

数之上げ組合せ論—鎖多項式を中心に—

東海大・理 成嶋 弘 (Hiroshi Narushima)

組合せ論には2つの大きな流れがある。1つは明確な組合せ論的対象の研究であり、もう1つは数学の各分野の組合せ論的または数之上げ論的研究である。グラフ、マトロイド、コード、ブロックデザインなどは前者に入り、数之上げは後者に入ると思われる。数之上げの対象は特定の分野に限らずどの分野にもあるからである。

対象の名前のつけかえや回転による（一般に、置換群作用のもとでの）同値類の数之上げ論は、Cauchy-Frobenius の定理（この定理は、その歴史的経緯が P. M. Neumann¹⁾ によって正しく指摘される前までは、Burnside の補題とよばれていた）に始まり、Pólya-Redfield の（置換群の）cycle index を母関数論的に用いた手法の展開、さらに、de Bruijn の一般化等によって、1900年代の前半に確立された。

一方、数論で Möbius の反転公式が古くから知られていたが、この反転公式の本質は整数の可約関係による順序にあることが、Hall, Ward, Weisner²⁾ によって個々に研究されていた。

Rota²⁾は、これを一般の順序集合の incidence algebra のなかで系統的に扱い、その本質的部分が順序集合上の Möbius 関数にあることを把握し、組合せ論におけるその役割を明らかにした。その後、この論文は数々上げ組合せ論の研究者に大きな影響を与え、その多くの成果が Stanley³⁾ にあさめられている。組合せ論的公式の反転関係は線形代数の言葉でいえば、正則な三角行列を扱うにすぎないが、何が本質的であるか見極めたことが重要である。

(しかし、いつまでも、"Möbius 関数"、"Möbius 関数"、と題目を唱えていくわけにはいかない。Joyal⁴⁾ の species theory と The upper bound conjecture に端を発する Stanley⁵⁾ の可換代数的アプローチが、"Möbius 関数" をめぐる最近の大きな成果であるように思われる。

ところで、Narushima^{6)~8)} は順序集合上の inclusion and exclusion を与えたものであり、既約な有限オートマトンの数上げの問題 (Harrison の問題) を扱うために導入され、一般化された定理である。Robinson⁹⁾ は Möbius の反転公式の枠で、(強)連結有限オートマトンの数上げを扱い、そのなかで、"Narushima¹⁰⁾ は very difficult problem を解決した" と述べ、さらに、Narushima の主張と Robinson の方法を combine し、(強)連結かつ既約な有限オートマトンの数上げ (Narushima-Robinson の問題) に挑戦して 4

ではどうかと述べている。この問題はまた unsolved problem であり、置換群作用の数え上げ論と順序集合上の inclusion and exclusion の両方の手法を必要とする "良問" とも思われる。

一方、具体的問題から離れ、Narushima⁶⁾ で与えられた定理をみると、それは順序集合の鎖の集合上にわたる和の計算を必要としている。つまり、順序集合の鎖数がその公式の "addition complexity" であることを意味している。順序集合の鎖数の問題は Rota²⁾ でもふれられており、incidence algebra の枠組の中では、 $(2S-5)^{-1}$ を計算しなければならないから、Stanley³⁾ でも扱われている。しかし、Narushima¹¹⁾ はある simple recursion によって、acyclic digraph (特別な場合が順序集合となる) 上に定めらる多項式 (一般には有理関数) の族をあるベクトル空間としてとらえ、順序集合の鎖多項式論を展開している。Narushima¹²⁾ はこれを多面体的複体の重心部分の f -vector の計算に応用し、特に、単体的複体と立方的複体の場合には、具体的な公式を与えている。単体的複体がブール束の場合であり、立方的複体が立方体束の場合である。分割束、部分空間束、ヤング束の場合も興味ある事実が示されている。また、鎖多項式と Möbius 関数の関連も明白であり、鎖多項式論を Möbius 関数の計算に応用

することもできる。さらに、トポロジーや可換代数などのいくつかの分野の elementary な部分で、順序集合の鎖数計算が必要である。この辺のことは "Counting theory of chain polynomials and its application" としてまとめあげることが、ここ数年の私の仕事であると考えている (Rota にも、つい最近、assistant を通して催促されている)。

ともかくも、Rota, Stanley, Joyal の意欲的な研究活動とその成果により、enumeration が combinatorics の queen に復活しつつあるように思われる。願わくば、"combinatorics が mathematics の queen になること"。

