

# $SL(3, \mathbb{R})$ の一様有界表現について

広大総科 江口 正晃 (Masaaki Eguchi)

広大総科 小泉 伸 (Shim Koizumi)

広大理 田中 祥平 (Shohei Tanaka)

## § 1. Introduction.

$G$  is noncompact connected real semisimple Lie group with finite center.  $\theta$  is Cartan involution.  $G = KAN$  is Iwasawa decomposition.

$\mathfrak{a}$  is  $A$  of Lie algebra.  $P = MAN$  is  $G$  of minimal parabolic subgroup

$\pi(\sigma, \mu) \equiv \text{ind}_{P \uparrow G} \sigma \otimes \mu \otimes 1$  ( $\sigma \in \hat{M}$ ,  $\mu \in F(\mathfrak{a}^*)$ ).  $\Omega \in F(\mathfrak{a}^*) \subset \Omega \subset \mathfrak{a}^*$

$w\Omega \subset \Omega$  ( $\forall w \in W \equiv M/M$ ) を満たす domain とするとき. 以下のように  $G$  の一様有界表現を構成することを考える.

$$\begin{array}{ccc} R : G \times \hat{M} \times \Omega & \longrightarrow & \mathcal{B}(L^2(\bar{N})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathfrak{g}, \sigma, \mu) & \longmapsto & R(\mathfrak{g}, \sigma, \mu) \end{array}$$

( $\bar{N} \equiv \theta N$ ,  $\mathcal{B}(L^2(\bar{N}))$  は  $L^2(\bar{N})$  の bounded linear operator 全体)

s.t.

1)  $\mathfrak{g} \in G$ ,  $\sigma \in \hat{M}$  fixed.

$$\lambda \longrightarrow R(g, \sigma, \lambda)$$

holomorphic in  $\Omega$

2)  $\lambda \in \Omega$ ,  $\sigma \in \hat{A}$  fixed.

$$g \longrightarrow R(g, \sigma, \lambda)$$

は、 $G$ の表現に依っていて、さらに

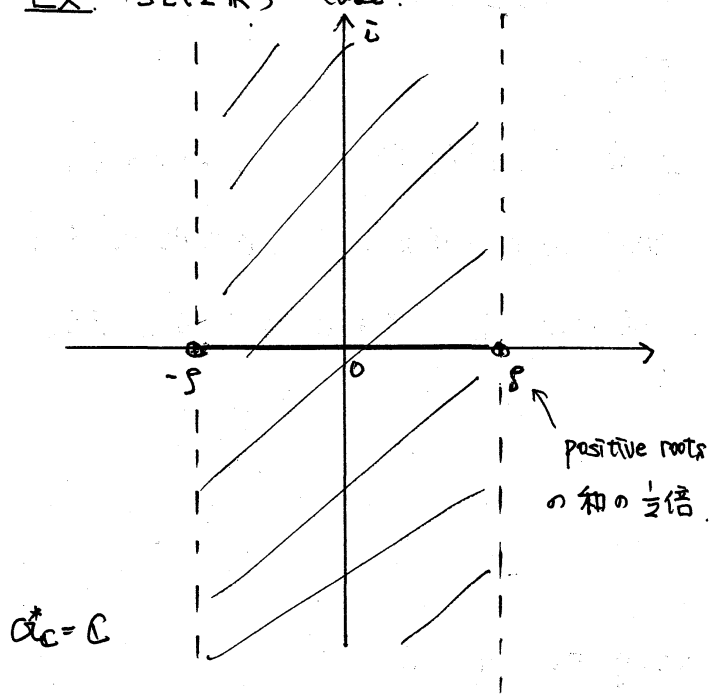
$$\|R(g, \sigma, \lambda)\|_{\infty} \leq C_{\sigma, \lambda} \quad \text{for all } g \in G$$

$C_{\sigma, \lambda}$  は  $\sigma, \lambda$  に depend する定数.

$$3) \quad R(g, w\sigma, \lambda) = R(g, \sigma, \lambda) \quad \text{for all } w \in W.$$

$$4) \quad R(\cdot, \sigma, \lambda) \cong \pi_{\sigma, \lambda} \quad \lambda \in \sqrt{-1}\alpha^*$$

Ex.  $SL(2, \mathbb{R})$  Case.



