

flow の stability

埼玉大 教養 岡部恒治

一般均衡解の存在性と一意性についての研究に移いて、
stability が重要な意味をもっていることは西村氏の講演の中
で明らかにされた。(例えば [1] を参照) ここでは、その
stability について、もう一度振り返る。(経済学の人への用語
の解説の意もある。)

1. flow と tangent space

$\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \text{Diff}(M)$ を考える。但し、

$$\begin{cases} \phi_0 = \text{id}: M \longrightarrow M \\ \phi_t \phi_s = \phi_{t+s} \end{cases}$$

ϕ_t は tangent vector field on M を定める。^(次のように)

$$\begin{array}{ccc} X: M & \longrightarrow & T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x M \\ \downarrow & & \\ x & \longmapsto & X(x) \in T_x(M) \end{array}$$

$$\text{但し } X(x) = d\phi_t(x)/dt|_{t=0}$$

ϕ の orbit through x とは $t \longmapsto \phi_t(x)$

によって、与えられる。 M 上の曲線であり、これは(*)の
微分方程式の解に対応する。

逆に微分方程式が与えられたとき、(*)の形にもってゆけ

る。こうして、解の存在定理によって、flow と tangent vector field は同じものと考えられる。(但し、non compact な場合には、少し scalar function で変形する。)

2. flow の orbits

orbit の形は次の3つの形にわけるのが普通である。

(I) fixed point x ($x \in \text{Fix}(\phi_t)$ と書く)

$$\phi_t(x) = x \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff X(x) = \vec{0}$$

(II) closed orbit

$$\exists x_0 \in M, \exists t_0 > 0; \quad \phi_{t_0}(x_0) = x_0$$

さらに (I) と区別するために、こういう (t_0 の最小値)

> 0 があるとする。これを period という。

(III) ordinary orbit

(I), (II) 以外

3. structurally stable etc.

以後 M を compact とする。 $X(M)$ を M 上の C^r -vector field で、 C^r -norm の λ, τ によるものとする。

(Def) flow の generic property とは、 $X(M)$ の Baire set で成り立つ property のこと。

(1311) $\#\{x; X(x) = \vec{0}\} < \infty$ は generic prop.

(Def) $\phi_t, \psi_t : M \longrightarrow M$ が topologically equivalent とは、

$$\exists h: M \longrightarrow M \text{ homeo}$$

s.t. h は ϕ_t の orbit を ψ_t の orbit に写す。

このとき, $\phi_t \stackrel{\text{t.e.}}{\sim} \psi_t$ と書く。

(Def) $X(M) \ni X$ が structurally stable

$$\Rightarrow X(M) \supset \exists U_{\text{nb.d.}} \ni X \text{ s.t. } U \ni \forall Y \text{ 1-}$$

$$\text{2-}, X \stackrel{\text{t.e.}}{\sim} Y$$

(例) compact 2-dim mfd's 上では, structurally

stable flow は dense open subset. しかし,

3-dim 以上では, そうはらぬ mfd's がある。

(Def) $x \in M$ が wandering pt. for ϕ_t

$$\Leftrightarrow x \in \exists U_{\text{nb.d.}} \subset M, \exists t_0 > 0$$

$$\text{s.t. } \left(\bigcup_{|t| > t_0} \phi_t(U) \right) \cap U = \emptyset$$

(即ち x のまわりの近傍を十分小さく取れば, その近傍を一定以上動かせば, 元の近傍とは決して交わらない, 戻って来ないという訳である。)

$x \in M$ が non wandering pt.

$$\Leftrightarrow x \text{ が wandering set ではない。}$$

(記号) $\Omega(\phi_t) = \{ \phi_t \text{ の non wandering pt 全体} \}$

これは closed $\mathbb{Z}$ -invariant set である。

(Def) $\phi_t \stackrel{\text{t.e.}}{\sim}_{\Omega} \psi_t$ (topological equivalent on Ω)

$$\Leftrightarrow \exists h: \Omega(\phi_t) \longrightarrow \Omega(\psi_t) \text{ homeo. orbit preserve.}$$

(Def) ϕ_t が Ω -stable とは, Ω に制限すると, structurally stable.

A. cross section と suspension

(Def) ϕ_t に対して, M の codim 1 submfd Σ が cross section であるとは, すべての orbit が Σ と transversal に intersect するとき,

ϕ_t に対して, $f: \Sigma \longrightarrow \Sigma$ が定まる. (最初に戻って来た点を対応させる.) これを Poincaré map といい, $f = P(\phi_t)$ とかく. ここで f の periodic point $\longleftrightarrow \phi$ の closed orbit

逆に, $f: \Sigma \longrightarrow \Sigma$ diffeo が与えられたとき, $M = \Sigma \times I / \sim$ 上に flow が作れる. これを suspension といい $\Sigma(f)$ と書く.