1. 順序集合上の包含と排除の原理

Ω を集合とし、 $\mathcal{P}(\Omega)$ を Ω のべき集合とする。 Ω の要素 x に対して $m(x) \geq 0$ を対応させ、これを x の "測度" と呼ぶ¹⁵⁾。 Ω の有限部分集合 X に対して、 $m(X)$ を

$$m(X) = \begin{cases} \sum_{x \in X} m(x) & (X \neq \phi) \\ 0 & (X = \phi) \end{cases}$$

と定め、 X の "測度" と呼ぶ。このとき、 m を $\mathcal{P}(\Omega)$ 上の "測度" と呼ぶ。 Ω のすべての要素 x に対して $m(x) = 1$ ならば $m(X) = |X|$ (または $\#(X)$: X の要素の個数) であり、 Ω が基本事象の集合で m が Ω 上の確率分布ならば、 $m(X)$ は事象の

集合 X の確率である。

定理 1.1 (半束上の包含と排除の原理) $(L, \vee)$ を有限上
半束とし、 $f: L \rightarrow \phi(\Omega)$ を L の各要素 x と y に対して、
 $f(x \vee y) \supseteq f(x) \cap f(y)$ を満たす写像とする。このとき、

$$m\left(\bigcup_{x \in L} f(x)\right) = \sum_{c \in C} (-1)^{l(c)} m\left(\bigcap_{x \in c} f(x)\right)$$

ただし、 C は L のすべての鎖 (chain: 全順序集合のこと) の
集合であり、 $l(c)$ は鎖 c の長さ ($= \#(c) - 1$) である。双対
形も成り立つ。

この定理の証明、およびブール束や分割束への応用、さら
に分割束上の包除原理の既約有限オートマトンへの数え上げへ
の応用などについては Narushima^(2,10) を参照するとよい。この
定理の応用に当たっては、写像 $f: L \rightarrow \phi(\Omega)$ が $f(x \vee y) \supseteq$
 $f(x) \cap f(y)$ を満たす (このとき、 f を L 上の weak morphism
と呼ぶ) かどうか、および $m(\bigcap_{x \in c} f(x))$ が算術演算で計算で
きうかどうかが必要である。(L が全順序集合であるとき、
 $x \vee y = x$ 或 y であるから、 f は自動的に L 上の weak mor-
phism となり、 C は L の部分集合全体となり、定理 1.1 より
通常の包除原理が得られることに注意せよ。) 半束上の weak

morphism を次のように、一般の順序集合 P 上に拡張し、順序集合上の包含と排除の原理を得る⁸⁾。写像 $f: P \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ が次の条件を満たすとき、 f を P 上の weak morphism と呼ぶ： P の各要素 x と y に対して、 $\{x, y\}$ の極小上界 z が少なくとも一つ存在し、 $f(x) \cap f(y) \subseteq f(z)$ となる。(ここで、 z は $\{x, y\}$ の最小上界 (上限) でないことに注意せよ。)

定理 1.2 (順序集合上の包含と排除の原理) f を順序集合 P 上の weak morphism とする。このとき、

$$m\left(\bigcup_{x \in P} f(x)\right) = \sum_{C \in \mathcal{C}} (-1)^{\ell(C)} m\left(\bigcap_{x \in C} f(x)\right)$$

ただし、 $\mathcal{C}$ は P の鎖全体の集合、 $\ell(C)$ は鎖 C の長さである。
 また、他の 3 つの双対形も成立する。

この定理に対しては、 $\mathcal{P}(P)$ 上の closure relation を用いた証明と全く初等的な証明の 2 つが与えられている⁸⁾。

注意 $(D, \vee, \wedge)$ を分配束、 $(A, +)$ を単位元を 0 の可換環とする。写像 $v: D \rightarrow A$ が D 上の "付値 (valuation)" と呼ばれるのは次の条件を満たすときである： D の各要素 x と y に対して、 $v(x \vee y) + v(x \wedge y) = v(x) + v(y)$ 。このとき、

定理 1.2 (定理 1.1 と 当然) は、 $\mathcal{P}(\Omega)$ 上の "測度" m の代りに、分配束上の "付値" v を用いて、容易に再表現される。^{2), 8)}