$SL(2, \mathbb{R})$  の場合、 $R$  の上の

定式化は少し不十分で、実際

$\hat{A} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  に置きかえて

成立する。(0,0) は Minimal

表現に対応する。その際  $\Omega$  は

左の図の斜線部の領域に

なり、特に  $R(g, (0,0), \lambda)$

( $\lambda \in \alpha_C^* \cap \Omega$ ) は補系列と。

同型になることが知られている。

$R$  の構成については, Kunze - Stein が,  $G = SL(2, \mathbb{R})$   $SL(n, \mathbb{C})$   $O(2n+1, \mathbb{C})$   $Sp(n, \mathbb{C})$ ,  $O(2m, \mathbb{C})$  について, Sally が,  $SL(2, \mathbb{R})$  の Universal covering group について, Lipsman が,  $SO_e(m+1, 1)$  で,  $\theta = 1$  の case について, さらに Wilson, Bamaži が, それぞれ独自に, Mellin 変換を用いて, Lipsman と同じ case を, Brega が, Wilson の方法を使って,  $SO_e(m+1, 1)$  の  $\theta$  が,  $w\theta = \theta$  ( $\forall w \in W$ ) を満たす場合について, 十分条件を, さらに Stanke が,  $SU(m+1, 1)$  で  $\theta = 1$  の case について, 与えられている。ここでは, real rank と Cartan subalgebra の conjugacy class が, ともに 1 でない例として,  $SL(3, \mathbb{R})$  の場合について, Kunze - Stein の  $SL(n, \mathbb{C})$  の場合の方法と analogous な方法で,  $R$  が構成できることを示す。

(注) . Brega の結果から,  $\Omega$  は,  $\theta$  に依存することがわかっている (上の他の case では問題ない) . 従って  $E_\chi$  も含めて,  $R$  の定式化は不十分であるが, 我々が述べることに限れば, 上の定式化で, 十分である。

## § 2. Notation

$$G = SL(3, \mathbb{R})$$

$$P = MAN \quad \text{minimal p.s.g.p. of } G$$

$$\text{i.e.} \quad M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 x_2 x_3 = 1 \quad x_i = \pm 1 \right\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R}) \mid a_i > 0 \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R}) \right\}$$

$$V = \bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ * & 1 & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R}) \right\}$$

と取る。  $\hat{M}$  の元は、

$$\sigma_{(m_1, m_2, m_3)} \left( \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{pmatrix} \right) = x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \quad \text{where } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in M$$

$$m_i \geq 0, \quad 0 \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq 1$$

と表わされる。

以下  $\hat{M}$  を  $\{(m_1, m_2, m_3) \mid 0 \leq m_1 + m_2 + m_3 \leq 1, m_i \geq 0\}$  と

同一視する。

$\sigma = \sigma_{(m_1, m_2, m_3)} \in \hat{M}$   $\nu \in \alpha_c^*$  に対して  $\text{ind}_P^G \sigma \otimes \nu \otimes 1$  は

$F$  のように定まる。

$$(\pi_{\sigma, \nu}(g)f)(v) = e^{(P+\Delta)(H(\nu g))} \sigma(m(\nu g)) f(\bar{\pi}(\nu g))$$

$$g \in G, \quad v \in V, \quad g = m(g) \exp H(g) m(g) \bar{\pi}(g) \quad f \in C_0^\infty(V)$$

$$\begin{array}{ccc} \psi : \{ (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3 \mid s_1 + s_2 + s_3 = 0 \} & \longrightarrow & \alpha_c^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ (s_1, s_2, s_3) & \longrightarrow & s_1 \alpha_1 + (s_1 + s_2) \alpha_2 \end{array}$$

$\alpha_1, \alpha_2$  は simple root

と仮定.  $\psi$  は. Iwasawa iso.

さらに.

$$C \equiv MA = \left\{ \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & C_2 & \\ & & C_3 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R}) \right\}$$

また.

$$\lambda(c) \equiv \prod_{j=1}^3 (S_j m_j C_j)^{m_j} |C_j|^{s_j} \quad \begin{array}{l} c \in C \quad (m_1, m_2, m_3) \in \hat{M} \\ S_j \in \mathbb{C} \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0 \end{array}$$

$$\lambda(g) \equiv \lambda(\exp H(g) m(g)) \quad g \in G$$

$$\mu(g) \equiv e^{2J(H(g))} \quad g \in G \quad J = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \alpha_i \text{ positive roots}$$

と仮定. 以下  $\lambda = (m_1, m_2, m_3; s_1, s_2, s_3)$  と表わすことにする.

