

フィボナッチ鎖上のイジングスピン

東大・物工 常次 弘一

§1 はじめに

準結晶の一体問題については強結合ハミルトニアンを用いた研究が進み、エネルギースペクトルの異常等の興味深い結果が得られている。¹⁾ ここでは相転移のような協同現象において準周期性が相互作用にどう影響するかを考え、準結晶に特徴的な物性を探る。

準結晶の構造はまず並進対称性の欠如により、特徴づけられるが、あくまでも定論的なもので、アモルファスのような確率論的なものではないため、レプリカのような余分な自由度を持つ必要がない。またアモルファスもアンサンブル平均を取った後は並進対称性を回復する。一方、準結晶のある有限部分に注目すると、まったく同じものがその直径の数倍以内の距離に必ず存在する。このことがアモルファスとの最大の違いである。第1の点は通常の系において自然に定義される空間的に一様なオーダーパラメーターが準結晶においても well defined かどうかという問題と関係する。第2の点より準結晶は短距離秩序では結晶とそう変わらないが長距離秩序が成長してくると結晶との本質的な差が現れると考えられる。また多くの準結晶に存在する格子の自己相似性によって実空間繰込み群が強かな解析手段となることが予想されるが、準結晶がどのようなユニバーサルクラスに属するか、臨界指数が通常の系とどう変るかということも大変重要な問題である。

§2 モデルハミルトニアンと繰込み群

既にいくつかの準結晶のスピン統計の研究が行なわれているが、²⁾ ここでは最も単純な1次元フィボナッチ鎖上の最近接相互作用をするイジングスピン系を扱うことにする。³⁾ 2種類のボンド τ と 1 をフィボナッチ列 $\{\tau, 1, \tau, 1, \tau, 1, \dots\}$ に並べ各ボンドにイジングスピンの交換エネルギー J_τ, J_1 を対応させる。外部磁場がない場合伝送行列は可換なで熱力学量は J_τ, J_1 の一様な系の熱力学量にボンドの比率をかけた加重平均になる。今の場合には

$$O_{\text{FIBONACCI}} = (O_1 + \tau O_\tau) / (1 + \tau) = (O_1 + \tau O_\tau) / \tau^2 \quad (1)$$

となる。系の準周期性を取り込むには外部磁場 h をかけるか、磁場に対する応答である磁化 m 、帯磁率 χ を考える必要があるが、1次元系では有限温度で相転移は起らないので自発磁化は零である。

図1(a)のように、両側のボンドに応じてスピンサイトを $1\tau, \tau\tau, \tau 1$ と名前をつける。ハミルトニアンを

$$-\beta H = \sum_{i=1}^{\infty} K_i S_i S_{i+1} + \sum_{i=1}^{\infty} H_i S_i, \quad S_i = \pm 1 \quad (2)$$

$$\beta = 1/T, \quad K_i = \beta J_\tau \text{ or } \beta J_1, \quad H_i = \beta h_\tau \text{ or } \beta h_{\tau\tau} \text{ or } \beta h_{\tau 1}$$

とする。最初一様な外部磁場から出発しても繰込みの途中でサイトの種類により磁場の大きさが変わるため最初から3種類用意しておく。一方、交換エネルギーは等しく磁場がフィボナッチ列になっている系もこのハミルトニアンで良い。

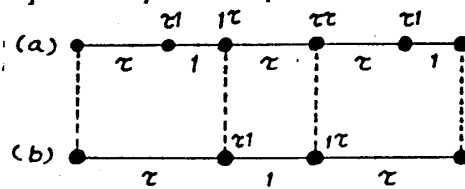


図 1

いまフィボナッチ鎖を1回縮小する。すなわち21サイトスピンをすべてdecimateしてボンド右前を $21 \rightarrow 2$ 、 $221 \rightarrow 12$ とつけ直す。(図1(b)) decimation において結合定数が変化し J は定数 α の自由エネルギー項 f_0 が現れるが、格子の1次元性と自己相似性により結合定数は K_L, H_L の5ヶ以上には増えない。以上の繰込み操作を具体的に書くと次式のようになる。³⁾