筆者が最初に、順序集合に含まれる鎖の個数に興味を持ったのは、定理 1.2 (定理 1.1) を用いるときの計算の手間に関連していたからである。その後、順序複体を通して、組合せ位相幾何や可換代数での鎖数の役割を少なからず知るようになり、また、つい最近では、ヤング束を通して群の表現論との関連にも興味を持つようになった。

2. 鎖多項式とその計算法

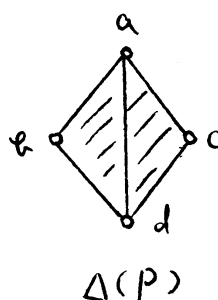
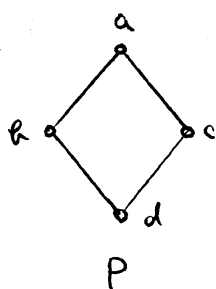
順序集合 P に含まれる長さ i の鎖の個数を c_i で表すとき、 $(c_0, c_1, \dots, c_d)$ を 鎖ベクトル (chain vector or c -vector) といい、次の多項式を 鎖多項式 (chain polynomial of P) という: (以下、順序集合 P は有限とする)

$$p_P(x) = \sum_{i=0}^d c_i x^i$$

ただし、 d は P に含まれる最長鎖の長さである。幾何学的には、 c_i は P の順序複体 $\Delta(P)$ の i 次元面の個数であり、 P の鎖ベクトルは $\Delta(P)$ の 面ベクトル (face vector or f -vector) と呼ばれているものになる。従って、 P の鎖多項式を $\Delta(P)$ の 面多項式 (face polynomial of $\Delta(P)$) と呼んでよい。

$p_P(-1) = \sum_{i=0}^d (-1)^i c_i$ が位相幾何学的な意味を持つことは明らかである。

例 2.1



に対して、

c-vector or f-vector: $(4, 5, 2)$

$$p_P(x) = 2x^2 + 5x + 4, \quad p_P(1) = 11, \quad p_P(-1) = -1$$

となる。

鎖ベクトルを求めるための良く知られた方法は、結合行列 (incidence matrix) n を用いるのである。より一般に 順序集合 P の結合代数 ^{(2), (3)} (incidence algebra of P) のなかで取り扱うならば、次のようになる。 $\mathbb{R}$ を実数の集合とし、関数の集合 $\{f: P \times P \rightarrow \mathbb{R} \mid f(s, t) = 0 \text{ (} s \not\leq t \text{)}\}$ ($= \mathcal{A}(P)$) に対して、

$$\bullet \text{ 和: } (f+g)(s, t) = f(s, t) + g(s, t)$$

$$\bullet \text{ スカラー倍: } (af)(s, t) = a(f(s, t))$$

$$\bullet \text{ 積: } (f \cdot g)(s, t) = \sum_{s \leq u \leq t} f(s, u) g(u, t)$$

ここで、積が定義できるためには、 P の任意の区間が有限で

なければならぬ。このような順序集合は局所有限と呼ばれているが、先に断ったように、本稿では、 P は有限であるから問題は無い。これらの演算のもとで、 $A(P)$ は $\mathbb{R}$ 上の結合代数 (associative algebra) となることは容易にわかる。 $A(P)$ で重要なことは、「 $A(P)$ の要素 f が可逆 (正則) であるための必要十分条件は P のすべての要素 s に対して $f(s, s) \neq 0$ である」ということである。さらに、 $A(P)$ のなかで特に重要な関数は次の3つの関数である：

1) P の zeta 関数 (または Riemann 関数) ζ :

$$\zeta(s, t) = \begin{cases} 1 & (s \leq t) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

2) P の Möbius 関数 μ :

$$\mu(s, t) = \begin{cases} 1 & (s = t) \\ -\sum_{s \leq u < t} \mu(s, u) & (s < t) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

3) P の 結合関数 (incidence fun.) η :

$$\eta = \zeta - \delta$$

ただし、 δ は Kronecker delta 関数 (単位行列) である。

このとき、 $\zeta \mu = \mu \zeta = \delta$ が成り立つこと、および P として、可約関係による順序の入った自然数の集合を考へれば、これらの関数は初等整数論的関数になることに注意しよう。¹⁶⁾ さて、

$C_i = n^i$ ($n^0 = \delta$) の各成分の総和
 であることに注意すれば⁽¹⁾、おのずか、 $d(P)$ となるまでの鎖数の
 計算法は明らかとなる。

例 2.2 例 2.1 の P に対して、行も列も d, c, b, a の順
 とすれば、 n^i は次のようになる。

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad n^i = 0 \quad (i \geq 3)$$