$$f \in L^2(V) \text{ に対して } \left( \text{i.e. } \int_V |f(v)|^2 dv < \infty \right)$$

$$(T(g, \lambda)f)(v) \equiv \mu^{\frac{1}{2}}(vg) \lambda(vg) f(\bar{\pi}(vg)) \quad g \in G \quad v \in V$$

と仮定.

$$\pi_{\sigma, \psi} = T(\cdot, \lambda)$$

where  $\psi(v) = (s_1, s_2, s_3)$

と仮定.

$$P_j \equiv S_{\alpha_j} \in W (\equiv M'/M) \quad (S_j \text{ は } \alpha_j \text{ に関する reflection})$$

$$\bar{N} = \bar{N}_{P_j} + \bar{N}'_j, \quad \bar{N} = \bar{N}_{P_j} \cdot \bar{N}' \text{ semi direct}$$

と仮定.

Lemma 1

$x \in \overline{N_{P_{\bar{j}}}}$  において.  $(\bar{j}=1, 2)$

$$\circ \lambda(x P_{\bar{j}}) = (sgn x_{\bar{j}+1, \bar{j}})^{m_{\bar{j}} + m_{\bar{j}+1}} |x_{\bar{j}+1, \bar{j}}|^{s_{\bar{j}+1} - s_{\bar{j}}}$$

$$\circ \mu^{\frac{1}{2}}(x P_{\bar{j}}) = |x_{\bar{j}+1, \bar{j}}|^{-1}$$

但し.  $x_{\bar{j}+1, \bar{j}}$  は  $x$  の  $(\bar{j}+1, \bar{j})$ -成分.

§ 3. The operators  $A(P_{\bar{j}}, \lambda)$ .

$A(P_{\bar{j}}, \lambda)$  ( $\bar{j}=1, 2$ ) を  $L^2(V)$  上の operator として形式的に以下のように定める。

$$(A(P_{\bar{j}}, \lambda)f)(v) = \frac{1}{\gamma_{\bar{j}}(\lambda)} \int_{\overline{N_{P_{\bar{j}}}}} \chi^{-1}(x P_{\bar{j}}) \mu^{\frac{1}{2}}(x P_{\bar{j}}) f(x^{-1}v) dx$$

$$\gamma_{\bar{j}}(\lambda) = \gamma(m_{\bar{j}} + m_{\bar{j}+1}, s_{\bar{j}} - s_{\bar{j}+1}) \quad (\bar{j}=1, 2), f \in C_0^\infty(V)$$

但し.

$$\gamma(m, s) = 2^s i^{|m|} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+|m|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|m|+1-s}{2}\right)}$$

$$(s \in \mathbb{C}, m=0, 1)$$

$m = m_{\bar{j}} + m_{\bar{j}+1}$ ,  $s = s_{\bar{j}} - s_{\bar{j}+1}$  とし.  $x \in \overline{N_{P_{\bar{j}}}}$ ,  $v \in V$  の  $(\bar{j}+1, \bar{j})$ -成分をそれぞれ  $x_{\bar{j}+1, \bar{j}}$ ,  $v_{\bar{j}+1, \bar{j}}$  とすると Lemma 1 より.

$$A(P_{\bar{j}}, m, s) = \frac{1}{\gamma(m, s)} \int_{\mathbb{R}} (sgn x_{\bar{j}+1, \bar{j}})^m |x_{\bar{j}+1, \bar{j}}|^{-1+s} f(v_{\bar{j}+1, \bar{j}} - x_{\bar{j}+1, \bar{j}}) dx \quad (\bar{j}=1, 2)$$

と表わされる。

Lemma 2  $m = 0, 1, s \in \mathbb{C} \ 0 < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}, f \in C_0^\infty(V)$  に對して.

- (1)  $A(P_{\tilde{g}} m s) f(v)$  is absolute convergent for all  $v \in V$ .
- (2)  $A(P_{\tilde{g}} m s) f \in L^2(V)$ .
- (3)  $s \longrightarrow A(P_{\tilde{g}} m s) f$  は  $0 \leq \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$  上の  $L^2(V)$ -valued continuous function として一意的に拡張できる.
- (4)  $\operatorname{Re}(s) = 0$  のとき,  $A(P_{\tilde{g}} m s)$  は  $L^2(V)$  上の unitary operator として定義できる.
- (5)  $\operatorname{Re}(s_1) = \operatorname{Re}(s_2) = 0 \ s_1, s_2 \in \mathbb{C}$  に對して.

$$A(P_{\tilde{g}} m_1 s_1) A(P_{\tilde{g}} m_2 s_2) = A(P_{\tilde{g}} \widetilde{m_1 + m_2}, s_1 + s_2)$$

但し  $m_1, m_2 = 0, 1$  且  $\sim$  は 2 の modulo

- (6)  $A(P_{\tilde{g}} 0 0) = \text{identity operator}$ .

