

WITT デザインに関連したハイパーグラフの構成について

徳重典英 (NORIHIDE TOKUSHIGE)

琉球大学教育学部 (COLLEGE OF EDUCATION, RYUKYU UNIVERSITY)

ABSTRACT. ハイパーグラフ $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{12}$ が任意の相異なる二辺 $F, F' \in \mathcal{F}$ について $|F \cap F'| \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ をみたすとき、そのサイズ (辺数) はどのくらい大きくできるか? 本稿では $|\mathcal{F}| = (n/12)^6$ をみたすハイパーグラフの構成、および関連する話題について紹介する。

1. L -SYSTEM とその EXPONENT

自然数 k と $L \subset \{0, 1, \dots, k-1\}$ を固定する。ハイパーグラフ $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が (k, L) -system であるとは、任意の相異なる二辺 $F, F' \in \mathcal{F}$ が

$$|F \cap F'| \in L$$

を満たすことをいう。 n 点上の (k, L) -systems の最大サイズを $m(n, k, L)$ とかく。本稿では n が増大するときの n の関数としての $m(n, k, L)$ の振舞いに注目する。

k と L のみに依存する正定数 α, c, c', n_0 があつて

$$n > n_0 \text{ ならば } cn^\alpha < m(n, k, L) < c'n^\alpha$$

が成立つとき、この (k, L) -system の exponent は α であるといい $\alpha(k, L) = \alpha$ とかく。任意の k, L に対して $\alpha(k, L)$ は存在するか? という基本的な問題は未解決であるが、以下では exponent が存在する (k, L) のみを扱う。なお、任意の $1 \leq q \in \mathbb{Q}$ に対して、 $\alpha(k, L) = q$ をみたす (k, L) は無限個ある [8] が、無理数の exponent をもつ (k, L) の例はひとつも知られていない。

Frankl, 太田らは [9] で $k \leq 12$ の場合の $\alpha(k, L)$ の決定を試み、全部で $\sum_{k=2}^{12} 2^{k-1} = 4094$ 種類の (k, L) -systems のうち、4058 種類について決定した。本質的には $(11, \{0, 1, 2, 3, 5\})$ および $(12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\})$ が未解決のパラメタとして残った。これらは Witt デザインと密接な関係がある。[16] では $\alpha(12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}) = 6$ を示し、未解決であつた 36 の

Date: November 1, 2005.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 05D05 Secondary: 05B05.

Key words and phrases. Witt design; Seiner system; L -system; intersection structure.

The author was supported by MEXT Grant-in-Aid for Scientific Research (B) 16340027.

exponents をすべて決定した。本稿ではこれらの exponents に関連する構成法および周辺の話題について、主に組合せ論的な側面から解説する。

はじめに $m(n, k, L)$ の評価に関する基本的な結果を紹介する。

Theorem 1 (Deza–Erdős–Frankl[5]). $n > n_0(k)$ に対し、

$$m(n, k, L) \leq \prod_{l \in L} \frac{n-l}{k-l} (\approx cn^{|L|}).$$

上の結果は等号を成立させる (n, k, L) が無限にある。

Theorem 2 (Rödl[14]). k, t を固定して、 n が増大するとき

$$m(n, k, \{0, 1, \dots, t-1\}) = (1 - o(1)) \binom{n}{t} / \binom{k}{t}.$$

$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が $(k, \{0, 1, \dots, t-1\})$ -system ならば、任意の t 点集合 $T \subset [n]$ に対し、 $T \subset F \in \mathcal{F}$ をみたす F は「高々」ひとつである。この「高々」を「ちょうど」に置換えたものは Steiner system $S(t, k, n)$ であり、この場合には $|\mathcal{F}| = \binom{n}{t} / \binom{k}{t}$ である。即ち、

$$m(n, k, \{0, 1, \dots, t-1\}) \leq \binom{n}{t} / \binom{k}{t}$$

は自明な上界で、等号は Steiner system が存在するときに限り成立する。Steiner system はパラメタ (t, k, n) が特別な関係を満たす場合にしか存在しないが、 k, t を固定して n が十分大きいときには、Steiner system に近いサイズを持つ $(k, \{0, 1, \dots, t-1\})$ -system がいつでも作れるというのが上の定理の主張である。証明はいわゆる Rödl nibble とよばれる確率論的手法（例えば [1] の 4.7 節参照）を用いる。

