

局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ有理 3 次元球面について

福井大学・教育地域科学部 西村 保三

Yasuzo NISHIMURA

Faculty of Education and Regional Studies,

University of Fukui

Lü-Yu は, 3 次元 $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面 M が, 局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ必要十分条件は, M がある $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面 N の 8 個のコピーの連結和 $N \sharp N \sharp \cdots \sharp N$ に同変同相であること, 特に M が既約であれば S^3 に限ることを示した。本稿では, 彼らの議論を拡張して, 有理 3 次元球面で局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つものを考察する。

1 標準的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用

本稿では $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ は位数 2 の可換群を表し, $(\mathbb{Z}_2)^n$ はその n 個の直積を表す。 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用

$$(s_1, \dots, s_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = ((-1)^{s_1}x_1, \dots, (-1)^{s_n}x_n)$$

を標準的表現と呼ぶ。この作用の軌道空間 $\mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}_2)^n$ は, 第 1 象限 $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ である。

定義 1.1 閉 n 次元多様体 M 上の効果的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用が局所標準的とは, 作用が局所的に標準的表現と同型であるときをいう。

例 1.2 1. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 上の $\mathbb{Z}_2$ -作用を, x 軸に関する対称変換 $(x, y) \mapsto (x, -y)$ とする。これを n 個直積することで, トーラス $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 上の局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用が得られる。この作用の軌道空間は, n 次元立方体 I^n である。

2. 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ 上の標準的な $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用

$$(s_1, \dots, s_n) \cdot [x_0, x_1, \dots, x_n] = [x_0, (-1)^{s_1}x_1, \dots, (-1)^{s_n}x_n]$$

は局所標準的である。この作用の軌道空間は n 次元単体 Δ^n である。

3. n 次元球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上の標準的な $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用

$$(s_1, \dots, s_n) \cdot (x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0, (-1)^{s_1}x_1, \dots, (-1)^{s_n}x_n)$$

は局所標準的である。この作用の軌道空間は, 例えば $n = 2$ なら 2 角形, $n = 3$ なら 3 枚の 2 角形面を境界を持つ「フットボール形 (以下 **B**)」である (図 1)。

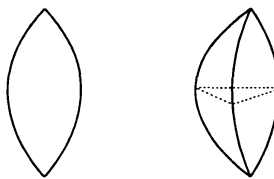


図 1: 2 角形とフットボール形 B

n 次元角付き多様体とは、各点が第 1 象限 $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ の開部分集合と同相な近傍を持つハウスドルフ空間である。角付き多様体 Q の各点 x について、 x の局所座標を $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ とするとき、 x の余次元 $\text{codim}(x)$ は $x_i = 0$ となる i の個数として定義される。 Q の余次元 k の点からなる連結部分集合の閉包を、余次元 k の面といい、特に余次元 1 の面を **ファセット** という。また、余次元 2 の任意の点 x について、 x を含むファセットがちょうど 2 個であるとき、 Q は **ナイス** と呼ばれる。

一般に、局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用の軌道空間について、次の事実が知られている ([1] 参照)。

補題 1.3 M を局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用を持つ n 次元閉多様体とすると、その軌道空間 $Q = M/(\mathbb{Z}_2)^n$ は、コンパクトでナイスな n 次元角付き多様体である。

任意の単純凸多面体は、コンパクトでナイスな角付き多様体である。一方、図 1 の 2 角形や、フットボール形 B は、単純凸多面体でない角付き多様体の例である。

定義 1.4 局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用のある n 次元閉多様体 M で、軌道空間 $Q = M/(\mathbb{Z}_2)^n$ が単純凸多面体であるものを、**small cover** と呼ぶ。

以下、 M は局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用のある n 次元閉多様体とし、軌道写像を $\pi: M \rightarrow Q$ とする。さらに、この作用には固定点があるとし、 $\partial Q \neq \emptyset$ を仮定しておく。このとき、角付き多様体 Q の各ファセット F に対して、 F の内点の引き戻し $x \in \pi^{-1}(\text{int} F)$ の固定部分群の生成元を対応させる写像 $\lambda: \mathcal{F}(Q) \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ を、 M の **表現写像** という。ここで、 $\mathcal{F}(Q)$ は Q のファセットの集合である。表現写像は以下の条件を満たし、特に Q の面彩色となっている。

$$(*) F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset \Leftrightarrow \{\lambda(F_1), \dots, \lambda(F_n)\} \text{ は線形独立}$$