Lemma 3  $\tilde{g} = 1, 2$

$$A(P_{\tilde{g}}, \lambda) T(\tilde{g}, \lambda) = T(\tilde{g}, P_{\tilde{g}} \lambda) A(P_{\tilde{g}} \lambda) \quad \text{for all } \tilde{g} \in G$$

Lemma 4  $A(P_2 m s) A(P_1 m s) \ (\operatorname{Re}(s) = 0 \ m = 0, 1)$  form a commutative family.

Lemma 5  $m = 0, 1 \ \operatorname{Re}(s) = 0 \ s \in \mathbb{C} \ c \in C (= MA)$  に對して.

$$A(P_{\tilde{g}} m s) T(c, \lambda) = \operatorname{sgn} \left( \frac{C_{\tilde{g}}}{C_{\tilde{g}+1}} \right)^m \left| \frac{C_{\tilde{g}}}{C_{\tilde{g}+1}} \right|^{-s} T(c, \lambda) A(P_{\tilde{g}} m s)$$

Lemma 6  $m = 0, 1 \ \operatorname{Re}(s) = 0 \ s \in \mathbb{C}$  に對して.

$$M(P_{\tilde{g}} m s) f(v) \equiv \left( \operatorname{sgn} v_{\tilde{g}+1, \tilde{g}} \right)^m |v_{\tilde{g}+1, \tilde{g}}|^{-s} f(v) \quad f \in C_0^\infty(V)$$

$$T(P_{\tilde{g}} m s) \equiv M(P_{\tilde{g}}, m, s) T(P_{\tilde{g}} E) \quad P_{\tilde{g}} \in W$$

where  $T(P_{\tilde{f}}, \varepsilon)$  is the operator of the principal series corresponding to  $P_{\tilde{f}}, \varepsilon$  ( $\varepsilon$  is identity character)

$\Rightarrow$

$$1) A(P_{\tilde{f}} m s) T(P_{\tilde{f}} m s) = T(P_{\tilde{f}} m s) A(P_{\tilde{f}} m s) \quad (\tilde{f} = 1, 2)$$

$$2) A(P_{\tilde{f}} m s) T(P_k m', s') = T(P_k \widetilde{m+m'}, s+s') A(P_{\tilde{f}} m s) \quad (k \neq \tilde{f})$$

#### §4. Construction of $R(g, \lambda)$ in the unitary case

$$J(2 m s) \equiv A(P_2 m s), \quad J(1 m s) \equiv A(P_2 m s) A(P_1 m s)$$

$$(m = 0, 1, s \in \mathbb{C} \text{ Re}(s) = 0) \quad \text{とある}$$

#### Theorem 1 $G = SL(3, \mathbb{R})$

$\lambda$ : continuous unitary character of  $\mathbb{C}$

$$\text{i.e. } \lambda = (m_1, m_2, m_3; s_1, s_2, s_3) \quad \text{Re}(s_i) = 0 \quad (m_1, m_2, m_3) \in \hat{M}$$

$$G_0 = \left\{ a \in G \mid a_{\tilde{f}3} = 0 \quad 1 \leq \tilde{f} \leq 2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in G \right\}$$

$$R(g, \lambda) \equiv W(\lambda) T(g, \lambda) W(\lambda)^{-1} \quad \text{where } W(\lambda) = J(1, m_1, s_1) J(2, m_2, s_2) \quad g \in G$$

とある。

$$1) R(g, \lambda) = R(g, \text{res } \lambda) = T(g, \text{res } \lambda) \quad \text{for all } g \in G_0$$

$$\text{但し, } \text{res } \lambda = (0, 0, m_1 + m_2 + m_3; 0, 0, 0)$$

$$2) R(g, p\lambda) = R(g, \lambda) \quad \text{for } \forall g \in G \quad \forall p \in W.$$

(注) 上の構成から、明らかに  $R(\cdot, \lambda) \cong T(\cdot, \lambda)$  である。

(証明)。

1).  $\bar{P} = M \bar{A} \bar{N}$  とする.  $G_0 = \bar{P} P_1 \bar{P} \cup \bar{P}$  故に  $G = G_0 \cup G_0 P_2 G_0$

従て,  $g \in N (= V)$ ,  $g \in C$ ,  $g = P_1$  のときに主張を示せばよい.  $g \in V$  とすると

$\lambda(vg) \mu^{\pm}(vg) = 1$  より  $T(g, \lambda) = T(g, \lambda')$  従て  $A(P_2 m s)$  と  $T(g, \lambda)$

は可換. 従て  $J(k, m s)$  と  $T(g, \lambda)$  も可換. 故に  $R(g, \lambda) = T(g, \lambda)$ .