(零行列)

また、次のような関係式にも注意するとよい。

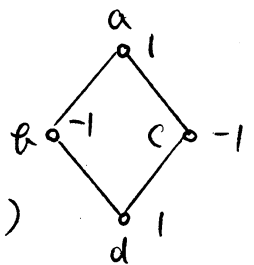
$$(\delta - n)^{-1} = \delta + n + n^2 \quad (\text{成分の総和} = 11)$$

$$\begin{aligned} (\delta - n)^{-1} &= (\delta - (\zeta - \delta))^{-1} \\ &= (2\delta - \zeta)^{-1} = \frac{1}{2} \left(\delta + \frac{\zeta}{2} + \left(\frac{\zeta}{2}\right)^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

さらに、

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ 0 & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(d, t):$$

($t = d, c, b, a$)



である。(詳しくは Stanley³⁾ を参照。)

行列の計算には、かなり時間がかかるものである。鎖多項
 式を計算するためのより簡明な方法はないだろうか？

Narushima^{10), 11), 12)} は、いわゆるパスカルの三角形における計算法の一般化ともなり得る方法を導入し、それを単純再帰法 (simple recursive method) と呼んでいる。以下、その概略を示す。

D を非巡回有向 (有限) グラフ (acyclic digraph), $Q(x)$ を有理関数体とし, Q の要素 a, b に対して、写像 $f^{(a, b)}: D \rightarrow Q(x)$ を次のように再帰的に定める:

$$f^{(a, b)}(t) = \begin{cases} a & (t \text{ が sink のとき}) \\ (\sum_{t \rightarrow s} f^{(a, b)}(s))x + b & (\text{その他}) \end{cases}$$

ここで、 $t \rightarrow s$ は頂点 t から s へ隣接していることを表す。

この計算法は D の弧の個数に関して線形オーダーである。 $\{f^{(a, b)} \mid a, b \in Q\}$ を $\mathcal{L}(D)$ で表す。 $f, g \in \mathcal{L}(D)$, $a \in Q$ に対して、次のように通常の加法とスカラー積を定める:

$$\text{和: } (f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$\text{スカラー積: } (af)(t) = a(f(t))$$

このとき、これらの演算のもとで、 $\mathcal{L}(D)$ は 2次元の線形空間 Q^2 に同型な Q 上の線形空間となる。その基底の1つは、 $\{f^{(1,0)}, f^{(0,1)}\}$ であり、 $f^{(1,0)}(t)$, $f^{(0,1)}(t)$ の x^i の係数はそれぞれ、 D における t から sinks への長さ i の道の個数、 t から sinks 以外の頂点への長さ i の道の個数である。さ

らに、 $f^{(1,1)} = f^{(1,0)} + f^{(0,1)}$ であるから、 $f^{(1,1)}(t)$ の x^i の係数は t から長さ i の道の個数である。次に、 $\mathcal{L}(D)$ の各要素 f に対して、

$$\tilde{f} = \sum_{t \in V(D)} f(t), \quad \text{ただし } V(D) \text{ は } D \text{ の頂点の集合}$$

と定めると、 $\tilde{f}^{(1,1)}$ の x^i の係数は、 D の長さ i の道の個数であり、 $\tilde{f}^{(1,1)}$ は D の 道多項式 (path polynomial of D) と呼ばれている。

acyclic digraph D が推移律を満たすとき、 D は順序集合 (正確には、non-reflexive poset) となり、前述の記号、用語が次のように代るだけであり：

$$\sum_{t \rightarrow s} \Rightarrow \sum_{t > s}, \quad \text{道 (path)} \Rightarrow \text{鎖 (chain)}$$

また、 D が順序集合 P のハッセ図 ($H(P)$) を表すとき、次のように代るだけであり：

$$\sum_{t \rightarrow s} \Rightarrow \sum_{t > s}, \quad \text{道 (path)} \Rightarrow \overset{\text{covering chain}}{\text{被覆鎖}} \text{ (極大鎖)} \underset{\text{maximal chain}}{\text{}}$$

