{n}$ -twist されている。

予想 (茂手木) composite knot が n -twist により
trivialize されるならば, $|n| = 1$ 。

実際、茂手木は、composite knot が n -twist により trivialize
されるならば, $|n| \leq 5$ であることを示している。

(2) に関しては、最後に述べる。

(3) に関しては、大山の例を改良してみよう。

例.

本山の例と全く同様に、 C を選んで (-1) surgery を行なうと、 K は trivialize される。

実際、この例において、 $K = (\text{twist knot}) \# (\text{satellite knot})$ という形をしており、satellite knot の部分は明らかに C の任意性をもつ。例えば、いくらでも高い bridge index を実現できる。しかしながら、 K は依然として 2-bridge summand を含んでいる。そこで、2-bridge summand を含まないような例を構成したい。

定理. 任意の整数 $n (\geq 1)$ に対し、次のような composite knot K が、無限に多く存在する；

- (i) K は 1-twist により trivialize される。
- (ii) $K = K_1 \# K_2$ と表せ、bridge index $b(K_i) > n$ 。
($i=1, 2$)

証明. ある $p (> n)$ をとり、 $K_1 = T(p, p+1)$ とする。
bridge index $b(K_1) = p$ である [5]。次に、 $\text{Int}(S^1 \times D^2)$ 内の circle J を図 1 のようにとる。ここで、 $2p+2$ は right-handed half-twist の数を表している。

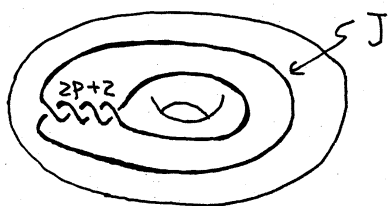


図 1.

$\tilde{K} \subset S^3$ とし, $b(\tilde{K}) = p$ かつ任意の knot とする。 $\tilde{K}$ の tubular neighborhood $N(\tilde{K})$ に対し, $f: S^1 \times D^2 \xrightarrow{\cong} N(\tilde{K})$ は homeo とする。 knot $f(J)$ ($\subset N(\tilde{K})$) $\subset S^3$ を K_2 とする。 すなわち, K_2 は, $(S^1 \times D^2, J)$ を pattern とする $\tilde{K}$ の satellite knot である ([BZ] 参照)。 ただし, ここでは, f から $N(\tilde{K})$ の 0-framing を定めようが必要はない。 実際, bridge index $b(K_2) > p$ である [5]。 (実際, $b(K_2) = 2p$.)

$\tilde{K}$ を figure-eight knot とした例も 1 つあげておく。

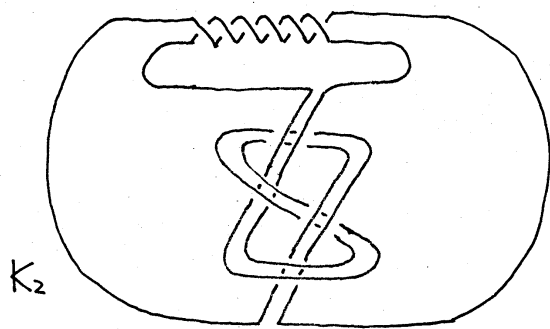


図 2.

$2p+2$ half-twists を消去すれば, K_2 は trivial になることを注意しておく。

$K = K_1 \# K_2$ とおく。 定理を証明するには, K が 1-twist により trivialize されることを示さなければならぬ。 そこで, 図 3 のように unknotted circle C をとり, C 上 1-surgery

を行なう。すると、図4(a)の K^* を得るが、図4(b)-(f)が示すように、 K^* は K_2 から $2p+2$ half-twists を消去したものと同値であり、従って unknotted である。 (証明終)