$g = C \in C$  のとき.  $\lambda = (m_1, m_2, m_3, s_1, s_2, s_3)$  とする.

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^2 \left( \text{sgn} \frac{C_k}{C_{k+1}} \right)^{\alpha_k} \left| \frac{C_k}{C_{k+1}} \right|^{\beta_k} \text{res} \lambda(C) \quad \begin{aligned} \alpha_k &= m_1 + \dots + m_k \\ \beta_k &= s_1 + \dots + s_k \end{aligned}$$

と表わす. lemma 5 より

$$W(\lambda) T(C, \lambda) W(\lambda)^{-1} = \frac{\text{res} \lambda(C)}{\lambda(C)} T(C, \lambda)$$

故に

$$W(\lambda) T(C, \lambda) W(\lambda)^{-1} = T(C, \text{res} \lambda)$$

$$\therefore R(C, \lambda) = R(C, \text{res} \lambda) = T(C, \text{res} \lambda)$$

$g = P_1$  のとき.  $T(P_1 \text{res} \lambda) = T(P_1 \epsilon)$  ( $\epsilon$  は identity character) 従て

$W(\lambda) T(P_1 \lambda) = T(P_1 \epsilon) W(\lambda)$  を示せばよい.  $\lambda = (m_1, m_2, m_3; s_1, s_2, s_3)$

とする.  $T(P_1 \lambda) = T(P_1, m_1 + m_2, s_1 - s_2)$  とする. lemma 6 より

$$J(2 m_2 s_2) T(P_1 \lambda) = T(P_1, m_1, s_1) J(2 m_2 s_2)$$

$$J(1 m_1 s_1) T(P_1, m_1, s_1) = T(P_1 \epsilon) J(1 m_1 s_1)$$

よて  $W(\lambda) T(P_1 \lambda) = T(P_1 \epsilon) W(\lambda)$  を得る.

2).  $R(g, \lambda) = R(g, P \lambda)$   $P \in W$  とする.

$$W(\lambda) T(g, \lambda) W(\lambda)^{-1} = W(P \lambda) T(g, P \lambda) W(P \lambda)^{-1}$$

$$\therefore W(P \lambda)^{-1} W(\lambda) T(g, \lambda) = W(P \lambda) T(g, P \lambda) W(P \lambda)^{-1} \text{ for } \forall g \in G.$$

5.7  $W(P\lambda)^{-1}W(\lambda) = A(P\lambda)$  をあてはめて示せばよい.

$$W(P\lambda)A(P\lambda)$$

$$= J(1, P\lambda)J(2, P\lambda)A(P\lambda)$$

$$= J(1, m_2, s_2)J(2, m_1, s_1)A(P\lambda)$$

$$= A(P_2, m_2, s_2)A(P_1, m_2, s_2)A(P_2, m_1, s_1)A(P_1, m_1+m_2, s_1-s_2)$$

$$= A(P_2, m_1, s_1)A(P_1, m_1, s_1)A(P_2, m_2, s_2) \quad (\text{Lemma 4})$$

$$= W(\lambda)$$

$$W(P_2\lambda)A(P_2\lambda)$$

$$= J(1, P_2\lambda)J(2, P_2\lambda)A(P_2\lambda)$$

$$= J(1, m_1, s_1)J(2, m_3, s_3)A(P_2\lambda)$$

$$= A(P_2, m_1, s_1)A(P_1, m_1, s_1)A(P_2, m_3, s_3)A(P_2, m_2+m_3, s_2-s_3)$$

$$= A(P_2, m_1, s_1)A(P_1, m_1, s_1)A(P_2, m_2, s_2) \quad (\text{Lemma 4})$$

$$= W(\lambda)$$

f.e.d.