D が順序集合 P であるとき、 $f^{(1,1)} \in \mathcal{L}(P)$ に対して、

$$\tilde{f}^{(1,1)} = p_P(x) = \sum_{i=0}^d c_i x^i \quad (\text{鎖多項式})$$

であることは明らかである。また、次の定理を得る。

定理 2.1 P を (連結な) 順序集合とする。このとき、 P の極小元を除くすべての要素 t に対して、

$$f^{(1,0)}(t) = (f^{(0,1)}(t))x$$

となるための必要十分条件は、 P が最小元を一つとてある。

定理 2.2 P を最大元 $\hat{1}$ を持つ順序集合とするとき、

$$\tilde{f}^{(a,b)} = ((x+1)f^{(a,b)}(\hat{1}) - b)/x$$

が成り立つ。

さらに、次の命題は接合代数の Möbius 関数等との関係を示す。

命題 2.1 P を順序集合、 $[s, t]$ を P の区間とする。このとき、 $f^{(1,0)} \in \mathcal{L}([s, t])$ 、 $f^{(1,1)} \in \mathcal{L}(P)$ に対して、次が成り立つ。

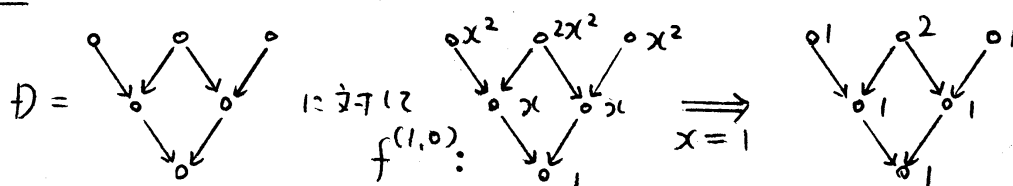
$$(1) (\zeta - f)^i(s, t) = n^i(s, t) = f^{(1,0)}(t) \text{ の } x^i \text{ の係数,}$$

$$(2) (2f - \zeta)^{-1}(s, t) = (f - n)^{-1}(s, t),$$

$$= f^{(1,0)}(t) \Big|_{x=1} = t \text{ から } s \text{ への (個数) 鎖の数}$$

$$(3) \mu(s, t) = f^{(1,0)}(t) \Big|_{x=-1}.$$

例 2.3 パスカルの三角形 ($\hat{1} = 2 \times 2$ 元格子グラフ)



例 2.4 例 2.1 の順序集合 p に対して、 $\mathcal{L}(p)$ で考えよう。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & a & \\
 & \circ & \\
 b & \swarrow & \searrow \\
 \circ & & \circ \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & d & \\
 & \circ & \\
 & 1 &
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 2x^2+x \\
 x \quad x \\
 1
 \end{array}
 & + &
 \begin{array}{ccc}
 & a & \\
 & \circ & \\
 b & \swarrow & \searrow \\
 \circ & & \circ \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & d & \\
 & \circ & \\
 & 0 &
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 2x+1 \\
 1 \quad 1 \\
 0
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & a & \\
 & \circ & \\
 b & \swarrow & \searrow \\
 \circ & & \circ \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & d & \\
 & \circ & \\
 & 1 &
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 2x^2+3x+1 \\
 x+1 \quad x+1 \\
 1
 \end{array}
 \\
 f^{(1,0)} & & f^{(0,1)} & & f^{(1,1)}
 \end{array}$$

$$\circ \tilde{f}^{(1,1)} = (2x^2+3x+1) + 2(x+1) + 1 = 2x^2+5x+4 = p_p(x)$$

$$(\tilde{f}^{(1,1)} = ((x+1)f^{(1,1)}(a) - 1)/x : \text{定理 2.2 に注意})$$

$$\circ \mu(d, a) = f^{(1,0)}(a)|_{x=-1} = (2x^2+x)|_{x=-1} = 1$$

例 2.5 本講究録の郡山氏の例 1 に対して、

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \hat{1} & \\
 & \circ & \\
 x(x+1) & \swarrow & \searrow \\
 \circ & & \circ \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & \circ & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & \hat{0} & \\
 & \circ & \\
 & 1 &
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (5x^2+7x+1)x \\
 (2x+1)x \quad (2x+1)x \\
 x \quad x \quad x \\
 1
 \end{array}
 & \xRightarrow{x=-1} &
 \begin{array}{ccc}
 & \hat{1} & \\
 & \circ & \\
 0 & \swarrow & \searrow \\
 \circ & & \circ \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & \circ & \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & \hat{0} & \\
 & \circ & \\
 & 1 &
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 1 \quad 1 \\
 -1 \quad -1 \\
 1
 \end{array}
 \\
 f^{(1,0)}(e \in \mathcal{L}([\hat{0}, \hat{1}])) & & \mu(\hat{0}, t)
 \end{array}$$

