

AB と BA のスペクトルについて

長 宗雄 (神奈川大工), 古谷 正 (新潟大教育人間科学)

Banach 空間 X 上の有界線形作用素 A, B に大して

$$(*) \quad \sigma(AB) - \{0\} = \sigma(BA) - \{0\}$$

であることは良く知られている. 最近 Aluthge 変換などのことで $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ となっていれば嬉しい. これについては, 次のことが判る.

定理 1. A がもし $0 \in \sigma(A)$ のとき $0 \in \sigma_a(A) \cap \sigma_a(A^*)$ となっていれば

$$\sigma(AB) = \sigma(BA).$$

ここでは $(*)$ についての李 紹寛先生の研究を紹介する. 彼の研究は二つの作用素の n -tuples $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n), \mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$ に対して $\mathbf{AB} = (A_1 B_1, \dots, A_n B_n), \mathbf{BA} = (B_1 A_1, \dots, B_n A_n)$ とおくと

$$(?) \quad \sigma(\mathbf{AB}) - \{0\} = \sigma(\mathbf{BA}) - \{0\}.$$

まず, 二つの作用素の n -tuples $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n), \mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$ に対して, この pair が criss-cross commute であるとは

$$A_i B_k A_j = A_j B_k A_i \text{ and } B_i A_k B_j = B_j A_k B_i \quad (\forall i, j, k \in \{1, \dots, n\})$$

のときを言う. それで, 次の定理が成り立つ.

定理 2 (李 紹寛). 二つの作用素の n -tuples $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n), \mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$ に対して, この pair が criss-cross commute であれば

$$\sigma(\mathbf{AB}) - \{0\} = \sigma(\mathbf{BA}) - \{0\}$$

である．ここで $\sigma(\mathbf{T})$ は n -tuple $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ の Taylor spectrum である．

この問題は歴史的には V. Wrobel が 1986 年の Math. Ann. での論文で二つの作用素の n -tuples $\mathbf{A} = (A, \dots, A), \mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$ について $\mathbf{AB}$ と $\mathbf{BA}$ がともに可換な n -tuples であるという条件で同じ結果を示している．

そして、李 紹寛先生の結果が 92 年に出て、R. Harte がいろいろな joint spectrum に拡張している．そして等号の研究が [1] でされている．

$n = 2$ のときの李 紹寛先生の結果の証明：

定理 2' (李 紹寛)．二つの作用素の tuples $\mathbf{A} = (A_1, A_2), \mathbf{B} = (B_1, B_2)$ に対して、この pair が criss-cross commute であれば

$$\sigma(\mathbf{AB}) - \{0\} = \sigma(\mathbf{BA}) - \{0\}$$

である．

証明： $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ に対して

$$(z_1, z_2) \notin \sigma(\mathbf{AB}) \iff (z_1, z_2) \notin \sigma(\mathbf{BA})$$

を示す．ここで $z_1 = 1, z_2 = 0$ または 1 と仮定してよい．

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

ただし

$$\begin{cases} \delta_1(x) = -(A_2 B_2 - z_2)x \oplus (A_1 B_1 - 1)x \\ \delta_2(x \oplus y) = (A_1 B_1 - 1)x + (A_2 B_2 - z_2)y. \end{cases}$$

criss-cross commute と δ_1 の第一成分の - より、 $\delta_2(\delta_1(x)) = 0$ が出る．

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

ただし

$$\begin{cases} \delta^1(x) = -(B_2 A_2 - z_2)x \oplus (B_1 A_1 - 1)x \\ \delta^2(x \oplus y) = (B_1 A_1 - 1)x + (B_2 A_2 - z_2)y. \end{cases}$$

$$(1) : \text{ exact } \implies (2) : \text{ exact}$$

を示す.

(i) $\delta^1(x) = 0$ とする. i.e., $-(B_2A_2 - z_2)x = (B_1A_1 - 1)x = 0$.
このとき $(B_1A_1 - 1)x = 0$ であるので

$$A_1(B_1A_1 - 1)x = (A_1B_1 - 1)A_1x = 0$$

従って $-A_1(B_2A_2 - z_2)x = -(A_1B_2A_2 - z_2A_1)x = -(A_2B_2 - z_2)A_1x = 0$,
よって $A_1x \in \ker(\delta_1) = \{0\}$ よって $A_1x = 0$ and $B_1A_1 = x$.
従って $\ker(\delta^1) = \{0\}$.