(性質) suspension と cross-section は逆の対応がある。

B. hyperbolicity

(Def) $\phi_t: M \longrightarrow M$ が与えられたとき, $x \in \text{Fix}(\phi_t)$ が hyperbolic $\iff \phi_1: M \longrightarrow M$ が hyperbolic かつ, $D\phi_t(x): T_x(M) \longrightarrow T_x(M)$ について,

$D\phi_t(x) = e^{tA}$ としたとき, A の固有値の real part が 0 とはならない。

(性質) $x \in \text{Fix}(\phi_t)$ が hyperbolic なら, $W^s(x)$
 $(\phi_t$ についての) は invariant, contract, for $\forall t > 0$

(写像が与えられたとき, その写像によってどちらか方向の部分空間を $W^s(x)$ と書く。上の性質は ϕ_t でのどちらか方向が ϕ_t によってちがいでゆく方向と一致することを示している。)

(Def) 上の $W^s(x)$ を ϕ_t についての x の stable mfd と
 いう。

(Def) γ が closed orbit for ϕ_t , $x \in \gamma$ とする。
 γ が hyperbolic closed orbit $\Leftrightarrow$ Poincaré
 map について, x が hyperbolic fixed pt.

$W^s(\gamma)$ も $W^s(x)$ と同じように定義できる。(S^1 上の
 $\mathbb{R}^{m-1}$ bundle であるから), $W^u(x)$, $W^u(\gamma)$ について
 は, ϕ_t を考えればよい。

⑥. Morse Smale flow

(Def) 次の条件をもつ flow を Morse Smale flow とする。

(1) $\Omega(\phi_t)$ は有限個の fixed point と有限個の closed
 orbit の和。

(2) (1) のすべては *hyperbolic*

(3) (1) の W^s と W^u はお互いに *transversally* にしか交わらない。(交点で, $T_x(W^s)$ と $T_x(W^u)$ が $T_x(M)$ を *span* する。)

(Th) (Peixoto) $\dim M = 2$ のとき,

ϕ_t が *structurally stable*

$\Leftrightarrow \phi_t$ が *Morse Smale*

(Th) (Smale) [3]

Morse Smale flow の中に, *open dense* に *gradient flow* が含まれている。

gradient flow とは $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
 $X(x) = (\text{grad } f)(x)$ と定義したものである。

gradient flow 以外の *Morse Smale flow* は,
 Reizins[✓] が作っている。

7. Anosov flow.

M に Riemann metric を入れておく。

$\phi_t: M \rightarrow M$ に対し,

$\psi_t: D\phi_t: T(M) \rightarrow T(M)$ を考えることが出

まゐる。

(Def) $TC(M) = E^u + E^s + E^o$ と分解できず,

$\psi_t|E^u$ は expanding ($\|\psi_t(v)\| \leq ce^{-\lambda t}$, $\forall v \in E^u, t < 0$)

$\psi_t|E^s$ は contracting ($\|\psi_t(v)\| \leq ce^{\lambda t}$, $\forall v \in E^s, t > 0$)

E^o は 1-dim で orbit の方向に一致

このとき Anosov flow といふ。

(例) $f: M \rightarrow M$ Anosov diffeo

$\Rightarrow \Sigma(f)$ は Anosov flow

(Th) Anosov [5] $\phi_t: M \rightarrow M$ Anosov flow

$\Rightarrow \phi_t$ は structurally stable

§ 再び Hyperbolicity

Hyperbolicity の criteria は 2人の Hirsch-Pugh

[6] にある。

(Th) $M \supset V \xrightarrow{g} M$ $V \supset X$ invariant g & g^{-1}

$E_1 \oplus E_2$ splitting of $T_x M$

$T_x g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : E_1 \oplus E_2 \rightarrow E_1 \oplus E_2$

$\exists 0 < \tau < 1, \exists \varepsilon > 0$, かつ $\max\{\|A^{-1}\|, \|D\|\} < \tau + \varepsilon$
 $\max\{\|B\|, \|C\|\} < \varepsilon$

$\Rightarrow X$ は hyperbolic

9 線型の場合.

$\frac{dx}{dt} = Ax$ なる微分方程式は Kuiper [7] に

次の結果がある。

(Th) $\frac{dx}{dt} = A'x, \frac{dx}{dt} = Ax$ の flow が top. equiv.

である。 $\Leftrightarrow \begin{cases} A'_0 \text{ と } A_0 \text{ が lin equiv} \\ \dim A^u = \dim A'^u, \dim A^s = \dim A'^s \end{cases}$

但し, A_0 は A の eigenvalue の real part 0 の eigen space に制限したものである。

A_+, A_- はそれぞれ, real part 正, 負の eigen space に制限したものである。

また lin equiv. とは B が non-singular matrix かつ

$$\frac{dy}{ds} = c B^T A B y \text{ となるとき, (c は定数)}$$

$$c B^T A B = C \text{ と書き, } C \text{ と } A \text{ とは}$$

lin equiv といい。

—References—

- [1] = 西村: 『微分トポロジーと経済学』 本講究録
- [2] Smale 『Differentiable Dynamical Systems』
Bulletin 1967
- [3] Smale 『Morse inequalities for dyn. sys.』
Bull. Amer. 66 (1960)
- [4] Peixoto 『structurally stability on 2-mfd』
Topology 1.
- [5] Anosov 『Geodesic flows on compact Riem. mfd.』
Trudy Mat. Inst. Steklov
- [6] Hirsch-Pugh 『Hyperbolicity -』
A.M.S. Proc. of Symposia on Pure Math. 14
- [7] Kuiper
Topology conference in Tokyo