$$\begin{aligned} y_1^{(n+1)} &= y_1^{(n)}, & y_1^{(n+1)} &= \sqrt{\frac{(y_1^{(n)}y_2^{(n)}w_3^{(n)}+1)(y_1^{(n)}y_2^{(n)}+w_3^{(n)})}{(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_2^{(n)})(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_2^{(n)})}}, \\ w_1^{(n+1)} &= w_1^{(n)} \sqrt{\frac{(y_1^{(n)}y_2^{(n)}w_3^{(n)}+1)(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_2^{(n)})}{(y_1^{(n)}y_2^{(n)}+w_3^{(n)})(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_2^{(n)})}}, & w_2^{(n+1)} &= w_1^{(n)} \frac{y_1^{(n)}y_2^{(n)}w_3^{(n)}+1}{y_1^{(n)}y_2^{(n)}+w_3^{(n)}}, \\ w_3^{(n+1)} &= w_1^{(n)} \sqrt{\frac{(y_1^{(n)}y_2^{(n)}w_3^{(n)}+1)(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_2^{(n)})}{(y_1^{(n)}y_2^{(n)}+w_3^{(n)})(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_2^{(n)})}}, \\ -\beta f_0^{(n+1)} &= -\beta f_0^{(n)} + \frac{1}{2\tau^{n+1}} \log \left[\frac{\sqrt{(y_1^{(n)}y_2^{(n)}w_3^{(n)}+1)(y_1^{(n)}y_2^{(n)}+w_3^{(n)})(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_2^{(n)})(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_2^{(n)})}}{y_1^{(n)}y_2^{(n)}w_3^{(n)}} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、

$$y_1^{(n)} = \exp(2K_1^{(n)}), \quad y_2^{(n)} = \exp(2K_2^{(n)}), \quad w_1^{(n)} = \exp(2H_1^{(n)}), \quad w_2^{(n)} = \exp(2H_2^{(n)}), \quad w_3^{(n)} = \exp(2H_3^{(n)}). \quad (4)$$

この繰込み群方程式には次のような固定点が存在する。³⁾

$$(i) \quad K_1^* = K_2^* = \infty, \quad H_1^* = H_2^* = H_3^* = 0 \quad \text{"ferromagnetic"} \quad (5a)$$

$$(ii) \quad K_1^* = K_2^* = \infty, \quad H_1^* = H_2^* = H_3^* = \infty \quad \text{"frozen"} \quad (5b)$$

$$(iii) \quad K_1^* = K_2^* = 0, \quad H_1^* = H_2^* = H_3^* = g^* \quad \text{"paramagnetic"} \quad (5c)$$

これらは $J_1 = J_2 > 0$ の通常のイジング鎖の固定点⁴⁾であるが、これに周期2のリミットサイクル

$$(iv) \quad K_1^* = K_2^* = 0, \quad H_1^{(2n)} = H_2^{(2n+1)} = H_3^{(2n+1)} = g_1^*, \quad H_1^{(2n+1)} = H_2^{(2n)} = H_3^{(2n)} = g_2^* \quad (6)$$

が存在して、これが磁場下のフィボナッチ鎖上のイジングスピンの常磁性状態に対応する。 g_1^*, g_2^* は拡張された意味で"fixed plane"を成しているが、その中に(iii)の通常の常磁性 fixed lineを含む。リミットサイクル(iv)の存在は準結晶の特徴である。つまり通常の格子では臨界点において特徴的長さがないが、パラメータ空間におけるこの振動は正に特徴的長さの存在を意味している。準結晶上のスピンの状態の内部構造を反映している。

§3 熱力学

具体的には、有限磁場 h 下での1スピンの磁化 m 、線型帯磁率 χ 、比熱 C を計算する。これらの物理量は1スピンの自由エネルギー $-f_0$ の微分

$$m = \frac{\partial}{\partial H}(-\beta f_0), \quad \chi = \beta \frac{\partial^2}{\partial H^2}(-\beta f_0), \quad C = \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}(-\beta f_0) \quad (7)$$

によって与えられるが、(3)式よりこれらの微分に对する recursion 方程式を導き、それを用いて数値計算を行った。パラメータとして ferro と antiferro のボンド $J_2 = -J_1 = J > 0$ 、一様な外部磁場 h を選んだ。図2に m, χ, C を h の関数として図示した。外部磁場を強くするにしたがって階段状に磁化がふるうのが特徴的である。 $T \rightarrow 0$ と共にこのステップは急になり χ は δ 関数となる。また χ のピークところで C には dip を生じる。図3には一定の外部磁場下で温度の関数として図示した。 χ, C が温度とともに振動することがわかる。これらの特徴的なふるまいは、磁場が無い時の基底状態のスピンの構造(図4)によって理解することが出来る。