一般に、コンパクトでナイスな角付き多様体 Q について、 $(*)$ を満たす写像 $\lambda: \mathcal{F}(Q) \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ を Q の $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色と呼ぶ。

例 1.5 $n = 3$ の場合に、例 1.2 に挙げた S^3 , $\mathbb{R}P^3$, T^3 の表現写像を図 2 に示す。図で、多面体はシュレーゲル図式で表されており、 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ は $(\mathbb{Z}_2)^3$ の基底を表す。

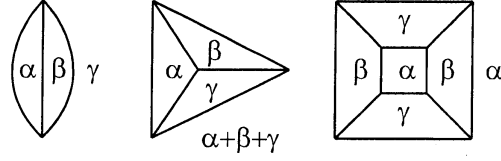


図 2: S^3 , $\mathbb{R}P^3$, T^3 の表現写像

2つの局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用を持つ n 次元多様体 M_1, M_2 は, ある $\theta \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_2)^n$ が存在して, θ -同変同相写像 $f: M_1 \rightarrow M_2$ すなわち $f\pi_2 = \pi_1$, $f(g \cdot x) = \theta(g) \cdot f(x)$ を満たすときに同値と定義し, 単に同変同相と呼ぶことにする。またコンパクトでナイスな角付き多様体 Q 上の, 2つの $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色 λ_1, λ_2 は, ある基底変換 $\theta \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_2)^n$ で移り合う, すなわち $\lambda_2 = \theta\lambda_1$ が成り立つとき, DJ -同値という。

定理 1.6 (Davis-Januszkiewicz [2]) 単純凸多面体 Q 上の small cover の同値類は, Q の $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色の DJ -同値類と一対一に対応する。逆対応は, $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色多面体 (Q, λ) に対して, small cover を以下で構成する。

$$M(Q, \lambda) := (Q \times (\mathbb{Z}_2)^n) / \sim, \quad (x, g) \sim (y, h) \Leftrightarrow x = y, g = h \bmod \lambda(F) \quad (x \in \text{int}(F))$$

注意 1.7 Q が単純凸多面体でないときは, $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色 λ だけでは, M を再構成できるとは限らない。その場合は, Q 上の主 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -束 $\xi: E \rightarrow Q$ の同型類を加えた情報 (λ, ξ) で, M は分類できることが知られている ([3] 参照)。

定理 1.6 より, small cover の位相的性質は, 全て $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色多面体の言葉で記述できる。特に, small cover が向き付け可能になるための彩色の条件を, 以下で考察する $n = 3$ の場合についてのみ掲げておく ([6] 参照)。

命題 1.8 3次元 small cover M が向き付け可能である必要十分条件は, 表現写像の像が, ある基底 $\alpha, \beta, \gamma \in (\mathbb{Z}_2)^3$ に対して, $\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$ に含まれることである。

命題 1.8 について, $\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$ のどの3つも1次独立であるから, これは通常の意味の4色による面彩色と同じであることに注意する。

2 局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ有理3次元球面

Lü-Yu [5, Theorem 1.1] は, 3次元 $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面で, 局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つものを次のように特徴づけた。

定理 2.1 (Lü-Yu) M を 3 次元 $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面とする。 M が局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ必要十分条件は、ある $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面 N が存在して、 M が 8 個の N のコピーの連結和 $N \# N \# \cdots \# N$ と同相になることである。特に、 M が既約であれば、 $M = S^3$ である。

この定理は、 $\mathbb{Z}_2$ -作用のある既約なホモトピー 3 次元球面は S^3 に限るか？という未解決問題に関係している。本稿では、上の定理を拡張して、有理 3 次元球面で局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つものを考察する。

問題 2.2 M を向き付け可能な有理 3 次元球面で、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2) = k \geq 1$ とする。 M はいくつ局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つか？

この問題は、 $k = 1$ の場合についてのみ、[5, Theorem 1.2] で決定されている。

定理 2.3 (Lü-Yu) M を向き付け可能な有理 3 次元球面で $H_1(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ を満たすものとする。 M が局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ必要十分条件は、 M が $\mathbb{R}P^3$ と、ある $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面 N の 8 個のコピーとの連結和 $\mathbb{R}P^3 \# N \# N \# \cdots \# N$ と同相になることである。特に、 M が既約であれば、 $M = \mathbb{R}P^3$ である。