(これらの幾何学的意味については郡山氏の項を参照)

以上のように、一般の順序集合の鎖の個数にかかぶる量の計算法として、“単純再帰法”が接合代数の行列的手法より簡明

であることがわかる。ところで、 P が組合せ論に良くでてくる具体的な順序集合、すなわち、ブール束、立方体束、分割束、ヤング束、部分空間束などのとき、単純再帰法により、これらの鎖多項式に関する具体的な漸化式が“直接的”に得られるであろうか。まず、ブール束、立方体束、分割束の場合、次のように容易に得られて^{(17), (11), (12), (18)}いる。

命題2.2 一般論より、 $f^{(1,0)}$, $f^{(0,1)}$, $f^{(1,1)}$ などのいずれかが求まればよいので、形が簡明な場合を示す。

(1) n 次のブール束 B_n に対して、 $\mathcal{L}(B_n)$ の $f^{(1,0)}(\hat{1})$ を $g_n(x)$ で表わすと、

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} g_k(x) \right) x & (n \geq 1) \end{cases}$$

となる。

(2) n 次の立方体束 (超立方体の面の包含関係から得られるもの) から最小元を除いたもの C_n^- に対して、 $\mathcal{L}(C_n^-)$ の $f^{(1,1)}(\hat{1})$ を $r_n(x)$ で表わすと、

$$r_n(x) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \sum_{k=0}^{n-1} ((2^{n-k} \binom{n}{k})) r_k(x) x + 1 & (n \geq 1) \end{cases}$$

となる。

(3) n 次の分割束 PL_n とその順序双対 PL_n^* に対して、
 $\mathcal{L}(PL_n^*)$ の $f^{(1,1)}(\hat{1})$ を $S_n(x)$ で表わすと、一般論よりこの $S_n(x)$
 は $\mathcal{L}(PL_n)$ の $f^{(1,1)}(\hat{1})$ と等しくなり、

$$S_n(x) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ \sum_{k=1}^{n-1} S(n, k) S_k(x) x + 1 & (n \geq 2) \end{cases}$$

を得る。ただし、 $S(n, k)$ は第 2 種のスターリング数である。

さらに、 $g_n(x)$ と $\gamma_n(x)$ に対しては自関数や関いた式が得られて^{(11), (12)} いるが、 $S_n(x)$ に対しては得られていない。また、 $g_n(1)$ に対する $(n \rightarrow \infty$ のときの) 漸近公式が得られて^{(19), (20)} いる。 n 次の分割束 PL_n の被覆鎖 (covering chain) の個数に関する次の計算実験の結果は興味深い⁽¹⁸⁾。

実験結果 $C_{PL}(n)$ で PL_n の最大元 $\hat{1}$ からの被覆鎖の総数、
 $\tilde{C}_{PL}(n)$ で PL_n の被覆鎖の総数を表わすと、

$$\tilde{C}_{PL}(n) / C_{PL}(n) \rightarrow 2.3948330992734047165 \dots \quad (n \rightarrow \infty)$$

Open Problem 上記の数を既知の定数等で表わせ!

(ちなみに、ブール束の場合、ネイピアの数 e となる)

なお、単体的複体の f -vector とその重心部分の f -vector の関係式、および立方的複体の f -vector とその重心部分

の f -vector の関係式が、単純再帰法を用いて与えられて^{(12), (21)}いる。

ところで、ヤング束の場合は単純再帰法は有効であろうか。
 Y_n で n 次のヤング束 (数 n の分割子でのヤング束) を表わし、
 Y_n^* で Y_n の順序双対を表わし、 $f^{(1,0)} \in \mathcal{L}(H(Y_n^*))$ に対して
 $f^{(1,0)}(\uparrow) \big|_{x=1}$ を $f(n)$ とおく。このとき、次のような簡明な
 漸化式が与えられて³⁾いるが、この漸化式を単純再帰法によ
 って "直接的に" 導くことが今のところでき⁴⁾ない：

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 1 \\ f(n) = f(n-1) + (n-1)f(n-2) \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