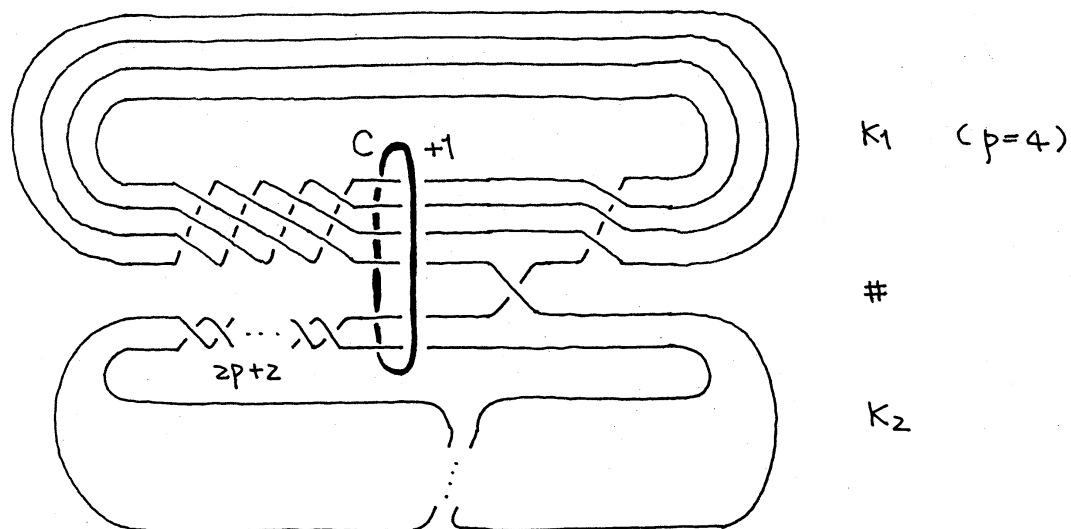
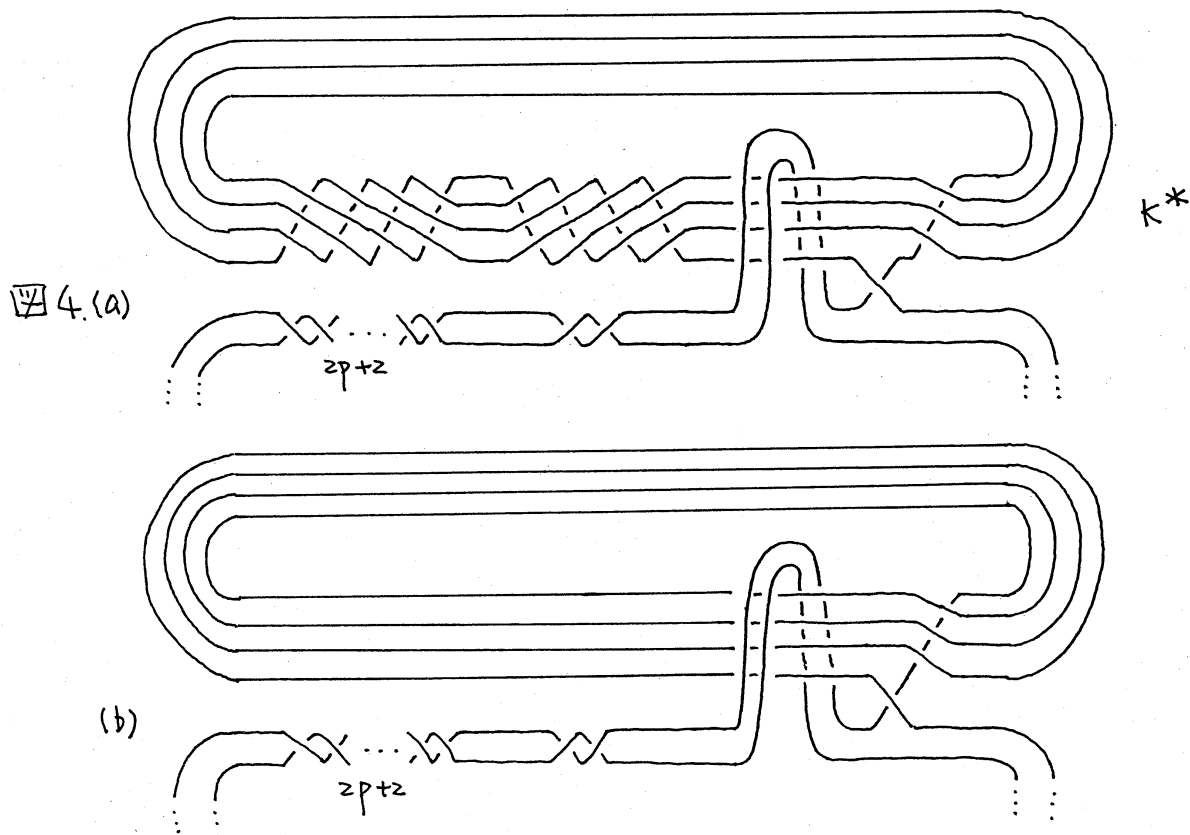
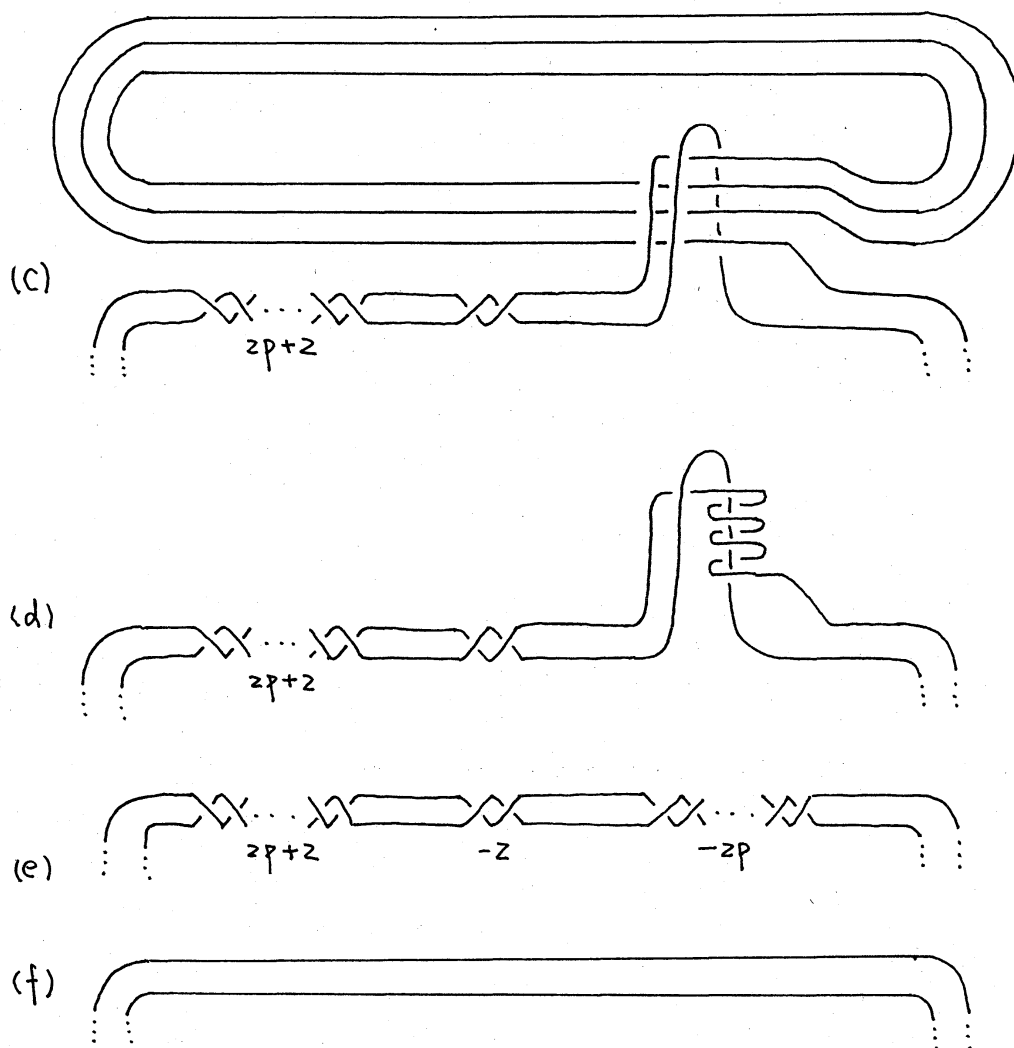
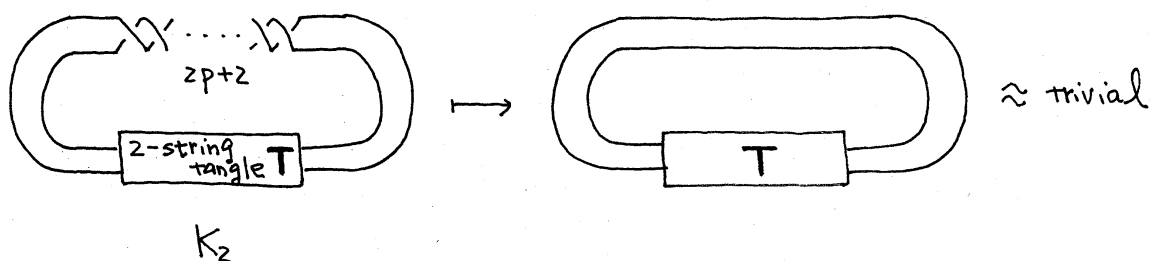