上の二つの定理から、正定数 c, c' が存在して n が十分大きいとき

$$cn^5 \leq m(n, 12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}) \leq c'n^6$$

が成立つ。次節では Witt デザインを利用した構成法により下界を cn^6 に改善しよう。

2. 行列を利用した構成

簡単な例から始めよう。 $(7, \{0, 1, 3\})$ -system を構成するために、 $\mathbb{F}_2$ 上の 3×7 行列 A を次で定める。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

この行列は次の二つの性質を持っている。

- (1) どの二列も $\mathbb{F}_2$ 上線形独立。

- (2) A のどの二列 c_p, c_q についても、この二列が張る部分空間は A のちょうど三列 c_p, c_q および c_r を含む。実際 $c_r = c_p + c_q$ 。

そこで2次元空間を張る3本の列ベクトルの列番号を並べて

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & & 4 & & \\ & 1 & & 3 & & 5 & \\ & 1 & & & & & 6 & 7 \\ & & 2 & 3 & & & 6 & \\ & & 2 & & & 5 & & 7 \\ & & & 3 & 4 & & & 7 \\ & & & & 4 & 5 & 6 & \end{array}$$

Steiner system $S(2, 3, 7)$ あるいは Fano 平面が得られる。行列 A を使って 7-partite $(7, \{0, 1, 3\})$ -system $\mathcal{F}$ を次のように定義しよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{(a, b, c)A : a, b, c \in \mathbb{F}_2^d\} \\ &= \{(a, b, c, a+b, a+c, b+c, a+b+c) : a, b, c \in \mathbb{F}_2^d\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ の頂点集合は7個の部集合からなり、各部集合は d 次元空間 $\mathbb{F}_2^d$ のコピーとする。従って頂点数は $n = |V(\mathcal{F})| = 7 \times 2^d$ である。 $\mathcal{F}$ の辺は3本のベクトル (a, b, c) によって指定されるから $|\mathcal{F}| = (2^d)^3 = (n/7)^3$ である。

$\mathcal{F}$ が $L = \{0, 1, 3\}$ -system であることは、行列 A の持つ二つの性質から保障される。 $\mathcal{F}$ から二辺 $F = (a, b, c)A, F' = (a', b', c')A$ をとり、その交わりを調べよう。この二辺が（少なくとも）2点で交わったとする。それが例えば1番目と2番目の部集合上であったとすると、 $a = a', b = b'$ であるが、このとき $a + b = a' + b'$ であるから4番目の部集合上でもこの二辺は交わる。従ってちょうど2点で交わることは不可能である。次に二辺が（少なくとも）4点で交わったとする。このときその4つの部集合に対応する行列 A の4列の rank は3だから、対応する連立方程式が解けて $a = a', b = b', c = c'$ すなわち $F = F'$ でなければならない。

以上を踏まえて、 $(t, b, k)_q$ 行列を定義しよう。これは $\mathbb{F}_q$ 上の $(t+1) \times k$ 行列で次の二つの性質を持つものとする。

- (1) どの t 列も $\mathbb{F}_q$ 上線形独立。
- (2) どの t 列が張る t 次元部分空間も A の列ベクトルのうちちょうど b 本を含む。

はじめにあげた行列 A は $(2, 3, 7)_2$ 行列の例である。 A から $(7, \{0, 1, 3\})$ -system を作ったのと同様にして次のことがわかる。

Theorem 3 ([16]). $(t, b, k)_q$ 行列が存在するとき、 $L = \{0, 1, \dots, t-1, b\}$ に対して $m(n, k, L) \geq (n/k)^{t+1}$ である。

そこで $(12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\})$ -system $\mathcal{F}$ を構成するには例えば $(5, 6, 12)_3$ 行列を見つけられればよい。実際次の行列はその例である。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで

$$\mathcal{F} = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)A : a_i \in \mathbb{F}_3^d\}$$