(ii) $x \oplus y \in \ker(\delta^2)$ とする. i.e., $(B_1A_1 - 1)x + (B_2A_2 - z_2)y = 0$.
このとき

$$(A_1B_1 - 1)A_1x + (A_2B_2 - z_2)A_1y = 0$$

より, $A_1x \oplus A_1y \in \ker(\delta_2)$. ここで $\ker(\delta_2) = \text{im}(\delta_1)$ より

$$\exists u \in \mathcal{H} ; A_1x = -(A_2B_2 - z_2)u \text{ and } A_1y = (A_1B_1 - 1)u.$$

$v = B_1u - y$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} -(B_2A_2 - z_2)v &= -(B_2A_2 - z_2)B_1u + (B_2A_2 - z_2)y \\ &= -B_1(A_2B_2 - z_2)u - (B_1A_1 - 1)x = B_1A_1x - B_1A_1x + x = x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B_1A_1 - 1)v &= (B_1A_1 - 1)B_1u - (B_1A_1 - 1)y \\ &= B_1(A_1B_1 - 1)u - B_1A_1y + y = y. \end{aligned}$$

よって $x \oplus y \in \text{im}(\delta^1)$.

(iii) $\text{im}(\delta_2) = \mathcal{H}$ であるので $\forall x \in \mathcal{H}$ に対して $\exists x_j^i \in \mathcal{H} (i, j = 1, 2)$;

$$\begin{cases} A_1x = (A_1B_1 - 1)x_1^1 + (A_2B_2 - z_2)x_2^1 \\ A_2x = (A_1B_1 - 1)x_1^2 + (A_2B_2 - z_2)x_2^2. \end{cases}$$

そこで

$$\begin{cases} y_1 = -x + B_1x_1^1 + B_2x_1^2 \\ y_2 = -x + B_1x_2^1 + B_2x_2^2 \end{cases}$$

とおく.

$$\begin{aligned} & (B_1A_1 - 1)y_1 + (B_2A_2 - z_2)y_2 \\ &= -(B_1A_1 - 1)x + (B_1A_1 - 1)B_1x_1^1 + (B_1A_1 - 1)B_2x_1^2 \\ & \quad - (B_2A_2 - z_2)x + (B_2A_2 - z_2)B_1x_2^1 + (B_2A_2 - z_2)B_2x_2^2 \\ &= -(B_1A_1 - 1)x + B_1\left((A_1B_1 - 1)x_1^1 + (A_2B_2 - z_2)x_2^1\right) \\ & \quad - (B_2A_2 - 1)x + B_2\left((A_1B_1 - 1)x_1^2 + (A_2B_2 - z_2)x_2^2\right) \\ &= -(B_1A_1 - 1)x + B_1A_1x - (B_2A_2 - z_2)x + B_2A_2x \\ &= (1 + z_2)x. \end{aligned}$$

$z_2 = 0$ or 1 であるので $1 + z_2 \neq 0$ よって $\text{im}(\delta^2) = \mathcal{H}$.

(i), (ii), (iii) により (2) は exact. よって

$$\sigma(\mathbf{AB}) - \{0\} = \sigma(\mathbf{BA}) - \{0\}$$

は示された.

[1] では等号となる場合について、次のような結果がある.

定理 3. $\mathbf{A} = (A, \dots, A), \mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$: criss-cross commuting. If A is normal, then $\sigma(\mathbf{AB}) = \sigma(\mathbf{BA})$.

定理 4. $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n), \mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$: criss-cross commuting. If there exist $a_1, \dots, a_n$ such that $\sum a_i A_i$ is invertible, then $\sigma(\mathbf{AB}) = \sigma(\mathbf{BA})$.

参考文献

- [1] M. Chō, R. Curto and T. Huruya, N -tuples of operators satisfying $\sigma_T(\mathbf{AB}) = \sigma_T(\mathbf{BA})$, Linear Algebra Appl. to appear.
- [2] R. Curto, On the connectedness of invertible n -tuples, Indiana Univ. Math. J. 29(1980), 393-406.
- [3] R. Curto, The spectra of elementary operators, Indiana Univ. Math. J. 32(1983), 193-197.
- [4] R. Harte, On criss-cross commutativity, J. Operator Th. 37(1997), 303-309.
- [5] S. Li, On the commuting properties of Taylor's spectrum, Chinese Sci. Bull. 37(1992), 1849-1852.
- [6] S. Li, Taylor spectral invariance for crisscross commuting pairs on Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 124(1996), 2069-2071.
- [7] A. McIntosh, A. Pryde and W. Ricker, Comparison of joint spectra for certain classes of commuting operators, Studia Math. 88(1987), 23-36.
- [8] J. L. Taylor, A joint spectrum for several commuting operators, Acta Math. 125(1970), 172-191.
- [9] F.-H. Vasilescu, On pairs of commuting operators, Studia Math. 62(1978), 203-207.
- [10] V. Wrobel, Multi-dimensional spectral theory of bounded linear operators in locally convex spaces, Math. Ann. 275(1986), 409-423.