本論文では、この定理を次のように拡張する。

定理 2.4 M を向き付け可能な有理 3 次元球面で、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2) = k < 8$ とする。 M が局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ必要十分条件は、 M がある small cover L ($k = 0$ のときは $L = S^3$) と、ある $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面 N の 8 個のコピーの連結和 $L \# N \# N \# \cdots \# N$ と同相になることである。ここで small cover L も、有理 3 次元球面であり、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_1(L; \mathbb{Z}_2) = k$ を満たす。

証明 条件を満たす M について、 $H^*(M/(\mathbb{Z}_2)^3; \mathbb{Q}) \cong H^*(M; \mathbb{Q})^{(\mathbb{Z}_2)^3} = 0$ より、軌道空間 $Q = M/(\mathbb{Z}_2)^3$ は有理 3 次元球体。従って、 ∂Q は S^2 と同相である。 ∂Q の面構造は、3-連結正則平面的グラフ（もし 3-連結でなければ、後述する定理 2.7 を small cover でない場合にも拡張した議論によって M は有理球面になりえないことがわかる）なので、シュタイニッツの定理から、 ∂Q は、ある単純凸多面体かフットボール形 $\mathbf{B}$ の境界と組合せ同型である。この多面体（単純凸多面体またはフットボール $\mathbf{B}$ ）を P と表し、 Q と同じ $(\mathbb{Z}_2)^3$ -彩色で定義される P 上の small cover ($P = \mathbf{B}$ のときは S^3) を L と表すことにする。

以下は、[5] の議論を踏襲する。 Q の境界から、1 つのファセットだけを残して、面構造を全て取り去った角付き多様体を Q' とする。このとき逆に Q は、 Q' と多面体 P を、1 つのファセットの内点で連結和した角付き多様体と同相である。すなわち、 $(M, Q, \lambda) = (M', Q', \lambda') \#_{B,B} (L, P, \lambda)$ と表せる ($\#_{B,B}$ は、自由軌道に沿った同変連結和)。このとき、 M' は固定点を持たず、その軌道は全て自由である。従って M' は 8 の約数の個数からなる連結成分を持ち、 M は M' と 8

個の $S^2 \times I$ チューブで連結されている。しかし, $H_1(M; \mathbb{Q}) = 0$ であるから, M にはループがあつてはならないので, $M' = Q' \times (\mathbb{Z}_2)^3$ であり, M は L と Q' の 8 個のコピーとの連結和 $L \# Q' \# \cdots \# Q'$ に同相になる場合しかありえない。 $k < 8$ のとき, Q' は $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面, $H_1(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_1(L; \mathbb{Z}_2)$ である。また $L = S^3$ となるのは, $k = 0$ の場合に限る。□

定理 2.4 より, $k < 8$ のとき, 問題 2.2 は small cover で有理球面になるものを特徴づければよいことになる。 $k = \text{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ が小さいときを調べた結果を以下に示す。

命題 2.5 M は small cover でかつ有理 3 次元球面になるものとし, $k = \text{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2) \leq 4$ とする。このとき, M は k 個の $\mathbb{R}P^3$ の連結和に同変同相である。ただし, $k = 4$ のときは, 4 個の $\mathbb{R}P^3$ の連結和で同変同相でないものが 3 種類ある。それぞれの small cover に対応する $(\mathbb{Z}_2)^3$ -彩色多面体は図 3 と図 4 で表される。

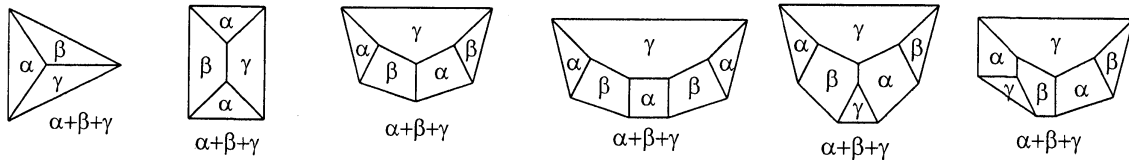


図 3: k 個の $\mathbb{R}P^3$ の連結和 ($k = 1, 2, 3$)

図 4: 4 個の $\mathbb{R}P^3$ の連結和 (3 種)