とおくと、これは $(12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\})$ -system で

$$n = |V(\mathcal{F})| = 12 \times 3^d, \quad |\mathcal{F}| = (3^d)^6 = (n/12)^6$$

を満たす。

上の行列は $PG(2, 3)$ を veronese mapping¹ で $PG(5, 3)$ に埋込み、少し変形²して得られる 12 点 (Coxeter[3]) の同次座標を並べたものである。この行列から Steiner system $S(5, 6, 12)$ あるいは Witt デザイン W_{12} が作れる。この構成は Havlicek[12] による。さらに上の行列の左端の列と先頭の行を捨てて得られる行列は $(4, 5, 11)_3$ 行列であり、ここから $(11, \{0, 1, 2, 3, 5\})$ -system で exponent が 5 となるものを構成できる。

上の行列 A は extended ternary Golay code G_{12} の parity check matrix になっている。もちろん標準的な次の形の parity check matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

も $(5, 6, 12)_3$ 行列である。

上記の構成と、Theorem 1 から次を得る。

Theorem 4.

$$\frac{n^6}{2985984} \leq m(n, 12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}) \leq \frac{n^6}{570240}.$$

¹ $(x, y, z) \mapsto (x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2)$

² $PG(2, 3)$ の一本の直線の像は $PG(5, 3)$ の planar quadrangle Γ になるが、これを捨てて代わりに Γ の diagonal triangle の 3 点に置換える。 $PG(2, 3)$ の像はもともと 13 点あったから、この置換えによって $13 - 4 + 3 = 12$ 点が得られる。

例えば $S(2,3,7)$ は閉 $\{0,1,3\}$ -system の生成集合である。すなわち $S(2,3,7)$ の交差閉包 $\mathcal{F} = \binom{[7]}{0} \cup \binom{[7]}{1} \cup \binom{[7]}{2} \cup S(2,3,7)$ は閉 $\{0,1,3\}$ -system である。この $\mathcal{F}$ は 2 点集合を全部 cover するが 3 点集合の全部は cover しない ($\mathcal{F}$ には 3 点集合は 7 個しかない) から、 $\text{rank}(\mathcal{F}) = 3$ である。実際 $\text{rank}(7, \{0,1,3\}) = 3$ であり、これを実現するのは $\mathcal{F}$ のみである。同様に $\text{rank}(12, \{0,1,2,3,4,6\}) = 6$ であり、rank 6 の閉 $\{0,1,2,3,4,6\}$ -system の生成集合は Witt デザインに限る。

$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ とその辺 $F \in \mathcal{F}$ に対して、

$$\mathcal{J}(F, \mathcal{F}) := \{F \cap F' : F' \in \mathcal{F} - \{F\}\} \subset 2^F$$

とおく。さらにもし $\mathcal{F}$ が k -partite であつて、頂点集合が $[n] = V_1 \cup \dots \cup V_k$ と部集合に分割されているとき (従つてこのとき $1 \leq i \leq k$ について $|F \cap V_i| = 1$ となつていて)、 $I \in \mathcal{J}(F, \mathcal{F})$ の $[k]$ への射影 $\pi(I)$ を $\pi(I) := \{i : I \cap V_i \neq \emptyset\} \subset 2^{[k]}$ と定め、 $\pi(\mathcal{J}(F, \mathcal{F})) := \{\pi(I) : I \in \mathcal{J}(F, \mathcal{F})\}$ とおく。次の構造定理は基本的である。

Theorem 5 (Füredi[10]). $k \geq 2$ と $L \subset \{0,1,\dots,k-1\}$ を固定したとき、ある正定数 $c = c(k,L)$ が存在して、任意の (k,L) -system $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ から以下の条件を満たす $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ を取りだせる。ここで $\mathcal{F}^*$ は分割 $[n] = V_1 \cup \dots \cup V_k$ をもつ k -partite hypergraph でさらに