§5. Analytic continuation of  $R(P\lambda)$ .

$$\Lambda^* \equiv \{ \lambda = (m_1, m_2, m_3; s_1, s_2, s_3) \mid (m_1, m_2, m_3) \in \hat{M}, (s_1, s_2, s_3) \in \hat{\mathcal{I}} \}$$

$\hat{\mathcal{I}}; (a, -a, 0) \ (0 \leq a \leq \frac{1}{2}) \in \text{Weyl group}$  で動かした元で張る

hyper surface  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$  上の convex hull

$$+ \sqrt{-1} \alpha^*$$

$$\Lambda \equiv \{ \lambda = (m_1, m_2, m_3; s_1, s_2, s_3) \mid (m_1, m_2, m_3) \in \hat{M} \text{ } \Re(s_j) = 0 \text{ } (j=1 \sim 3) \}$$

と置く.

lemma 7  $P = P_2 \quad \Re(s) = 0 \quad s \in \mathbb{C} \quad \lambda = (m_1, m_2, m_3; \sqrt{-1}b_1, \sqrt{-1}b_2, \sqrt{-1}b_3) \in \Lambda$

$$Q(\lambda, s) \equiv R(P, m_1, m_2, m_3; \sqrt{-1}b_1, \sqrt{-1}b_2 + s, \sqrt{-1}b_3 - s) \text{ と置く.}$$

the operator  $Q(\lambda, s)$  can be continued into the strip  $-\frac{1}{2} < \Re(s) < \frac{1}{2}$

such that

1) for each  $f, g \in L^2(V)$

$$s \longrightarrow (Q(\lambda, s)f, g) \text{ is analytic in } -\frac{1}{2} < \Re(s) < \frac{1}{2}$$

$$2) \|Q(\lambda, s)\| \leq K_a \left( 3 + \sum_{j=1}^3 |b_j| + |b| \right)^3 \quad (\| \cdot \| \text{ is operator norm})$$

但し  $s = a + ib$ ,  $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$  且  $K_a$  は  $a$  に依存した定数

(証明)

$\lambda \in \Lambda$  に對して

$$T_1(P\lambda) \equiv J(2m_2, s_2) T(P\lambda) J(2m_2, s_2)^{-1}$$

$$Q_1(\lambda, s) \equiv T_1(P, m_1, m_2, m_3; \sqrt{-1}b_1, \sqrt{-1}b_2 + s, \sqrt{-1}b_3 - s) \quad (\Re(s) = 0)$$

$$\text{と置く. } R(P\lambda) = W(\lambda) T(P\lambda) W(\lambda)^{-1} \quad (W(\lambda) = J(1m_1, s_1) J(2m_2, s_2))$$

より

$$R(P\lambda) = J(1m_1, s_1) T_1(P\lambda) J(1m_1, s_1)^{-1}$$

$$Q(\lambda, s) = J(1m_1, s_1) Q_1(\lambda, s) J(1m_1, s_1)^{-1} \quad (\Re(s) = 0)$$

と置く.  $J(1m_1, s_1)$  は  $s$  に依存しないと及び、ユニタリ作用素であること

から  $Q_1(\lambda, s)$  について lemma の主張を示せばよい.

$$T(P\lambda) = T(P, m_2 + m_3, \sqrt{-1}b_2 - \sqrt{-1}b_3)$$

$$= M(P, m_3, -\Gamma b_3) T(P, m_2, \Gamma b_2)$$

$$\text{但し. } M(P, m, s) f(u) \equiv (\operatorname{sgn} v_{32})^m |v_{32}|^{-s} f(u)$$

$$\text{と} \text{ 2) } m = m_2, \quad b = b_2, \quad m' = m_2 + m_3, \quad b' = -b_2 - b_3 \quad \text{と} \text{ 3) }.$$

$$T(P, \lambda) = M(P, \widetilde{m+m'}, \Gamma b + \Gamma b') T(P, m, \Gamma b)$$

$$\therefore T_1(P, \lambda) = A(P, m, \Gamma b) M(P, \widetilde{m+m'}, \Gamma b + \Gamma b') T(P, m, \Gamma b) A(P, m, -\Gamma b)$$

- 1

$$T(P, m, \Gamma b) A(P, m, -\Gamma b)$$

$$= A(P, m, -\Gamma b) T(P, m, -\Gamma b)$$

$$= A(P, m, -\Gamma b) M(P, m, -\Gamma b) T(P, \varepsilon)$$

$$L(m, m', \Gamma b, \Gamma b')$$

$$\equiv A(P, m, \Gamma b) M(P, \widetilde{m+m'}, \Gamma b + \Gamma b') A(P, m, -\Gamma b) M(P, m, -\Gamma b)$$