注意 2.6 命題 2.5 は $k \geq 5$ では成り立たない (図 5)。

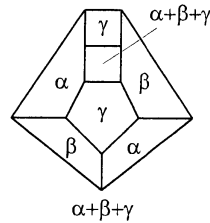


図 5: $\mathbb{R}P^3$ の連結和でない有理球面 small cover の例

(P, λ) を $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ の 4 色で面彩色された単純凸多面体とする。2 色の組 $S \subset \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ に対して, $C_S := \bigcup \{F \in \mathcal{F}(P) \mid \lambda(F) \in S\} \subset \partial P$ (もしくは, C_S は ∂P の双対単体的グラフ K_P の部分グラフとして考える) を (P, λ) の Kempe 鎖 (S -鎖) という。例えば $S = \{\alpha, \beta\}$ のとき, C_S を $\{\alpha, \beta\}$ -鎖といい, その補集合 $\partial P \setminus C_S = C_{S^c}$ は $\{\gamma, \delta\}$ -鎖である。

small cover が有理 3 次元球面になる特徴づけは, 次の定理で与えられる。

定理 2.7 4色で面彩色された3次元単純凸多面体 (P, λ) に対応する向き付け可能 small cover $M(P, \lambda)$ が, 有理3次元球面になる必要十分条件は, (P, λ) の全ての Kempe 鎖が連結であることである。または全ての Kempe 鎖が木になることとも言い換えられる。

最近 Suciu-Trevisan [8] において, 一般の small cover の有理係数ホモロジー群が次のように計算された。定理 2.7 は, 彼らの結果に $n = 3$ で向き付け可能な場合に適用することでただちに証明できる (この場合, 例えば $S = \{\alpha, \beta\}$ とすると, 定理 2.8 の P_S は S の補集合の Kempe 鎖すなわち $\{\gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$ -鎖 C_{S^c} に一致することに注意せよ)。

定理 2.8 (Suciu-Trevisan) n 次元単純凸多面体 P 上の small cover M に対して, その i -th 有理ベッチ数 $\beta_i(M)$ は次式で与えられる。

$$\beta_i(M) = \sum_{S \subset \{1, 2, \dots, n\}} \text{rank}_{\mathbb{Q}} \tilde{H}_{i-1}(P_S; \mathbb{Q})$$

ここで, $P_S := \bigcup \{F \in \mathcal{F}(P) \mid \sum_{i \in S} \lambda(F) \cdot e_i = 0\} \subset \partial P$ (e_i は $(\mathbb{Z}_2)^n$ の標準基底) とする。

3 カット & ペースト作用素

2つの small cover (または彩色多面体) から, それぞれある部分を取り除いて, 残った部分を境界同士で張り合わせて新しい small cover (または彩色多面体) を構成する作用素を考える (図 6, 7, 8, 9。より詳しくは [4, 7] 等参照)。

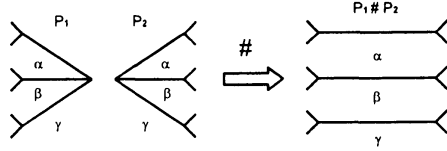


図 6: 連結和 $\#$

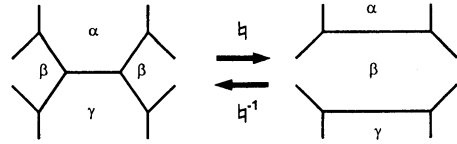


図 7: 手術 h, h^{-1}

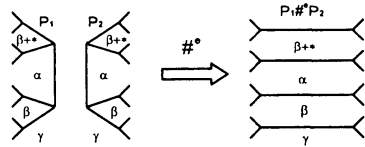


図 8: 辺連結和 $P_1 \#^e P_2 = h(P_1 \# P_2)$

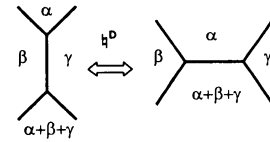


図 9: Dehn 手術 $h^D P = P \#^e \Delta^3$

例 3.1 注意 2.6 の多面体 P は, $\natural^D(\Delta^3 \sharp \Delta^3 \sharp \Delta^3) \sharp^e (\Delta^3 \sharp \Delta^3 \sharp \Delta^3)$ または, $\natural^{-1}(\Delta^3 \sharp \Delta^3 \sharp \Delta^3) \sharp^e (\Delta^3 \sharp \Delta^3)$ として構成できる (図 10, 11)。