- (1) $|\mathcal{F}^*| > c|\mathcal{F}|$,
- (2) 任意の二辺 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^*$ について $\pi(\mathcal{J}(F_1, \mathcal{F}^*)) = \pi(\mathcal{J}(F_2, \mathcal{F}^*))$,
- (3) 任意の $F \in \mathcal{F}^*$ について $\mathcal{J}(F, \mathcal{F}^*)$ は閉 L -system,

となつている。

上の状況が成立つとき、 $\mathcal{J}(F, \mathcal{F}^*)$ を $\mathcal{F}^*$ の交差構造³という。 (k,L) -system の rank と exponent の関係を調べよう。 (k,L) を固定し、 $\alpha(k,L)$ の存在を仮定する。この exponent を達成する (k,L) -system $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ から Theorem 5 を使って $\mathcal{F}^*$ を取りだす。さらに $F \in \mathcal{F}^*$ をとり、 $\mathcal{J} = \pi(\mathcal{J}(F, \mathcal{F}^*))$, $t = \text{rank}(\mathcal{J})$ とおく。rank の定義から $A \notin \Delta_t(\mathcal{J})$ なる $A \in \binom{[k]}{t}$ がとれる。このとき $\pi(B) = A$ となるような任意の $B \in \prod_{a \in A} V_a$ に対して、 $B \subset F$ をみたす $\mathcal{F}^*$ の辺 F は高々ひとつである。従つて $\mathcal{F}^*$ のサイズは、高々このような B のとり方の可能性の数、即ち $\prod_{a \in A} |V_a| = O(n^t)$ しかない。従つて

$$\alpha(k,L) \leq \text{rank}(k,L)$$

である。逆に $\alpha(k,L)$ を $\text{rank}(k,L)$ を用いて下から評価する一般的な結果は全く知られていない。その意味では次の予想はかなり大胆である。

Conjecture 1 (Füredi[11]). $\alpha(k,L) > \text{rank}(k,L) - 1$.

³例えば $\text{rank}(9, \{0,1,3,4\}) = 3$ であり、rank 3 の閉 $\{0,1,3,4\}$ -system は非同型なものもちょうど 3 種類存在するが、その中のひとつ $S(2,3,9)$ の交差閉包だけが $\alpha(9, \{0,1,3,4\}) = 3$ を与える交差構造である [9]。

この予想は $\text{rank}(k, L) = 2$ のとき正しい。これは (k, L) -system の構成によって示すことができる [11]。[9] の当初の目論見はこの予想の反例を k が小さいところ、例えば $k \leq 12$ の範囲で見つけようというものだったが、[16] に至って結局 $k \leq 12$ の範囲に反例はないことがわかった。

最後に Steiner system を交差構造 (の生成集合) にもつ L -system について考えてみる。 $t < b < k$ を選び、 $L = \{0, 1, \dots, t-1\} \cup \{b\}$ とおく。まず、Theorem 1 から $\alpha(k, L) \leq |L| = t+1$ がわかる。ここで Steiner system $S(t, b, k)$ が存在すると仮定しよう。その交差閉包を $\mathcal{J} \subset 2^{[k]}$ とすると、これは閉 L -system である。任意の $T \in \binom{[k]}{t}$ に対し、 $T \subset B$ を満たす $B \in \mathcal{J}$ がただ一つ定まるから、 $\mathcal{J}$ は $[k]$ の t 点集合を全部 cover する。しかし $x \notin T$ とすると $\{x\} \cup T$ を含む $\mathcal{J}$ の辺はないから、 $\text{rank}(\mathcal{J}) = t+1$ がわかった。 $\text{rank}(k, L) \geq \text{rank}(\mathcal{J})$ だから、もし上の予想が正しいなら $\alpha(k, L) > t$ となるはずである。最近 Rödl と Tengan は、実際に (k, L) -system を構成することで次の結果を得た。

Theorem 6 (Rödl–Tengan[15]). Steiner system $S(t, b, k)$ が存在すると仮定し、 $L = \{0, 1, \dots, t-1\} \cup \{b\}$ とおく。このとき k, L のみに依存する正定数 ε が存在して、 $\alpha(k, L) \geq t + \varepsilon$ となる。