と 3) と

$$\therefore T_1(P, \lambda) = L(m, m', \Gamma b, \Gamma b') T(P, \varepsilon)$$

$$\therefore Q_1(\lambda, s) = L(m, m', \Gamma b + s, \Gamma b') T(P, \varepsilon)$$

と 3) と. 3) 5) 1) .

$$(*) \left[ \begin{array}{l} f \in L_2(V) = L_2(\overline{N}_{P_2} \times \overline{N}'_2) \quad \text{s.t.} \quad f(z, z') = g(z) h(z') \\ z \in \overline{N}_{P_2} \quad z' \in \overline{N}'_2 \end{array} \right.$$

と 3) と.

$$L(m, m', \Gamma b_2, \Gamma b') f(z, z') = E(m, m', \Gamma b_2, \Gamma b') g(z) h(z)$$

$$\text{但し. } E(m, m', \Gamma b_2, \Gamma b') = A(m, s) B(m+m', \Gamma b_2 + \Gamma b') A(m, \Gamma b_2) B(m, -\Gamma b_2)$$

と返る。

$E(m, m', \Gamma b_2 + s, \Gamma b')$  は  $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$  まで正則に拡張でき.

さらに  $\|E(m, m', \Gamma b + s, \Gamma b')\| \leq K_a (3 + |b_2| + |b| + |b'|)^3$

$$s = a + \Gamma b \quad -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

(\*) のような  $f$  の集合が  $L^2(V)$  で dense であること. 及び  $T(P, \varepsilon)$  が unitary

であること.  $Q_1(\lambda, s)$  に対しても同様の situation が成り立つ

$$\text{i.e.} \quad \|Q_1(\lambda, s)\| \leq K_a (3 + |b_2| + |b| + |b'|)^3$$

$$\leq 2K_a \left(3 + \sum_{j=1}^3 |b_j| + |b|\right)^3$$

$$s = a + \Gamma b \quad -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

G.E.d.

### lemma 8

$\lambda = (m_1, m_2, m_3, s_1, s_2, s_3)$  に対し.

$$H(\lambda) \equiv \left(1 + \sum_{j=1}^3 |m_j|\right)^3 \prod_{j=1}^3 (3 - s_j)^6$$

$$\Lambda^*(d) \equiv \{\lambda \in \Lambda^+ \mid |\operatorname{Re}(s_j)| < d \text{ for } j=1 \sim 3\} \quad (0 \leq d < )$$

と仮定し  $R(P_2 \lambda)$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) can be extended to  $\Lambda^*$  such that

1) for each  $f, g \in L_2(V)$

$\lambda \longrightarrow (R(P_2 \lambda)f, g)$  is analytic in  $\Lambda^*$

2)  $\|R(P_2 \lambda)\| \leq K'_d |H(\lambda)| \quad \lambda \in \Lambda^*(d) \quad (0 \leq d < )$

但し  $K'_d$  は  $d$  に依存した定数.

(証明)



$$F_{12}(s) \equiv F(m_1, m_2, m_3, \sqrt{1}b_1+s, \sqrt{1}b_2-s, \sqrt{1}b_3)$$

$$F_{23}(s) \equiv F(m_1, m_2, m_3, \sqrt{1}b_1, \sqrt{1}b_2+s, \sqrt{1}b_3-s)$$

とある.  $F_{12}$  is holomorphic in  $-d < \operatorname{Re}(s) < d$  and bounded by 1.

従って  $F$  has a holomorphic extension to  $\mathcal{L}^*(d)$  and bounded by 1

$$\mathcal{L}^* = \bigcup_{0 \leq d < \frac{1}{2}} \mathcal{L}^*(d) \text{ 上}$$

$F(f, g, \lambda)$  has a holomorphic extension to  $\mathcal{L}^*$  and b.d. by 1.

$\therefore \Phi(f, g, \lambda)$  has holomorphic extension to  $\mathcal{L}^*$  and

$$|\Phi(f, g, \lambda)| \leq K_d |H(\lambda)| \|f\|_2 \|g\|_2 \quad \text{for all } \lambda \in \mathcal{L}^*(d), \\ 0 \leq d < \frac{1}{2}$$

$\lambda \in \mathcal{L}^*$  上 関数 1 に 2 倍.

$$\begin{array}{ccc} (f, g) & \longrightarrow & \Phi(f, g, \lambda) \\ \uparrow & & \uparrow \\ L^2(V) \times L^2(V) & & \mathbb{C} \end{array} \quad \text{is sesqui-linear form.}$$

よって  $R(p, \lambda)$  が  $\mathcal{L}^*$  上 定義 でき. lemma の 主張 が 言える.

g. l. d.