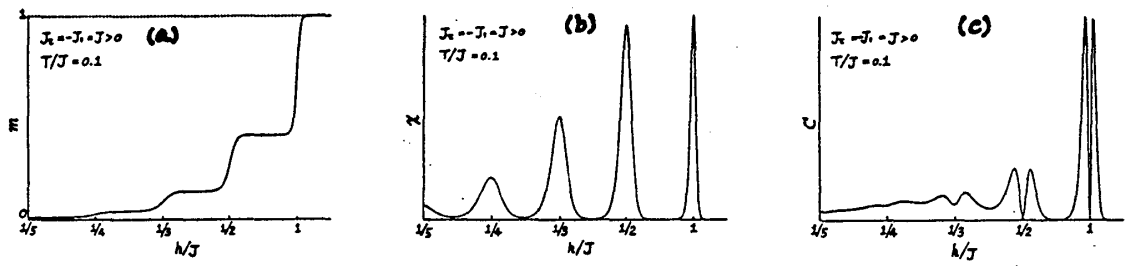


図 2

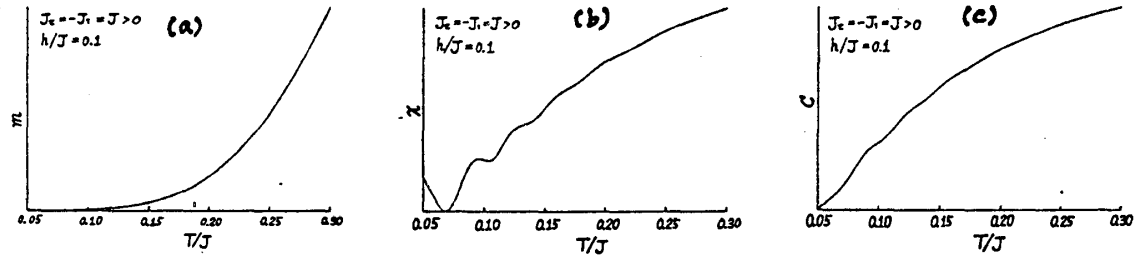


図 3

磁場が無い時は全体のスピンの反転に対してエネルギーは変わらない。これを見るとき任意の大きさの磁化をもつクラスターが存在して入れ子構造になっていることが判る。(図5) 磁化 $-2n$ ($n=1, 2, \dots$) のクラスターの逐次的な反転が $h=J/n$ における m の階段状の変化をもたらす。またクラスターの基底状態が $h=J/n$ で完全に2重縮退することが C の dip をつくる。一定温度に対するふらふらは磁化 $-2n$ ($n < J/h$) のクラスターが大きい方から順に常磁性化していくことで説明できる。各クラスターの常磁性化に対して X, C のセグ $1/n$ が対応している。

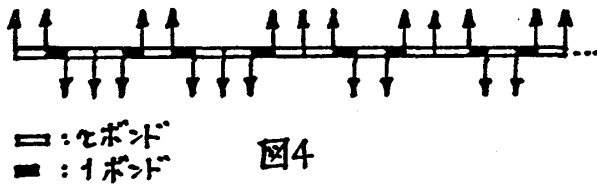


図 4

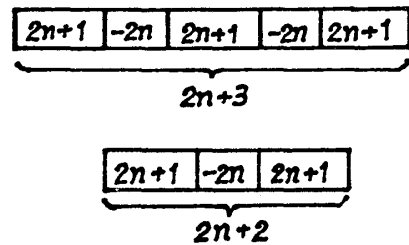


図 5

参考文献

- 1) 代表的なものとして1次元については M. Kohmoto et al.: Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1870 ; S. Ostlund et al.: ibid 1873 2次元については H. Tsunetsugu et al.: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 1420
- 2) 1次元フロッパリング鎖上の XY スピン系については TH. M. Nieuwenhuizen: J. de Physique **C3** (1986) 211 ; 2次元ヘンロース格子上のイジングスピンの系については C. Godreche et al.: ibid 197
- 3) Y. Achiam et al.: Phys. Rev. **B33** (1986) 6460
- 4) D. R. Nelson et al.: Ann. of Phys. (N.Y.) **91** (1975) 226