最後にいくつか問題を挙げます。

- (1) 任意の (k, L) に対して $\alpha(k, L)$ が存在することを示せ。
- (2) Füredi の予想は正しいか？
- (3) Theorem 6 の別証明、特に確率論的手法に依らない直接的な構成法を見つけよ。
- (4) $m(n, 12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\})$ の評価を改善せよ。特に n^6 の係数を決定せよ。
- (5) $\alpha(24, \{0, 1, 2, 3, 4, 8\})$ を求めよ。これは $S(5, 8, 24)$ と関連がある。なお、 $5 < \alpha \leq 6$ はわかっている。もし $(5, 8, 24)_q$ 行列が存在すれば $\alpha = 6$ である。
- (6) $\alpha(13, \{0, 1, 3\})$ を求めよ。これは $S(2, 3, 13)$ と関連がある。この Steiner system は非同型な 2 種類があり、そのどちらも対応する $(2, 3, 13)_q$ 行列をもたないことが知られている (Driessen–Frederix–van Lint [7])。なお、 $2 < \alpha \leq 3$ はわかっている。
- (7) Steiner system $S(t, b, k)$ が存在して $L = \{0, 1, \dots, t-1\} \cup \{b\}$ のとき、 $t < \alpha(k, L) \leq t+1$ がわかっているが、 $\alpha(k, L) < t+1$ となる例はあるか？
- (8) どんな Steiner system が $(t, b, k)_q$ 行列から作れるのか？

REFERENCES

- [1] N. Alon, J. H. Spencer. The probabilistic method (second edition). John Wiley & Sons, 2000.

- [2] R. C. Bose. On the application of finite projective geometry for deriving a certain series of balanced Kirkman arrangements. *Golden Jubilee Commemoration Volume (1958–59)*, Calcutta Math. Soc., 341–354, 1959.
 - [3] H. S. M. Coxeter. Twelve points in $PG(5, 3)$ with 95040 self-transformations. *Proc. Royal Soc. London A*, 427:279–293, 1958.
 - [4] M. Deza. Perfect matroid designs. *Matroid applications*, 54–72, *Encyclopedia Math. Appl.*, 40, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
 - [5] M. Deza, P. Erdős, P. Frankl. Intersection properties of systems of finite sets. *Proc. London Math. Soc.* (3), 36:369–384, 1978.
 - [6] M. Deza, P. Frankl, J. W. P. Hirschfeld. Sections of varieties over finite fields as large intersection families. *Proc. London Math. Soc.* (3), 50:405–425, 1985.
 - [7] L. M. H. F. Driessen, G. H. M. Frederix, J. H. van Lint. Linear codes supported by Steiner triple systems. *Ars Combinatoria*, 1:33–42, 1976.
 - [8] P. Frankl. All rationals occur as exponents. *J. of Comb. Th. (A)*, 42:200–206, 1985.
 - [9] P. Frankl, K. Ota, N. Tokushige. Exponents of uniform L -systems. *J. Combin. Theory (A)*, 75:23–43, 1996.
 - [10] Z. Füredi. On finite set-systems whose every intersection is a kernel of a star. *Discrete Math.*, 47:129–132, 1983.
 - [11] Z. Füredi. Turán type problems. In *Surveys in Combinatorics 1991 (LMS Lecture Note Series)*, 166:253–300, 1992.
 - [12] H. Havlicek. The Veronese surface in $PG(5, 3)$ and Witt's 5-(12,6,1) Design. *J. Combin. Theory (A)*, 84:87–94, 1998.
 - [13] J. H. van Lint, R. M. Wilson. A course in combinatorics (second edition). Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
 - [14] V. Rödl. On a packing and covering problem. *European J. of Comb.*, 5:69–78, 1985.
 - [15] V. Rödl, E. Tengan. A note on a conjecture by Füredi. manuscript, 2004.
 - [16] N. Tokushige. An L -system on the small Witt design. *J. Combin. Theory (A)*, in press.
- E-mail address:* hide@edu.u-ryukyu.ac.jp