この漸化式は、 Y_n^* の極大鎖の集合と n 次の対称群 S_n の
 involutions の集合の間の Robinson-Schensted の対
 応^{(12), (22)} $\# \{S_n \text{ の involutions} \} = f(n)$ であることから、 S_n の
 involution を数えることにより、得られる。また、 $f(n)$
 の閉じた式、母関数、漸近公式も与えられて³⁾いる。(この辺の
 ところやその拡張に関する結果は本講義録⁹⁾岩堀スーエルの精
 鋭による項を参照。) 最近、Stanley²²⁾ (この preprint は
 本日: 1987 年 12 月 19 日に受け取ったばかりである) はヤング
 束の "simple structural properties" にもとづく数え上
 げを考察している。

部分空間束の combinatorics に関する論文は沢山あるが、
 まだ、良く読んでいないので、何も具体的に述べることがで

ミナリのが残念である。我々の目的:

“単純再帰法 (simple recursive method) を用いて、
種々の組合せ論的数や公式を順序集合 (より一般に
acyclic digraph) の鎖の個数で解釈する: τ ”

を達成するためには、より強力な理論を構築しねばならぬ:
 τ は確かであろうである。

その際、与えられた $g(x)$ に対して、 $p_P(x) = g(x)$ となる順序
集合 P の構成問題やクラス $\{P \mid p_P(x) = g(x)\}$ の考察が重要であ
ると思われる。また、 C -vector の特徴付けは、本講究録の
郡山氏、田比氏、渡辺氏の項とも関連している。

文献

1. P. M. Neumann, A lemma that is not Burnside's, Math. Scientist 4 (1979), pp. 133-141.
2. G.-C. Rota, On the foundations of combinatorial theory I; Theory of Möbius functions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. 2 (1964), pp. 340-368.
3. R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics I, Wadsworth, 1986.
4. A. Joyal, Une theorie combinatorie des series formelles, Advan. in Math. 42 (1981), pp. 1-82.
5. R. P. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, Birkhäuser, 1983.

6. H. Narushima, Principle of inclusion-exclusion on semi lattices, J. Combinatorial Theory A, (17) (1974), pp. 196-203
7. H. Narushima and H. Era, A variant of inclusion-exclusion on semi lattices, Discrete Math., 21 (1978), pp. 215-219
8. H. Narushima, Principle of inclusion-exclusion on partially ordered sets, Discrete Math., 42 (1982), pp. 243-250.
9. R.W. Robinson, Counting strongly connected finite automata, in Y. Alavi, G. Chartrand, et al (eds.), Graph theory with Applications to Algorithms and Computer Science, (John Wiley & Sons, 1985), pp. 671-685.
10. H. Narushima, Principle of inclusion-exclusion on semi lattices and its applications, Doctor's Thesis, Waseda Univ., 1977.
11. H. Narushima, A class of recurrence relations on acyclic digraphs of poset type, RIMS Kokyuroku 427 (Applied Combinatorial Theory and Algorithms), June 1981, pp. 56-67.
12. H. Narushima, An algorithmic role of the face-posets of polyhedral complexes, in Suzuki, S. (ed), Topology and Computer Science, (Kinokuniya, 1987), pp. 521-533.
13. O. Nara and G.-C. Rota, Plethysm, Categories, and Combinatorics, Advan. in Math. 58 (1985), pp. 61-88.
14. F. Bonetti, G.-C. Rota, D. Senato and A. M. Venezia, Symmetric functions and Symmetric species, Annals of Discrete Math. 30 (1986), pp. 107-114.

15. C. Berge, *Principle of Combinatorics*, Academic Press, 1971.
16. 本田欣哉, Vinogradov 著 (三瓶, 山中訳), 整数論入門の付録Ⅱ (1962年版), 共立全書.
17. H. Narushima, A method for counting the number of chains in a partially ordered set, *Proc. Fac. Sci. Tokai Univ.* XVI (1981), 3-20.
18. 成嶋弘、峯崎俊哉, 組合せ論の数と整数型高精度計算, in 「グラフ理論の数値計算への応用」 統計数理研究所 (昭和62年1月), 49-53.
19. H. Narushima, An asymptotic formula for the number of chains in a Boolean lattice: a survey and another proof, *Proc. Fac. Sci. Tokai Univ.* XXI (1986), 21-26.
20. H. Narushima and T. Hilano, A limit on the number of chains in a Boolean lattice, preprint.
21. H. Narushima, M. Tsuchiya, and T. Minezaki, A method for computing the face-vector of a barycentric subdivided polyhedral complex, preprint.
22. R. P. Stanley, Differential posets, preprint