Theorem 2  $G = SL(3, \mathbb{R})$   $C = MA$  について.

1).  $g \in G$  fix.

the operator valued function.

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \longrightarrow & R(g, \lambda) \\ \uparrow & & \\ \mathcal{L} & & \end{array}$$

は. 正則に  $\mathcal{L}^*$  まで 拡張 できる.

2)  $\forall \lambda \in L^*$  に對して.

$$G \ni g \longrightarrow R(g, \lambda)$$

は. Continuous uniformly bounded representation of  $G$ .

3)  $R(g, p\lambda) = R(g, \lambda)$  for all  $g \in G$   $\lambda \in L^*$   $p \in W$ .

4)  $R(g, \lambda') = R(g, \lambda)'$  for all  $\lambda \in L^*$   $g \in G$ .

但し. ' は contragradient 表現

(証明)

$\lambda = (m_1, m_2, m_3, s_1, s_2, s_3) \in L^*$  とする.

$g \in G_0$  のとき.

$$R(g, \lambda) \equiv R(g, \text{res } \lambda)$$

$g \in G - G_0$  のとき.

$$g = g_0 p_2 g'_0 \quad g_0, g'_0 \in G_0 \quad \text{と表わせることより.}$$

$$R(g, \lambda) \equiv R(g_0, \lambda) R(p_2, \lambda) R(g'_0, \lambda)$$

とおく.  $R(g, \lambda)$  は well-defined で. 求めるもの.

*g. l. d.*

### Corollary

3). 4) より.  $\lambda \in L^*$  に對して.

$$\exists p \in W. \text{ s.t. } p\lambda = \lambda' \quad (\lambda' \text{ は contragradient})$$

$\Rightarrow$

$R(\cdot, \lambda)$  は unitary representation of  $G$ .

- Corollary で与えられた unitary op. は、補系 III にあると予想しているが、今のところまだ証明はできていない。

### References

- [1] Kunze R. A. and Stein E. M. : Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the  $2 \times 2$  real, unimodular group. Amer. J. Math. 82 (1960) 1-62.
- [2] ———. Uniformly bounded representations II. Analytic continuation of the principal series of representations of the  $n \times n$  complex unimodular group. Amer. J. Math. 83 (1961) 723-786.
- [3] ———. Uniformly bounded representations III. Intertwining operators for the principal series on semisimple groups. Amer. J. Math. 89 (1967) 385-442.
- [4] ———. Uniformly bounded representation IV Analytic continuation of the principal series for complex classical groups of types  $B_n, C_n, D_n$ . Advances in Mathematics 11 (1973) 1-71.
- [5] Lipsman, R. L. : Uniformly bounded representations of  $SL(2, \mathbb{C})$  Amer. J. Math. 91 (1969) 47-66.

- [6] \_\_\_\_\_. Uniformly bounded representations of the  
Lorentz groups. Amer. J. Math 91 (1969) 938-962
- [7] Sally P. J. : Analytic continuation of the irreducible  
unitary representations of the universal covering group of  
 $SL(2, \mathbb{R})$  Mem. Amer Math Soc NO. 69 (1967)
- [8] Wilson. E. N. : Uniformly bounded representations for the  
Lorentz groups. Trans. Amer. Math. Soc. 166 (1972) 431-438
- [9] Bamaži. L. Représentations uniformément sphériques bornées  
des groupes de Lorentz. Université de Nancy. I. (1974)
- [10] Oscar. B. A. On uniformly bounded representations of  
the Lorentz groups. Washington Univ. (1982)
- [11] Stanke. R. J. Analytic uniformly bounded representations  
of  $SL(1, n+1)$ . Trans. of. A.M.S. 290 (1985)
- [12] Gelfand I. M. and Naïmark M. A. Unitäre Darstellungen  
der klassischen Gruppen. Akademie - Verlag Berlin 1957.
- [13] Wallach. N. R. Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces  
. Marcel Dekker. New York 1973
- [14] Knap. A. W. Representation Theory of Semisimple Groups  
An Overview Based on Examples. Princeton Univ. Princeton  
New Jersey 1986.