図3.





実は, K_2 とし z は次のようなものなら何でもよい。



従, z , 任意の $p (\geq 2)$ に $\# z$. $T(p, p+1) \# T(z, 2p+1)$,
 $T(p, p+1) \# T(z, 2p+3)$ は 1-twist により trivialize されること

がわかる。

全ての composite knots が trivializing twist を admit するわけではない。宮崎[M]は、 $T(2,3) \# T(2,13)$, $T(2,45) \#$ (Alexander polynomial = 1 の nontrivial slice knot) といふ knots が trivialize 不可能であることを示した。

最後に、いくつか問題をあげておきたい。

(1) $K = K_1 \# K_2$; K_1, K_2 は 共に satellite knot とする。

K は trivializing twist を admit するか？

(2) $K = K_1 \# K_2 \# \dots \# K_m$ ($m \geq 3$) ; K_i は prime knot。

K は trivializing twist を admit するか？

参考文献.

[BZ] G. Burde and H. Zieschang, Knots, de Gruyter Studies in Math. 5, Walter de Gruyter, 1985.

[M] K. Miyazaki, "Mathieu の問題" の解決, 阪大集会「結び目理論とその応用」(賢島)報告集, 1991.

[MS] K. Motegi and T. Shibuya, Are knots obtained from a plain pattern prime?, Kobe J. Math (to appear).

[S] H. Schubert, Über eine numerische Knoteninvariante, Math. Zeit. 61 (1954), 245-288.