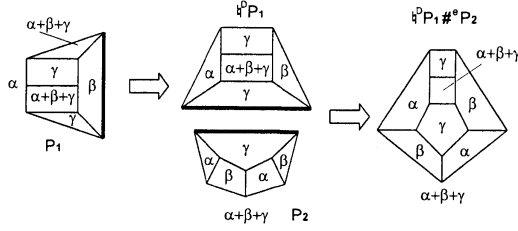


図 10: $P = \natural^D P_1 \sharp^e P_2$

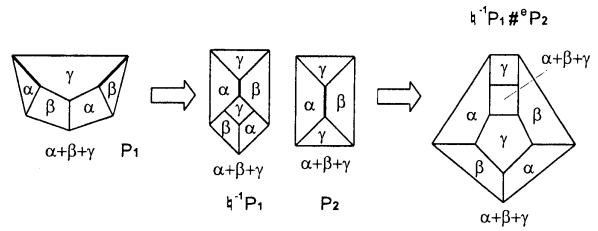


図 11: $P = \natural^{-1} P_1 \sharp^e P_2$

上記の例に関して, 一般に次のことがわかる。

命題 3.2 M_1, M_2 を有理 3 次元球面となる small cover とする。このとき, 以下の作用素で構成される small cover も有理球面である。

1. $M_1 \sharp M_2$
2. $\natural^D M_1 \sharp^e M_2 = M_1 \sharp^e \mathbb{R}P^3 \sharp^e M_2$
3. $\natural^{-1} M_1 \sharp^e M_2$

作用素 2, 3 に対応する 4-彩色多面体の作用素は, それぞれ図 12, 13 で表される。

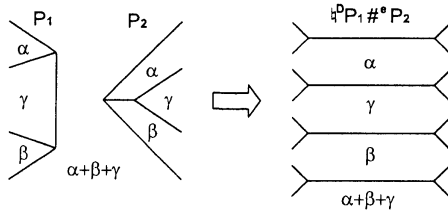


図 12: $\natural^D P_1 \sharp^e P_2$

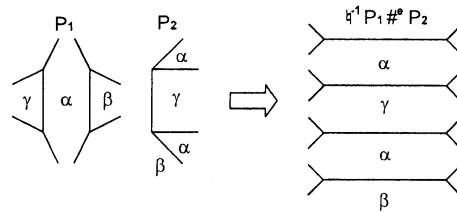


図 13: $\natural^{-1} P_1 \sharp^e P_2$

注意 3.3 命題 3.2 の作用素を用いることで, 有理 3 次元球面となる small cover は, (辺) 連結和していくことで幾らでも構成できる。そこで, 有理 3 次元球面となる small cover は $\mathbb{R}P^3$ から, 命題 3.2 の作用素を繰り返して得られるものだけか? という問題が生じるが, これには反例がある。図 14 の多面体に対応する small cover は, 命題 3.2 の作用素で $\mathbb{R}P^3$ から構成できない有理球面 small cover の例である。

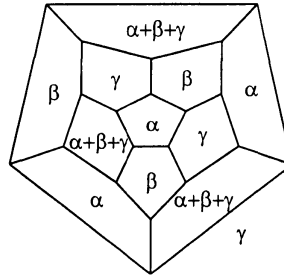


図 14: 4 彩色された正 12 面体

問題 3.4 全ての有理 3 次元球面となる small cover を，幾つかの基本的な small cover からカット＆ペースト作用素で構成する方法を考えよ。

参考文献

- [1] M. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983), 293–324.
- [2] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Coxeter polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417–451.
- [3] Z. Lü and M. Masuda, *Equivariant classification of 2-torus manifolds*, Colloq. Math. **115** (2009), 171–188.
- [4] Z. Lü and L. Yu, *Topological types of 3-dimensional small covers*, Forum Math. **23** no.2 (2011), 245–284.
- [5] Z. Lü and L. Yu, *On 3-manifolds with locally standard $(\mathbb{Z}_2)^3$ -actions*, Topology and its Applications **60** no.4 (2013), 596–605.
- [6] H. Nakayama and Y. Nishimura, *Orientability of small covers and coloring simple polytopes*, Osaka J. Math. **42** no.1 (2005), 243–256.
- [7] Y. Nishimura, *Combinatorial constructions of three-dimensional small covers*, Pacific J. Math. **256** no.1 (2012), 177–199.
- [8] A. Suciu and A. Trevisan, *Real toric varieties and abelian covers of generalized Davis-Januszkiewicz spaces*, preprint, 2012.